

BY *THEIGORFATHER*

# *MATEMATIKA 2*

- *PRVI DEO* -

## DIFERENCIJABILNOST I NEPREKIDNOST (BEZ DOKAZA)

1.  $\varepsilon$ -околина, у ознаци  $U_\varepsilon(P_0)$  тачке  $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$  је скуп свих тачака  $P(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  чије је растојање од тачке  $P_0$  мање од  $\varepsilon$ , тј.  $d(P, P_0) < \varepsilon$ .

Тачку  $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  из скупа  $D$  називамо граничном тачком тог скупа, ако свака њена  $\varepsilon$ -околина садржи истовремено и тачке које припадају скупу  $D$  и тачке које му не припадају.

Скуп који садржи све своје граничне тачке је затворен скуп.

Околина тачке  $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ , је било који отворен скуп  $U(P_0)$  који садржи ту тачку.

Тачка  $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  скупа  $D$  је унутрашња тачка, ако постоји нека њена  $\varepsilon$ -околина чије све тачке припадају скупу  $D$ .

Ако су све тачке неког скупа  $D$  унутрашње, такав скуп је отворен.

2.

преко низа тачака

Ако за произвољан низ тачака  $M_n(x_n, y_n)$  из области дефинисаности, који конвергира ка тачки  $M_0(x_0, y_0)$ , низ одговарајућих вредности  $f(x_n, y_n) (\equiv f(M_n))$  увек конвергира истом броју  $A$ , тада се тај број назива граничном вредношћу функције  $f(x, y)$  у тачки  $M_0$ .

$$A = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = \lim_{M \rightarrow M_0} f(M).$$

преко  $\varepsilon$ -околинe

За функцију  $f(x, y)$  ( $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ) која је дефинисана у некој околини тачке  $M_0$  изузев можда у  $M_0$  кажемо да има граничну вредност  $A$  кад тачка  $M$  конвергира тачки  $M_0$ , и пишемо

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$$

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_1^0 \\ \dots \dots \dots \\ x_n \rightarrow x_n^0}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = A$$

За функцију  $z = f(x, y)$  ( $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ) дефинисану у тачки  $M_0(x_0, y_0)$  ( $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ ) и некој њеној околини, кажемо да је непрекидна у  $M_0$  ако је

$$\lim_{\substack{M \rightarrow M_0 \\ x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

$$\left( \lim_{M \rightarrow M_0} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \right)$$

1.

KONVERGENCIJA NIZA TACAКА U PROSTORU

Низ тачака  $P_k(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$  у простору  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  конвергира тачки  $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in D$  ако  $d(P_k, P_0) \rightarrow 0$  кад  $k \rightarrow \infty$ . Тачка  $P_0$  је гранична тачка низа тачака  $P_k$ .

2.

Неопходан и довољан услов да низ тачака  $P_k(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$  конвергира ка  $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  је да низови бројева  $x_i^k$  конвергирају ка  $x_i^0$  за свако  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Доказ. Нека  $d(P_k, P_0) \rightarrow 0$  кад  $k \rightarrow \infty$ , тј. нека

$$(\forall \varepsilon) (\exists K_0 \in \mathbb{N}) k > K_0 \Rightarrow d(P_k, P_0) < \varepsilon.$$

Како је за свако  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$|x_i^k - x_i^0| = \sqrt{(x_i^k - x_i^0)^2} \leq \sqrt{(x_1^k - x_1^0)^2 + \dots + (x_n^k - x_n^0)^2} = d(P_k, P_0),$$

то важи и

$$k > K_0 \Rightarrow |x_i^k - x_i^0| < \varepsilon,$$

из чега следи да за свако  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  низ  $x_i^k$  конвергира ка  $x_i^0$ .

Нека за свако  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , низ бројева  $x_i^k$  конвергираја ка  $x_i^0$ , тј. нека  $k > K_i \Rightarrow |x_i^k - x_i^0| < \varepsilon/\sqrt{n}$  и нека је  $K_0 = \max\{K_i : i \in \{1, \dots, n\}\}$ . Тада

$$k > K_0 \Rightarrow \sqrt{(x_1^k - x_1^0)^2 + \dots + (x_n^k - x_n^0)^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{n^2}} \cdot n} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon,$$

што значи да низ тачака  $P_k$  конвергира ка  $P_0$ .

3.

ТЕОРЕМА О ГРАНИЧНОЈ ВРЕД. F-ЈЕ ПРЕКО НИЗА ТАЧАКА

Ако за сваки низ тачака  $P_k(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$  који конвергира ка  $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ , низ одговарајућих вредности  $f(P_k)$  конвергира ка броју  $L$ , онда је  $L$  гранична вредност функције  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  у тачки  $P_0$ .



Нека је функција  $z = f(x, y)$  дефинисана у тачки  $P_0(x_0, y_0)$  и некој њеној околини. Ако њен тотални прираштај  $\Delta z(P_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$  може да се напише у облику

$$\Delta z(P_0) = f'_x(P_0)\Delta x + f'_y(P_0)\Delta y + o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right), \quad \Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0,$$

онда је функција  $z = f(x, y)$  диференцијабилна у тачки  $P_0$ .

Нека је функција  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  дефинисана у тачки  $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  и некој њеној околини. Ако њен тотални прираштај  $\Delta u(P_0) = f(P) - f(P_0)$ , где је  $P(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_n^0 + \Delta x_n)$  може да се напише у облику

$$\Delta u(P_0) = f'_{x_1}(P_0)\Delta x_1 + f'_{x_2}(P_0)\Delta x_2 + \dots + f'_{x_n}(P_0)\Delta x_n + o\left(\left(\sum_{i=1}^n \Delta x_i\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

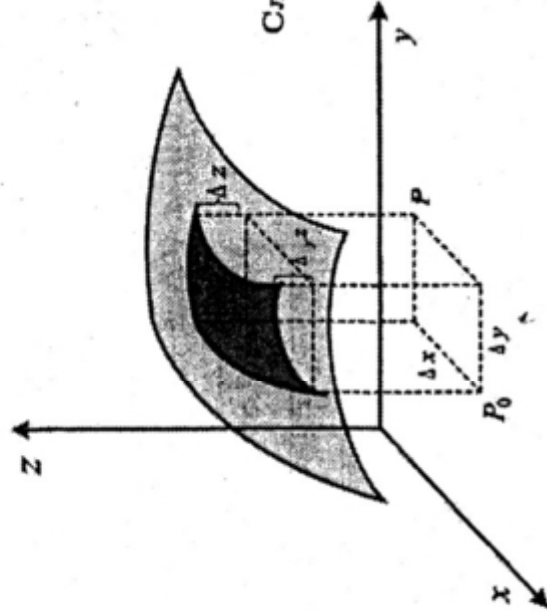
$$\Delta x_i \rightarrow 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

онда је функција  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  диференцијабилна у тачки  $P_0$ .

