BY
TheIgorfather

Matematika 1

Drugi deo

Srecno!

Ovo je skripta za manje ocene. Nema dokaze.

Ima samo najosnovnije, tako da ako profesor

pita znas li bar neki dokaz ti kazes znam "ovaj"!

Predlozi autora skripte

- izadji u svakom roku - probaj! nista ne gubis sto vise puta izadjes - veca sansa da ces poloziti
- da bi zavrsio fakultet moras poloziti ovo, kad tad. zasto ne sad?
- nikada ne vracaj pitanja. nikad! mozes nesto usmeno da izvuces
- nije toliko tesko koliko izgleda
- samo ponavljaj jedno te isto, 100 puta ako treba
- iako je neuredno napisano, to je to. to dolazi prepisi kod sebe ako ti ne valja

NIZOVI (SA DOKAZIMA)

(1) **Niz realnih br.** je f-ja $a: N \to R$ (preslikavanje prirodnih u realne br.)

Oznaka niza: $\{a_n\}$

opšti član niza

Ograničen niz Niz je ograničen ako je skup njegovih vrednosti ograničen u R

$\exists M \in R : a_n \leq M$

$\exists m \in R : m \leq a_n$

postoji

$\underline{m} \leq a_n \leq \underline{M}$

realni br.

m - donje ograničenje niza

M - gornje ograničenje niza

Monoton niz

Niz je monoton ako važi neki od uslova:

1° $a_n \leq a_{n+1}$ - rastući

2° $a_n < a_{n+1}$ - strogo rastući

3° $a_n \geq a_{n+1}$ - opadajući

4° $a_n > a_{n+1}$ - strogo opadajući

Granična vred. niza je broj a u čijoj okolini se nalazi beskonačno mnogo članova tog niza, a van te okoline konačno mnogo.

$\lim_{n \to \infty} a_n = a$

Niz koji ima gran. vred. je konvergentan, u suprotnom je divergentan.

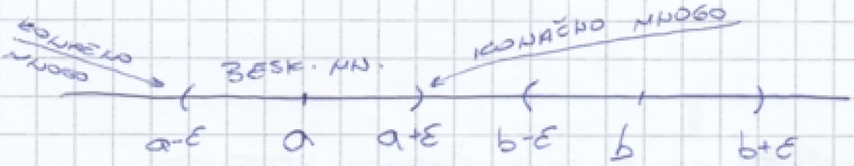
Nula niz $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

② KONVERGENTAN NIZ IMA SAMO JEDNU GRAN. VRED.

(* SAMO JEDNU TAČKU NAG.)

PRETPOSTAVIMO SUPROTNO, TJ. DA IMA DVE GRAN. VRED.

$$\lim_{n\to\infty} X_n = a \qquad \lim_{n\to\infty} X_n = b$$



PO DEF. BI TREBALO DA BUDE BESK. MN., ALI JE KONAČNO

→ ISPADA DA b NIJE GRAN. VRED. ŠTO JE SUPROTNO PRED.

* → U OKOLINI b SE NALAZI KONAČNO MNOGO ČLANOVA PA b NIJE TAČKA NAG. (VEĆ JE TO a)

③ TEOREMA O 3 NIZA (DOKAZ)

$$\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$$

PRETPOSTAVKA

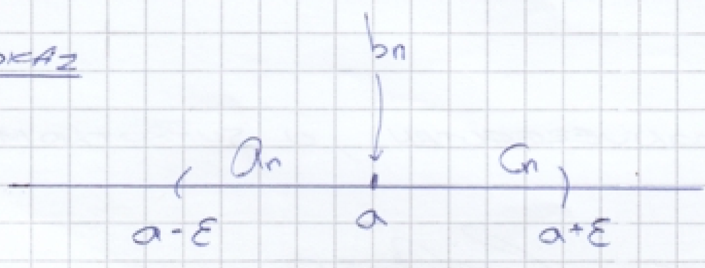
- $a_n \le b_n \le c_n$
- $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} c_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$