Нека је за задати skup  $D \subset \mathbb{R}^2$ , тачка  $P_0(x_0, y_0) \in \text{int} D$ , а  $P(x, y)$  произвољна тачка skupa  $D$ . Тада су прираштаји независних променљивих  $x$  и  $y$  вредности  $\Delta x = x - x_0$  и  $\Delta y = y - y_0$ . Са овако уведеним ознакама можемо изразити координате тачке  $P$  помоћу координата тачке  $P_0$ :  $x = x_0 + \Delta x$  и  $y = y_0 + \Delta y$ . Такође, можемо увести следећи важан појам:

Тотални прираштај функције  $z = f(x, y)$  у тачки  $P_0(x_0, y_0)$  је разлика вредности те функције у произвољној тачки  $P(x, y)$  и у тачки  $P_0$ :

$$\Delta z = f(P) - f(P_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$



Слика : Прираштаји функције  $z = f(x, y)$  у тачки  $P_0(x_0, y_0)$



Уколико, при поређењу тачака  $P$  и  $P_0$ , варира само једна од променљивих, одговарајући прираштај функције се назива парцијални прираштај. Тако, за функцију две променљиве разликујемо парцијалне прираштаје по променљивим  $x$  и  $y$ :

- $\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$
- $\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$

Величина  $z$  се назива функцијом променљивих величина  $x$  и  $y$  на скупу  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  ако се сваком урађеном пару  $(x, y) \in D$  по неком правилу придруживања  $f$  додељује тачно једна вредност променљиве  $z \in E \subset \mathbb{R}$ :

$$\mathbb{R}^2 \ni D \xrightarrow{f(x,y)} E \subset \mathbb{R}.$$

Ако постоје коначне граничне вредности количника парцијалних прираштаја функције  $f(x, y)$  у тачки  $P_0(x_0, y_0)$ , са одговарајућим прираштајима независне променљиве, кад оне теже нули, тада се те граничне вредности називају парцијалним изводима функције  $f$  у тачки  $P_0(x_0, y_0)$ .

Ознаке:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x} = f'_x, \quad y = \text{const}$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y, \quad x = \text{const}$$

## 2) TEOREMA DOVOLJNIM USLOVIMA ZA DIFERENCIJABILNOST F-JE $Z=F(x, y)$

Нека је  $P_0(x_0, y_0)$  унутрашња тачка области дефинисаности функције  $z = f(x, y)$ . Ако функција  $z = f(x, y)$  у тачки  $P_0$  има дефинисана оба парцијална извода, од којих је бар један непрекидан, она је у тој тачки диференцијабилна.

## TEOREMA DOVOLJNIM USLOVIMA ZA DIFERENCIJABILNOST F-JE $U=F(x_1, \dots, x_n)$

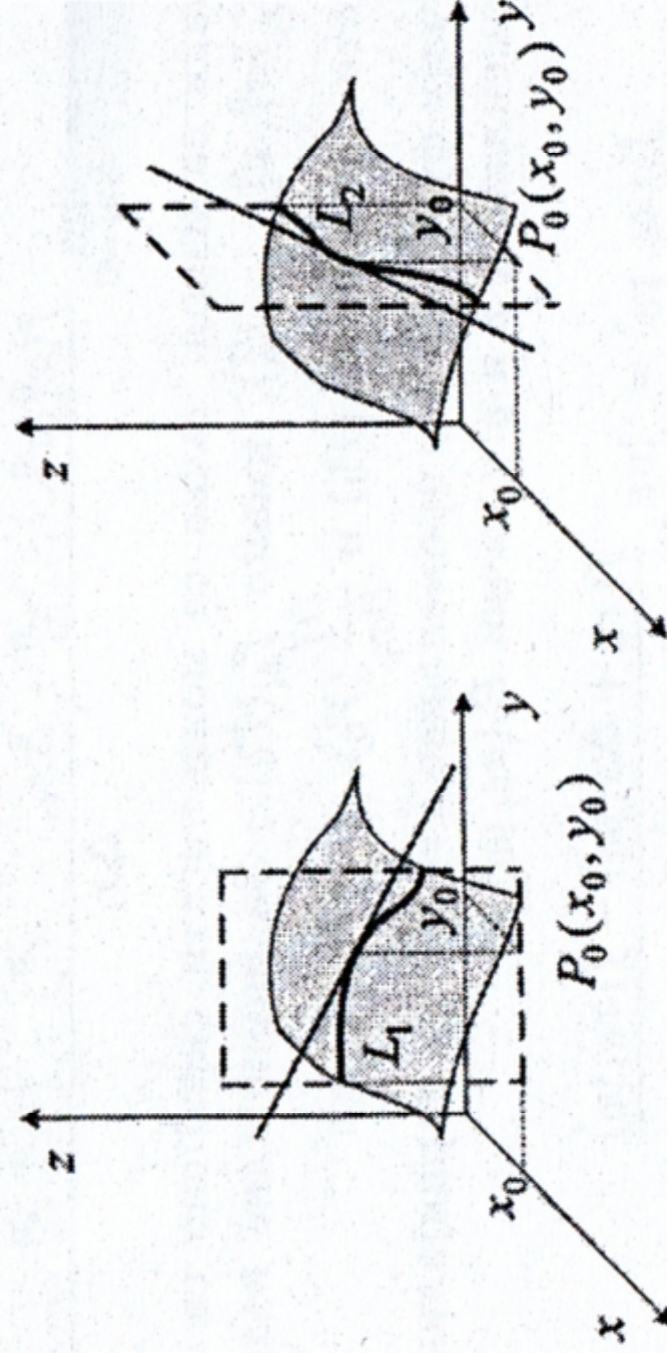
Ако функција  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  има непрекидне све парцијалне изводе у тачки  $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  која је унутрашња тачка области дефинисаности, онда је та функција диференцијабилна у тачки  $P_0$ .

Функције које испуњавају својство да су им сви парцијални изводи у тачки  $P_0$  непрекидни, називамо непрекидно диференцијабилним.



Уколико код функције  $z = f(x, y)$  фиксирамо вредност  $y = y_0$ , добијамо  $z = f(x, y_0)$ , што је заправо функција једне променљиве  $\varphi(x)$ . На графику се  $z = f(x, y_0)$  може представити кривом  $L_1$  која је пресек површи  $P$  дефинисане са  $z = f(x, y)$  и равни  $y = y_0$ . Како је при томе парцијални извод  $f'_x(x_0, y_0)$  једнак изводу функције  $\varphi'(x_0)$ , то у геометријском смислу значи да је коефицијент тангенте у равни  $y = y_0$  на криву  $L_1$  једнак парцијалном изводу  $f'_x(x_0, y_0)$ .

Слично,  $z = f(x_0, y)$  се на графику представља кривом  $L_2$  која је пресек површи  $P$  и равни  $x = x_0$ , а вредност парцијалног извода  $f'_y(x_0, y_0)$  је једнака коефицијенту правца тангенте у равни  $x = x_0$  на  $L_2$ .



1)

PARCIJALNI IZVODI PRVOG REDA I DIFERENCIJABILNOST - VEC NAPISAO!

2)

Доказати да ако за функцију  $z = f(x, y)$  у тачки  ~~$P_0(x_0, y_0)$~~  важи  
 $\Delta z - f'_x \Delta x - f'_y \Delta y = \alpha \Delta x + \beta \Delta y$ , при чему  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$ ,  
 онда је она диференцијабилна.

3)

За функцију  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  која је диференцијабилна у тачки  $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ , главни део тоталног прираштаја  $f'_{x_1} \Delta x_1 + f'_{x_2} \Delta x_2 + \dots + f'_{x_n} \Delta x_n$  је диференцијал (PRVOG REDA) те функције у  $P_0$ .

За диференцијал се користи ознака  $du(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ . Како је диференцијал функције  $u = x_i$  једнак  $du = \Delta x_i$ , тј.  $dx_i = \Delta x_i$ , (кад  $\Delta x_i \rightarrow 0, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ), то се диференцијал записује у облику

$$du(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = f'_{x_1} dx_1 + f'_{x_2} dx_2 + \dots + f'_{x_n} dx_n.$$

За рад са диференцијалом важи да је:

- $d(c \cdot f) = c \cdot df$ ;
- $d(f \pm g) = df \pm dg$ ;
- $d(f \cdot g) = g \cdot df + f \cdot dg$ ;
- $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \cdot df + f \cdot dg}{g^2}, g \neq 0$ .



## PARCIJALNI IZVODI SLOZENE FUNKCIJE

1)

### PARCIJALNI IZVODI PRVOG REDA F-JE $Z=F(X,Y)$ I GEOMETRIJSKO TUMACENJE

- VEC NAPISAO!

2) Ако су  $z = F(u, v)$ ,  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  диференцијабилне функције, извести формулу за  $z'_x$ . Написати формулу за  $z'_y$ .

Ако је дата функција  $z = F(u, v)$ , где су  $u$  и  $v$  функције независно променљивих  $x$  и  $y$ , тј.  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$ , тада је  $z$  сложена функција аргумената  $x$  и  $y$ ,

$$z = F[u(x, y), v(x, y)].$$

- Израчунаћемо  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$  под претпоставком да  $F(u, v)$ ,  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  имају непрекидне парцијалне изводе (диференцијабилне су).
- Ако се аргумент у фиксира, а  $x$  има прираштај  $\Delta x$ , онда су прираштаји функција  $u$  и  $v$  по променљивој  $x$ :  $\Delta_x u$  и  $\Delta_x v$ .

Прираштај функције  $z = F(u, v)$ , по променљивој  $x$  (због диференцијабилности)

$$\Delta_x z = \frac{\partial f}{\partial u} \Delta_x u + \frac{\partial f}{\partial v} \Delta_x v + \alpha \Delta_x u + \beta \Delta_x v,$$

дељењем са  $\Delta x$  добија се

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \beta \frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

Како су функције  $u = u(x, y)$  и  $v = v(x, y)$  непрекидне, ако  $\Delta x \rightarrow 0$ , онда  $\Delta_x u \rightarrow 0$  и  $\Delta_x v \rightarrow 0$ , а такође  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\beta \rightarrow 0$ .

$$\text{Како је } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x},$$

заменом у претходном изразу се добија

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}.$$

- Слично, ако се аргумент  $x$  фиксира, а у има прираштај  $\Delta y$ , онда се добија 
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

3)

Написати формуле за парцијалне изводе диференцијабилне функције  $u = f(x_1, \dots, x_n)$  преко променљивих  $t_j$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ , где су  $x_i = x_i(t_1, \dots, t_m)$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

---

диференцијабилне функције.

---

$$\begin{aligned} g'_{t_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ g'_{t_2} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_2} \\ g'_{t_m} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_m} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_m} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_m}. \end{aligned}$$

1)

UNUTRASNJA I GRANICNA TASKA SKUPA, I OTVOREN SKUP - VEC NAPISAO!

SKUP KOLI SADRZI SVE SVOJE GRANICNE TACKE JE ZATVOREN SKUP.

2)

Ако постоји парцијални извод функције  $f'_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , по променљивој  $x_j$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  у тачки  $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ , онда се он назива парцијални извод другог реда функције  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  у тачки  $P_0$  и означава са  $f''_{x_i x_j}(P_0)$  или

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(P_0).$$

3)

Нека функција  $z = f(x, y)$  има дефинисане мешовите парцијалне изводе  $f''_{xy}$ ,  $f''_{yx}$  на области  $D$  и нека су у датој унутрашњој тачки  $P_0(x_0, y_0)$  ти изводи непрекидни. Тада су они у тој тачки и једнаки, тј.

$$f''_{xy}(P_0) = f''_{yx}(P_0).$$



1)

TOTALNI PRIRASTAJ I TOTALNI (TJ. SAMO) DIFERENCIJAL - VEC NAPISAO!2) Извести формулу за диференцијал другог реда функције  $z = f(x, y)$ .

Ако функције  $z = f(x, y)$  има непрекидне парцијалне изводе другог реда на неком отвореном скупу  $D \subseteq \mathbb{R}$ , тада се диференцијал тоталног диференцијала дате функције назива диференцијалом другог реда и означава са  $d^2z$ .

Како је  $d^2z = d(dz)$ , то је

$$\begin{aligned} d^2z &= d(f'_x dx + f'_y dy) = d(f'_x)dx + d(f'_y)dy = \\ &= (f''_{x^2}dx + f''_{xy}dy)dx + (f''_{yx}dx + f''_{y^2}dy)dy = \\ &= f''_{x^2}dx^2 + f''_{xy}dxdy + f''_{yx}dxdy + f''_{y^2}dy^2. \end{aligned}$$

У случају да су мешовити парцијални изводи непрекидни, други диференцијал има облик

$$d^2z = f''_{x^2}dx^2 + 2 \cdot f''_{xy}dxdy + f''_{y^2}dy^2.$$

3) Написати формулу за диференцијал трећег реда функције  $z = f(x, y)$ .