TVRDJENJE

$$\exists \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n$$

DOKAZ

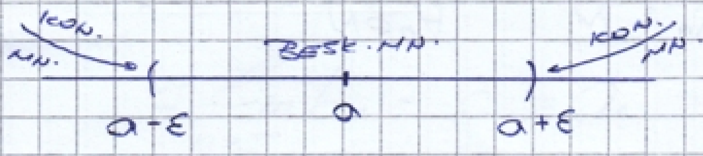


$$\lim_{n\to\infty} b_n = a$$

• IMA BESK. MN. a_n, b_n i c_n

4) KONVERGENTAN NIZ JE OGRANIČEN

$\{X_n\} \rightarrow$ KONVERGENTAN (IMA GRAN. VRED. $\lim_{n\to\infty} X_n = a$)



NIZ JE OGR.
(JER JE U TOM INTERVALU)

KONVERGENTAN NIZ JE OGR. (NE MORA SUPROTNO)

5) VEZA IZMEĐU OGR. I KONV.

- SVAKI KONV. NIZ JE OGR. (NE MORA SUPROTNO)

VEZA IZMEĐU MON. I KONV.

- SVAKI MON. I OGR. NIZ JE KONVERGENTAN.

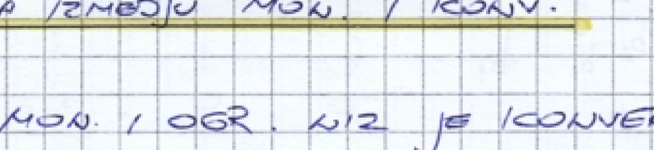
MON. NIZ NE MORA DA BUDE KONV.!

NPR $a_n = n \rightarrow$ MONOTON, NIJE KONV. JER $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

~~MON~~ KONV. NIZ NE MORA DA BUDE MONOTON!

NPR $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \rightarrow$ KONV. I NIJE MONOTON JER

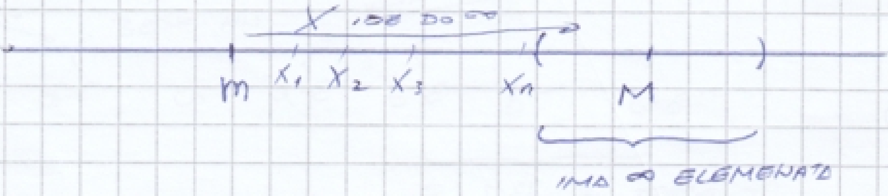
$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$



⑥ DOKAZ DA JE MON. I OGR. NIZ KONV. (DOKAZ)

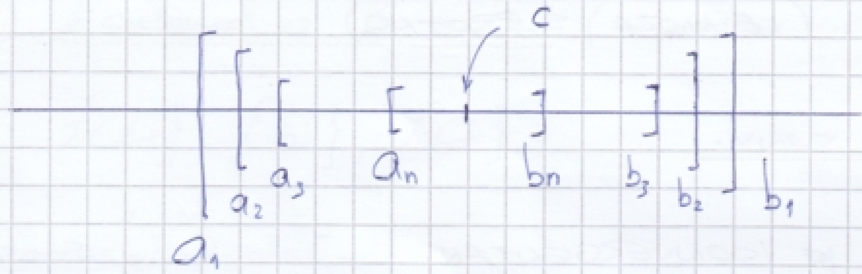
$\{X_n\} \nearrow$ MONOTONO RASTUĆI $\Rightarrow X_n+1 \geq X_n$

$\{X_n\}$ OGRANIČEN $\Rightarrow m \leq X_n \leq M \quad \forall n \in N$



$\Rightarrow$ NIZ JE KONVERGENTAN.