Уколико за други диференцијал функције  $z = f(x, y)$  поново тражимо диференцијал, тада се добија трећи диференцијал те функције, тако да је  $d^3z = d(d^2z)$ . Под претпоставком да су мешовити парцијални изводи трећег реда непрекидне функције, добија се

$$d^3z = f''_{x^3}dx^3 + 3 \cdot f''_{xy^2}dxdy^2 + 3 \cdot f''_{x^2y}dx^2dy + f''_{y^3}dy^3.$$

## IMPLICITNE FUNKCIJE

1) За једначину  $F(x, y) = 0$  и дато  $x \in \mathbb{R}$  размотримо колико постоји одговарајућих вредности  $y \in \mathbb{R}$  таквих да је уређени пар  $(x, y)$  решење дате једначине. Таквих вредности може бити једна или више, али могуће је да за дато  $x$  не постоји ни једно одговарајуће  $y$ . Нека је  $D = D_x \times D_y \subseteq \mathbb{R}^2$ , скуп уређених парова  $(x, y)$  таквих да је  $x \in D_x$ ,  $y \in D_y$ . Ако на  $D$ , за свако  $x$  постоји тачно једно  $y$  такво да је одговарајући уређени пар решење једначине  $F(x, y) = 0$ , онда кажемо да је на скупу  $D$  том једначином имплицитно дефинисана функција једне променљиве и можемо писати  $y = \varphi(x)$ .

Слично, ако за свако  $y \in D_y$  постоји тачно једно  $x \in D_x$  такво да је тачна једначина  $F(x, y) = 0$ , онда је на скупу  $D$  том једначином такође имплицитно дефинисана функција једне променљиве, при чему, у овом случају  $x$  зависи од  $y$ . Тада можемо писати  $x = \psi(y)$ .

2) TEOREMA O EGZISTENCIJI I NEPREKIDNOSTI IMPLICITNE F-JE JEDNE PROM. (BEZ DOKAZA)

Нека су функција  $z = F(x, y)$  и њен парцијални изводи  $F'_x(x, y)$  дефинисани и непрекидни у некој околини тачке  $(x_0, y_0)$ . Нека је  $F(x_0, y_0) = 0$  и  $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ . Тада постоји околина тачке  $x_0$  у којој је једначином  $F(x, y) = 0$  имплицитно дефинисана непрекидна функција  $y = \varphi(x)$  за коју важи  $y_0 = \varphi(x_0)$ .

TEOREMA O DOVOLJNIM USLOVIMA DA IMPLICITNA F-JA JEDNE PROM. BUDE NEPREKIDNO DIFERENCIJABILNA (BEZ DOKAZA)

$$F'_x(x_0, y_0) \neq 0.$$

Нека су функција  $z = F(x, y)$  и њени парцијални изводи  $F'_x(x, y)$  и  $F'_y(x, y)$  дефинисани и непрекидни у некој околини тачке  $(x_0, y_0)$ . Нека је  $F(x_0, y_0) = 0$  и  $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ . Тада је имплицитна функција  $y = \varphi(x)$  која је дефинисана једначином  $F(x, y) = 0$  у околини тачке  $x_0$  и за коју важи  $y_0 = \varphi(x_0)$ , непрекидно диференцијабилна у тој околини.

$$x = \psi(y)$$

$$x_0 = \psi(y_0)$$



Функције више променљивих такође могу да буду задате имплицитно, помоћу једначине или система једначина. При томе, као и код имплицитно задате функције једне променљиве, морамо да водимо рачуна о броју решења једначине, односно система. Да би функција више променљивих била дефинисана на некој области  $D$ , на овај начин, потребно је да у  $D$  једначина, односно систем једначина има јединствено решење по зависној променљивој.

Функције две променљиве  $z = z(x, y)$  се често задају у имплицитном облику, помоћу једначине  $F(x, y, z) = 0$ , па је корисно да одредимо парцијале изводе функције задате на овај начин.

Да би смо одредили парцијални извод функције  $z = z(x, y)$  по променљивој  $x$ , тражићемо извод леве и десне стране једначине  $F(x, y, z) = 0$  по тој променљивој. Извод леве стране, као извод сложене функције је једнак  $F'_x + F'_z \cdot z'_x$ , док је на десној страни константа, па је извод једнак 0. Дакле,  $F'_x + F'_z \cdot z'_x = 0$ , из чега следи  $z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}$ , за  $F'_z \neq 0$ . Слично се добија и парцијални извод по  $y$ ,  $z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$ .

Даље, се слично могу одредити и други парцијални изводи из једначина  $F'_x + F'_z \cdot z'_x = 0$ , и  $F'_y + F'_z \cdot z'_y = 0$ , тражењем извода по  $x$  и  $y$  за леву и десну страну једначине. Тако је извод прве једначине по  $x$

$$(F''_{xz} + F''_{zx} \cdot z'_x) + [(F''_{xz} + F''_{zx} \cdot z'_x) \cdot z'_x + F'_z \cdot z''_{x^2}] = 0$$

па је

$$z''_{x^2} = -\frac{F''_{xz} + 2F''_{xz} \cdot z'_x + F''_{zz} \cdot z'^2_x}{F'_z}.$$

Слично,

$$z''_{y^2} = -\frac{F''_{yz} + 2F''_{yz} \cdot z'_y + F''_{zz} \cdot z'^2_y}{F'_z},$$

$$z''_{xy} = z''_{yx} = -\frac{F''_{xy} + F''_{xz} \cdot z'_y + F''_{yz} \cdot z'_x + F''_{zz} \cdot z'_x \cdot z'_y}{F'_z}.$$



- Нека је дат скуп функција  $y_i = y_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , које у некој тачки  $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  имају дефинисане све парцијалне изводе првог реда. Тада се матрица састављена од парцијалних извода тих функција у тачки  $P_0$

$$\left[ \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

назива Јакобијева матрица датог скупа функција у тачки  $P_0$ .

- Када је  $m = n$ , детерминанта Јакобијеве матрице се назива јакобијан или функционална детерминанта и означава

$$\frac{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}.$$

Општи случај теореме о систему имплицитних функција више променљивих гласи:

Нека су функције  $F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  непрекидно диференцијабилне у некој околини тачке  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$ . Ако важи  $F_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0) = 0$  и ако је јакобијан

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)} \neq 0,$$

тада постоји таква околина  $G = G_x \times G_y \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$  тачке  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$  да за свако  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in G_x$  ( $G_x \subseteq \mathbb{R}^n$ ) постоји тачно једно решење

$y = (y_1(x_1, x_2, \dots, x_n), y_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, x_2, \dots, x_n)) \in G_y \subseteq \mathbb{R}^m$  скупа једначина

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

које задовољава услов  $y_i^0 = y_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , а функција је  $y_i = y_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  су непрекидно диференцијабилне на  $G_x$  и њихови парцијални изводи представљају јединствено решење система

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial F_i}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

1)

PRIRASTAJI NEZAVISNIH PROMENJIVIH, TOTALNI PRIRASTAJ F-JE I PARCIJALNI PRIRASTAJI - VEC NAPISAO!

2)

Посматрајмо функцију  $u = f(x, y, z)$  у скаларном пољу  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ . Нека су дате тачка  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  и јединични вектор  $v = (v_x, v_y, v_z)$  у области  $\Omega$ . Онда под приштајем функције у смеру вектора  $v$  у тачки  $M_0$  подразумевамо вредност

$$\Delta_v u(x_0, y_0, z_0) = f(x_0 + tv_x, y_0 + tv_y, z_0 + tv_z) - f(x_0, y_0, z_0), \quad t > 0.$$

Ако постоји гранична вредност

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + tv_x, y_0 + tv_y, z_0 + tv_z) - f(x_0, y_0, z_0)}{t}$$

називамо је извод у смеру вектора  $v$  у тачки  $M_0$  и означавамо са

$$f'_v \text{ или } \frac{\partial u}{\partial v}.$$

### 3) TEOREMA O IZVODU U SMERU VEKTORA ZA DIFERENCIJABILNU FUNKCIJU

Извод диференцијабилне функције  $u = f(x, y, z)$  у смеру јединичног вектора  $v = (v_x, v_y, v_z)$  је једнак

$$f'_v = f'_x \cdot v_x + f'_y \cdot v_y + f'_z \cdot v_z.$$

Доказ. За диференцијабилну функцију важи

$$\Delta u = f'_x \cdot \Delta x + f'_y \cdot \Delta y + f'_z \cdot \Delta z + o(\rho), \quad \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}.$$

Ако уместо тоталног приштаја  $\Delta u$  посматрамо приштај у смеру вектора  $v$ ,  $\Delta_v u$ , онда су приштаји независних променљивих једнаки  $\Delta x = tv_x$ ,  $\Delta y = tv_y$ ,  $\Delta z = tv_z$ , а  $d = t$ ,  $t > 0$ . Заменом се добија

$$\Delta_v u = f'_x \cdot tv_x + f'_y \cdot tv_y + f'_z \cdot tv_z + o(t),$$

а дељењем са  $t$

$$\frac{\Delta_v u}{t} = f'_x \cdot v_x + f'_y \cdot v_y + f'_z \cdot v_z + \frac{o(t)}{t}.$$

После преласка на граничну вредност добија се тражена релација

$$f'_v = f'_x \cdot v_x + f'_y \cdot v_y + f'_z \cdot v_z.$$



1)

Када је у скаларном пољу  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  дата диференцијабилна функција  $u = f(x, y, z)$ , за сваку тачку поља  $M_0 \in \Omega$  се може одредити одговарајући вектор

$$\text{grad} u(M_0) = f'_x(M_0) \cdot \mathbf{i} + f'_y(M_0) \cdot \mathbf{j} + f'_z(M_0) \cdot \mathbf{k}$$

који називамо градијент. Како је за диференцијабилну функцију  $u$  могуће одредити овакав вектор у свакој тачки поља, можемо сматрати да је горњим изразом дефинисана векторска функција и задато векторско поље, поље градијента.

2) Веа градијента и извода у смеру вектора.

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) \cdot (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

3) KADA JE IZVOD U SMERU VEKTORA NAJVEĆI? DEFINISI ANTIGRADIJENT.

Како је вредност  $|\text{grad} u| \cdot \cos \varphi$  највећа када је  $\cos \varphi = 1$ , тј.  $\varphi = 0$ , то је вредност извода  $f'_v$  највећа када је смер градијента и вектора  $v$  исти. То показује да функција  $u = f(x, y, z)$  најбрже расте у смеру градијента.

Слично, ако желимо да одредимо када је  $f'_v$  најмање, односно када функција најспорије расте (или најбрже опада), онда је потребно узети  $\cos \varphi = -1$ , што је испуњено за  $\varphi = \pi$ , тј. вектор  $v$  има супротан смер од градијента. Заправо сматрамо да функција најспорије расте у смеру вектора који се назива антиградијент, а једнак је  $-\text{grad} u$ .



- 1) • Величина  $z$  се назива функцијом променљивих величина  $x$  и  $y$  на скупу  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  ако се сваком урађеном пару  $(x, y) \in D$  по неком правилу придруживања  $f$  додељује тачно једна вредност променљиве  $z \in E \subset \mathbb{R}$ :

$$\mathbb{R}^2 \supset D \xrightarrow{f(x,y)} E \subset \mathbb{R}.$$

- Скуп свих уређених парова  $(x, y)$ , за које постоји одговарајућа вредност  $z$ , добијена по правилу  $f$ , назива се област дефинисаности  $D$  функције.
- Скуп свих реалних бројева  $z$ , који се добијају по правилу  $f$ , од свих могућих парова  $(x, y)$  из области дефинисаности  $D$ , назива се скуп вредности.

Површ  $S$  у простору  $\mathbb{R}^3$  коју можемо да опишемо помоћу диференцијабилне функције  $z = f(x, y)$  називамо глатка површ.

Ако постоји раван која садржи тангенте  $T$  за све криве линије  $L$  које леже на површи  $S$  и пролазе кроз тачку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  тада се та раван назива тангентна раван.

2)

Ако постоји тангентна раван површи  $S$ , описане функцијом  $z = f(x, y)$  која има дефинисане парцијалне изводе у тачки  $P_0(x_0, y_0)$ , такој да  $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$  та раван је дата једначином

$$z - z_0 = f'_x(P_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(P_0) \cdot (y - y_0).$$

3) TEOREMA O DOVOLJNIM USLOVIMA ZA POSTOJANJE TANGENTNE RAVNI

Глатка површ  $S$  описана са  $z = f(x, y)$  у свакој тачки  $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$ , има тангентну раван.

1)

Нека је  $S$  глатка површ, а  $L_x$  и  $L_y$  криве дуж којих равни  $y = y_0$  и  $x = x_0$  секу  $S$ . Раван која садржи тангенте  $T_x$  и  $T_y$  тих кривих у њиховој заједничкој тачки  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  зове се тангентна раван површи  $S$  у тачки  $M_0$ .

На основу једначина за  $T_x$  и  $T_y$  добија се једначина тангентне равни

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0) = \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{r_0} (x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{r_0} (y - y_0)$$

Правна  $N$  која је у датој додирној тачки  $M_0$  глатке површи  $S$  и њене тангентне равни, нормална на ову раван, зове се нормала површи  $S$  у датој тачки  $M_0$ .

2)

Ако су  $z = F(u, v)$ ,  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  диференцијабилне функције, извести формулу за  $z'_x$ . Написати формулу за  $z'_y$ .