⑦ KANTOROV PRINCIP UMETNUTIH ODSEČAKA (DOKAZ)



PRETP. DAT JE NIZ ODSEČAKA $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \ldots$

$\ldots \supset [a_n, b_n] \ldots$ SADRŽI

DUŽINA ODSEČKA : $d[a_n, b_n] = b_n - a_n \to 0, \quad n \to \infty$

(ODSEČAK JE SVE MANJI I MANJI)

TVRDJENJE $\exists c \in [a_n, b_n]$

DOKAZ $\{a_n\} \nearrow$ MONOTONO RASTUĆI

SA DONJE STR. OGR. SA a_1, A SA GORNJE SA b_n

$\Rightarrow$ POŠTO JE MON. I OGR. NIZ $\{a_n\}$ JE KONV.

$\exists \lim_{n \to \infty} a_n = c \leq b_n$

$\{b_n\} \downarrow$ MONOTONO OPADAJUĆI

SA DONJE STR. OGR. SA a_n, A SA GORNJE SA b_1

→ POŠTO JE MON. I OGR. NIZ $\{b_n\}$ JE KONV.

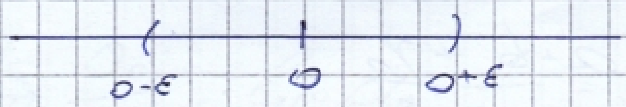
$$\exists \lim_{n\to\infty} b_n = C = a_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = C$$

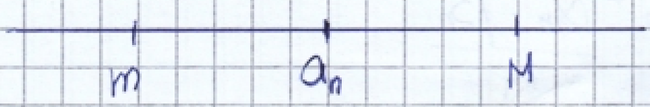
$$C \in [a_n, b_n]$$

(8) DOKAZ DA JE PROIZVOD NULA NIZA I OGR. NIZA NULA NIZ.

NEKA JE $\{X_n\}$ NULA NIZ → $\lim_{n\to\infty} X_n = 0$



NEKA JE $\{a_n\}$ OGR. NIZ



← KONAČAN (NE MOŽE OD -∞ DO ∞
JE IMA GRANICE U m i M)

$a_n \cdot X_n$ = NOVI NIZ (SVI ČLANOVI SU U OKOLINI NULE)

a_n ↓ KONAČAN; X_n ↓ UVEK → 0

③ GRAN. VRED. ZBIRA I PROIZVODA DVA KONV. NIZA (DOKAZ)

1° $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

2° $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

AKO SU NIZOVI $\{a_n\}$ I $\{b_n\}$ KONVERGENTNI TADA SU KONV. ZBIR I PROIZVOD TIH NIZOVA.

$a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \qquad b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

$\rightarrow a_n = a + \underbrace{\alpha_n}_{\text{NULA NIZ}} \qquad \rightarrow b_n = b + \underbrace{\beta_n}_{\text{NULA NIZ}}$

$a_n + b_n = a + b + \alpha_n + \beta_n = a + b + \underbrace{\gamma_n}_{\text{NULA NIZ}}$

$a_n + b_n \rightarrow a + b$ KAD $n \to \infty$

$a_n \cdot b_n = ab + \underline{\alpha_n \cdot b_n} + \underline{\beta_n \cdot a_n} + \underline{\alpha_n \cdot \beta_n}$

$a_n \cdot b_n \rightarrow ab$ KAD $n \to \infty$

NULA NIZOVI

10 GRAN. VRED. KOLIČNIKA DVA KONV. NIZA (DOKAZ)

$\{a_n\}$ KONV. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

$\{b_n\}$ KONV. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$

TADA NIZ $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ KONVERGIRA KA $\frac{1}{b}$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}\right)$

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b_n \cdot b}\right| = \frac{1}{b \cdot b_n} |b - b_n| = \frac{1}{b \cdot b_n} |b_n - b| =$$

$$= \frac{\varepsilon}{b \cdot b_n} = \varepsilon_1$$

$$\boxed{\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| < \varepsilon_1}$$