Ако је дата функција  $z = F(u, v)$ , где су  $u$  и  $v$  функције независно променљивих  $x$  и  $y$ , тј.  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$ , тада је  $z$  сложена функција аргумената  $x$  и  $y$ ,

$$z = F[u(x, y), v(x, y)].$$

- Израчунаћемо  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$  под претпоставком да  $F(u, v)$ ,  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  имају непрекидне парцијалне изводе (диференцијабилне су).
- Ако се аргумент  $y$  фиксира, а  $x$  има прираштај  $\Delta x$ , онда су прираштаји функција  $u$  и  $v$  по променљивој  $x$ :  $\Delta_x u$  и  $\Delta_x v$ .

Прираштај функције  $z = F(u, v)$ , по променљивој  $x$  (због диференцијабилности)

$$\Delta_x z = \frac{\partial f}{\partial u} \Delta_x u + \frac{\partial f}{\partial v} \Delta_x v + \alpha \Delta_x u + \beta \Delta_x v,$$

дељењем са  $\Delta x$  добија се

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \beta \frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$



Како су функције  $u = u(x, y)$  и  $v = v(x, y)$  непрекидне, ако  $\Delta x \rightarrow 0$ , онда  $\Delta_x u \rightarrow 0$  и  $\Delta_x v \rightarrow 0$ , а такође  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\beta \rightarrow 0$ .

$$\text{Како је } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x},$$

заменом у претходном изразу се добија

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}.$$

- Слично, ако се аргумент  $x$  фиксира, а  $y$  има прираштај  $\Delta y$ , онда се добија

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

3)

Једначина тангентне равни површи  $S$  у  $M_0$  је

$$F'_x(x - x_0) + F'_y(y - y_0) + F'_z(z - z_0) = 0$$

а једначина нормале површи  $S$  у  $M_0$  је

$$\frac{x - x_0}{F'_x} = \frac{y - y_0}{F'_y} = \frac{z - z_0}{F'_z}$$

Формулисати теорему о средњој вредности.

Ако је у некој околини тачке  $P_0(x_0, y_0)$  функција  $f(x, y)$  непрекидна и има непрекидне парцијалне изводе  $\frac{\partial f}{\partial x}$  и  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , тада је

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) \Delta y$$

за неко  $0 < \theta < 1$ .

Доказ

Према Лагранжевој теорему за функцију једне променљиве  $\Phi(t)$ ,

$$\Phi(1) - \Phi(0) = \Phi'(\theta)(1 - 0) \text{ за неко } 0 < \theta < 1.$$

Из тога следи

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) \Delta y$$

што је требало доказати.

Написати Тејлоров полином  $n$ -тог степена функције  $z = f(x, y)$  која има непрекидне парцијалне изводе до  $n+1$ -ог реда.

$$T_n = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0, y_0) + \dots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0, y_0) + R_n$$

UKOLIKO JE  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  ONDA JE MAKLORENOV POLINOM

Написати Тејлоров полином  $n$ -тог степена функције  $U=F(x_1, \dots, x_n)$  која има непрекидне парцијалне изводе до  $n+1$ -ог реда.

Употребљавајући краће ознаке за тачке  $P(x_1, x_2, \dots, x_m) \in U_\varepsilon(P_0)$  и  $P_\theta(x_1^0 + \theta \Delta x_1, x_2^0 + \theta \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \theta \Delta x_m)$ ,  $\theta \in (0, 1)$ , добија се

$$T_n(P) = f(P_0) + df(P_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(P_0) + \dots + \frac{1}{n!} d^n f(P_0).$$

Маклоренов полином за функцију  $n$  променљивих је специјалан случај Тејлоровог полинома, када се развија у околини тачке  $P_0(0, 0, \dots, 0)$ .



Лагранжов облик остатка, који означавамо са  $R_n^L(x, y)$ .

Према томе

$$R_n^L(x, y) = \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y), \quad 0 < \theta < 1.$$

Извести Тејлоров полином  $n$ -тог степена функције  $z = f(x, y)$ .

Развијањем функције  $\Phi(t)$  у Маклоренов полином, добија се

$$\Phi(t) = \Phi(0) + \frac{1}{1!} \Phi'(0)t + \frac{1}{2!} \Phi''(0)t^2 + \dots + \frac{1}{n!} \Phi^{(n)}(0)t^n + R_n^L,$$

са грешком записаном у Лагранжевом облику

$$R_n^L = \frac{1}{(n+1)!} \Phi^{(n+1)}(\theta) t^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

За  $t = 1$ :

$$\Phi(1) = \Phi(0) + \frac{1}{1!} \Phi'(0) + \frac{1}{2!} \Phi''(0) + \dots + \frac{1}{n!} \Phi^{(n)}(0) + R_n^L,$$

$$R_n^L = \frac{1}{(n+1)!} \Phi^{(n+1)}(\theta).$$

Према дефиницији функције  $\Phi(t)$ ,

$$\Phi(1) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y), \quad \Phi(0) = f(x_0, y_0),$$

$$\Phi'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \Delta y = df(x_0, y_0),$$

$$\Phi''(0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \Delta y \right)^{[2]} = d^2 f(x_0, y_0),$$

.....

$$\Phi^{(n)}(0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \Delta y \right)^{[n]} = d^n f(x_0, y_0),$$

$$\Phi^{(n+1)}(\theta) = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{P_\theta} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{P_\theta} \Delta y \right)^{[n+1]} = d^{n+1} f(P_\theta),$$

$$P_\theta(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y), \quad 0 < \theta < 1,$$

1)

Као и код функција једне променљиве, појам локалног екстремума - максимума или минимума, се може увести и код функција више променљивих.

Функција  $n$ -променљивих  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  има **локални максимум** у тачки  $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  ако постоји  $\varepsilon > 0$  тако да у свим тачкама  $P(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \overset{\circ}{U}_\varepsilon(P_0)$  има мању вредност него у тачки  $P_0$ .

То можемо записати и на следећи начин

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \Rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n) < f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$$

или

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \Rightarrow \Delta f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) < 0.$$

Минимум дефинишемо слично:

Функција  $n$ -променљивих  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  има **локални минимум** у тачки  $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  ако постоји  $\varepsilon > 0$  тако да у свим тачкама  $P(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \overset{\circ}{U}_\varepsilon(P_0)$  има већу вредност него у тачки  $P_0$ , тј.

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \Rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n) > f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$$

или

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \Rightarrow \Delta f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) > 0.$$

## 2) TEOREMA O NEOPHODNIM USLOVIMA ZA EKSTREMUM F-JE N PROMENLJIVIH

Ако функција  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  има екстремум у тачки  $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  у којој гостоје сви парцијални изводи, онда су ти парцијални изводи у тачки  $P_0$  једнаки нули, тј.  $f'_{x_i}(P_0) = 0$  за свако  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Доказ. Ако фиксирамо вредности  $x_j = x_j^0$  свих променљивих, осим  $x_i$  за произвољно  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , онда функција  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  постаје функција једне променљиве  $g(x_i) = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0)$  која има екстремум за  $x_i = x_i^0$ . Према теорему о неопходним условима за екстремум функције једне променљиве следи да је  $g'(x_i) = 0$ . Како је извод функције  $g$  једнак парцијалном изводу функције  $f$  по променљивој  $x_i$ , то је  $f'_{x_i}(P_0) = 0$ . Бирали смо произвољну променљиву  $x_i$ , па тврђење важи за свако  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , што је и требало доказати.



Ако за функције  $z = f(x, y)$  две променљиве, уведемо краће ознаке  $A = f''_{xx}(P_0)$ ,  $B = f''_{xy}(P_0)$ ,  $C = f''_{yy}(P_0)$ , онда важи следећа теорема

Нека функција  $z = f(x, y)$  у околини стационарне тачке  $P_0(x_0, y_0)$  има непрекидне све парцијалне изводе другог реда. Тада

1. Ако је  $A \cdot C - B^2 > 0$  и  $A < 0$ , тада функција  $z = f(x, y)$  има у тачки  $P_0(x_0, y_0)$  максимум.
2. Ако је  $A \cdot C - B^2 > 0$  и  $A > 0$ , тада функција  $z = f(x, y)$  има у тачки  $P_0(x_0, y_0)$  минимум.
3. Ако је  $A \cdot C - B^2 < 0$  тада функција  $z = f(x, y)$  у тачки  $P_0(x_0, y_0)$  нема екстремум.
4. Ако је  $A \cdot C - B^2 = 0$ , тада се овом методом не може одређити карактер стационарне тачке.

3)

... о НЕОПХОДНИМ...

Из тврђења теореме следи да ако функција  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  има дефинисане парцијалне изводе у целој области дефинисаности, онда се сви кандидати за екстремуме могу добити као решења система једначина

$$f'_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Решења овог система се зову стационарне тачке.

Тачке  $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  у којима функција више променљивих  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  има све парцијалне изводе једнаке нули, или неки од тих извода није дефинисан, су критичне тачке функције.

1)

Сума облика

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

назива се квадратна форма.

Квадратна форма се може записати и у векторском облику

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = [x_1, \dots, x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = x^T A x.$$

Квадратна форма је позитивно дефинисана ако је  $Q(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$  кад год је  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$ , а негативно дефинисана ако је  $Q(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0$  кад год је  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$ .

2)

За функцију  $z = f(x, y)$  формирајмо матрицу других парцијалних извода

$$H(f(x, y)) = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix},$$

која је позната као Хесеова матрица.

Често се у ознаци Хесијана изоставља ознака функције и наводи само тачка у којој се траже изводи:  $H(x, y)$ .

За тачку  $P_0(x_0, y_0)$ , главни минори Хесеове матрице  $H(P_0)$  су  $D_1 = A$  и  $D_2 = AC - B^2$ , па се услови теореме своде на проверу знака за  $D_1$  и  $D_2$ , под условом да је  $D_2 \neq 0$ .

3)

TEOREMA O DOVOLJNIM USLOVIMA ZA EKSTREMUM F-JE N PROMENJIVIH, PREKO DRUGOG DIFERENCIJALA KAO KVADRATNE FORME (BEZ DOKAZA)

Нека у некој околини тачке  $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  функција  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  има непрекидне парцијалне изводе до другог реда и нека је  $P_0$  стационарна тачка.

- Ако је квадратна форма  $Q$  позитивно дефинисана, функција  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  у тачки  $P_0$  има строги минимум.
- Ако је квадратна форма  $Q$  негативно дефинисана, функција  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  у тачки  $P_0$  има строги максимум.
- Ако је квадратна форма  $Q$  мења знак, функција  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  у тачки  $P_0$  нема екстремум.



## SILVESTEROV KRITERIJUM

### 1) KVADRATNA FORMA, POZITIVNO I NEGATIVNO DEFINISANE FORME - VEC NAPISAO!

### 2) FORMULISATI SILVESTEROV KRITERIJUM

Нека је  $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$  дата квадратна форма и нека је  $S$  одговарајућа симетрична матрица. Ако су главни минори реда  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , матрице  $S_i$  означени  $D_i$ , тада важи

- $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$  је позитивно дефинисана ако  $D_1 > 0, D_2 > 0, \dots, D_n > 0$ .
- $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$  је негативно дефинисана ако  $D_1 < 0, D_2 > 0, \dots, (-1)^n D_n > 0$ .

### 3) PRIMENA SILVESTOROVOG KRITERIJUMA NA ISPITIVANJE DOVOLJNIH USLOVA ZA LOKALNI EKSTREMUM

У случају квадратне форме две променљиве  $Q(x, y)$ , Силвестерова теорема гласи:

Квадратна форма  $Q(x, y)$  је позитивно дефинисана ако  $D_1 > 0, D_2 > 0$ , а негативно дефинисана ако  $D_1 < 0, D_2 > 0$ .

Код квадратне форме три променљиве  $Q(x, y, z)$ , исказ Силвестерова теорема постаје:

Квадратна форма  $Q(x, y, z)$  је позитивно дефинисана ако  $D_1 > 0, D_2 > 0, D_3 > 0$ , а негативно дефинисана ако  $D_1 < 0, D_2 > 0, D_3 < 0$ .

## USLOVNI EKSTREMUM

### 1) Дефинисати појам условног екстремума за функцију $n$ променљивих са $m$ услова.

Уколико тражимо екстремуме функције  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  при условима облика  $g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \dots, g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ , може се формирати одговарајућа Лагранжова функција

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m g_m(x_1, \dots, x_n)$$

(BEZ DOKAZA)

### 2) TEOREMA O NEOPHODNIM USLOVIMA ZA USLOVNI EKSTREMUM F-JE DVE PROMENLJIVE

Неопходан услов да функција  $z = f(x, y)$  при услову  $\varphi(x, y) = 0$  има екстремум у тачки  $P_0(x_0, y_0)$ , под претпоставком да функције  $f(x, y)$  и  $\varphi(x, y)$  имају непрекидне парцијалне изводе у околини тачке  $P_0(x_0, y_0)$  и да важи  $\varphi'_y(x_0, y_0) \neq 0$ , јесте да постоји такав реалан број  $\lambda_0$  да вредности  $\lambda_0, x_0, y_0$  задовољавају систем једначина

$$f'_x(x_0, y_0) + \lambda_0 \varphi'_x(x_0, y_0) = 0$$

$$f'_y(x_0, y_0) + \lambda_0 \varphi'_y(x_0, y_0) = 0$$

$$\varphi(x_0, y_0) = 0.$$

### TEOREMA O NEOPHODNIM USLOVIMA ZA USLOVNI EKSTREMUM F-JE

#### N PROMENLJIVIH SA M USLOVA (TEOREMA O NEOPHODNIM USLOVIMA ZA USLOVNI EKSTREMUM)

Нека је  $P_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$  екстремум функције  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  при условима  $g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \dots, g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ . Ако претпоставимо да функције  $f, g_1, \dots, g_m$  имају парцијалне изводе првог реда у околини тачке  $P_0$  и да је

$$\text{rang} \left[ \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \Big|_{P_0} \right]_{m \times n} = m, \text{ онда}$$

постоје вредности  $\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0$  ( $\lambda_0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0)$ ), тако да важи

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} \Big|_{(P_0, \lambda_0)} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{P_0} + \lambda_1^0 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \Big|_{P_0} + \dots + \lambda_m^0 \frac{\partial g_m}{\partial x_1} \Big|_{P_0} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_n} \Big|_{(P_0, \lambda_0)} = \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_{P_0} + \lambda_1^0 \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \Big|_{P_0} + \dots + \lambda_m^0 \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \Big|_{P_0} = 0$$

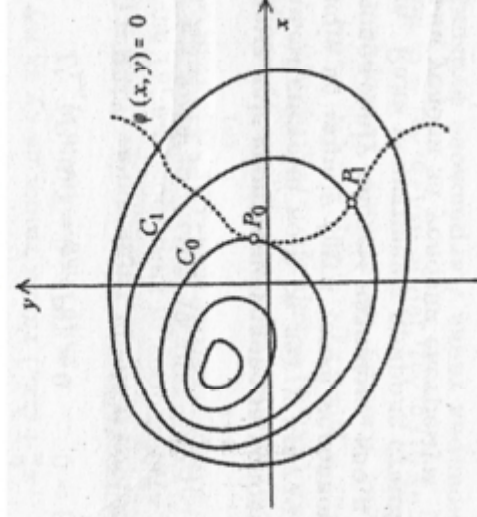
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} \Big|_{(P_0, \lambda_0)} = g_1(x_1^0, \dots, x_n^0) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_m} \Big|_{(P_0, \lambda_0)} = g_m(x_1^0, \dots, x_n^0) = 0.$$



### 3) Геометријско тумачење условног екстремума за функцију две променљиве

Функцију  $z = f(x, y)$  можемо графички да прикажемо преко мреже ниво-линија. При томе свака линија задовољава једначину облика  $f(x, y) = C$  где је  $C$  константна вредност, различита за сваку од ниво-линија (на слици 4.3.4  $C = C_i, i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ). Услов



Слика 4.3.4: Геометријско тумачење условног екстремума

$\varphi(x, y) = 0$  графички представља линију, која је на слици означена испрекидано.

На приказаној слици један од пресека ниво-линије  $C = C_1$  и линије  $\varphi(x, y) = 0$  је тачка  $P_1$ . Како је са једне стране ниво-линије  $C = C_1, f(x, y) < C_1$ , а са друге  $f(x, y) > C_1$ , тачка  $P_1$  не може да буде условни екстремум, јер у њеној околини постоје и тачке у којима вредност функције  $z = f(x, y)$  већа, и у којима је мања, него у тачки  $P_1$  (а при томе је у њима испуњен услов  $\varphi(x, y) = 0$ ).

С друге стране, линија  $\varphi(x, y) = 0$  додирује ниво-линију  $C = C_0$  у тачки  $P_0$ , тј. сем у тој тачки, стално је са исте стране ниво-линије. Зато за тачке линије  $\varphi(x, y) = 0$ , из неке околини тачке  $P_0$ , различите од  $P_0$ , увек важи  $f(x, y) < C_0 = f(P_0)$ , или  $f(x, y) > C_0 = f(P_0)$ , у зависности од тога да ли је  $C_1 < C_0$  или  $C_1 > C_0$ . Према томе тачка  $P_0$  је условни екстремум функције  $z = f(x, y)$ .

Ако функције  $f(x, y)$  и  $\varphi(x, y)$  имају непрекидне парцијалне изводе првог реда, тада постоје тангенте на криве линије  $f(x, y) = C_0$  и  $\varphi(x, y) = 0$ . Како се те линије додирују у  $P_0$ , у питању је иста тангента. Њен коефицијент на основу  $f(x, y) = C_0$  је  $y' = -\frac{f'_x(P_0)}{f'_y(P_0)}$ ,

а на основу  $\varphi(x, y) = 0, y' = -\frac{\varphi'_x(P_0)}{\varphi'_y(P_0)}$ . Зато је

$$\frac{f'_x(P_0)}{f'_y(P_0)} = \frac{\varphi'_x(P_0)}{\varphi'_y(P_0)} (= -\lambda).$$



Нека функције  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $g_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $g_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , ...,  $g_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$  имају непрекидне парцијалне изводе другог реда у околини тачке  $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  такве да је  $(P_0, \lambda_0) = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0)$  стационарна тачка Лагранжове функције, и нека је  $\text{rang} \left( \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right)_{m \times n} = m$ . Ако је

- $d_X^2 L(P_0, \lambda_0)$  позитивно дефинисана, онда је у тачки  $P_0$  условни строги минимум функције  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , при условима  $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,
- $d_X^2 L(P_0, \lambda_0)$  негативно дефинисана, онда је у тачки  $P_0$  условни строги максимум функције  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , при условима  $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,

где је  $d_X^2 L(P_0, \lambda_0)$  диференцијал другог реда Лагранжове функције, само по променљивим  $x_i$  у тачки  $(P_0, \lambda_0)$ .

## OPSTA TEOREMA O DOVOLJNIM USLOVIMA ZA USLOVNI EKSTREMUM

Нека функције  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $g_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $g_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , ...,  $g_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$  имају непрекидне парцијалне изводе другог реда у околини тачке  $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  такве да је  $(P_0, \lambda_0) = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0)$ , за неке вредности  $\lambda_i = \lambda_i^0$ ,  $i = \{1, \dots, m\}$  стационарна тачка Лагранжове функције

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_2 g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m g_m(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

и нека је ранг Јакобијеве матрице

$$\text{rang} \left( \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right)_{m \times n} = m.$$

Тада је довољан услов да тачка  $P_0$  буде тачка условног екстрема функције  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , да за све  $(dx_1, dx_2, \dots, dx_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$  који задовољавају

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_1}(P_0) dx_1 + \frac{\partial g_i}{\partial x_2}(P_0) dx_2 + \dots + \frac{\partial g_i}{\partial x_n}(P_0) dx_n = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

квadratна форма

$$Q = d^2 L(P_0, \lambda_0) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L(P_0, \lambda_0)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j,$$

буде дефинисаног знака.

Прецизније, ако је  $Q > 0$  онда је  $P_0$  тачка условног минимума, ако је  $Q < 0$  онда је  $P_0$  тачка условног максимума, а ако  $Q$  узима вредности различитог знака, онда  $P_0$  није тачка екстрема.