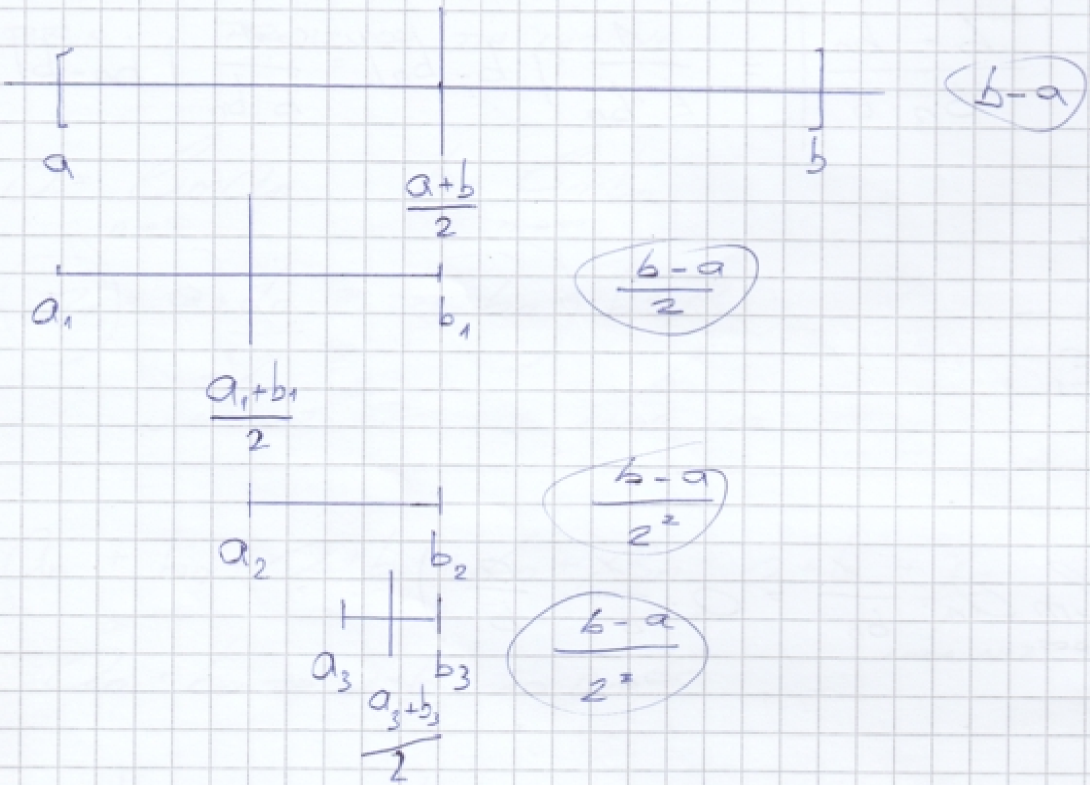
$$\left(\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \frac{1}{b_n} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}\right)$$

(11) BOLCANO - VAJERŠTRASOVA TEOREMA (DOKAZ)

PRETP. $\{X_n\}$ JE BESKONAČAN

$\{X_n\}$ JE OGRANIČEN

SVAKI BESKON. I OGR. NIZ IMA BAR JEDNU TAČKU NAGOMIL.



* KAD PODELIM NA POLA: U JEDNOM DELU MOŽE ∞ DEL. A U DRUGOM KONAČNO ILI U OBA KONAČNO / BES

$$[a,b] \supset [a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset [a_3,b_3] \supset \ldots \supset [a_n,b_n] \supset \ldots$$

DUŽINA ODSEČKA $\dfrac{b-a}{2^n} \to 0$ KAD $n \to \infty$

$b_n - a_n \to 0$ KAD $n \to 0$

IMA ∞ MNOGO ČLANOVA NIZA, TAČKA C PRIPADA SVIM ODSEČCIMA

$\exists C \in [a_n, b_n] \to$ <u>C JE TAČKA NAG. NIZA</u>

12) NIZ KONVERGIRA AKO IMA TAČNO JEDNU T.N. U SKUPU R (DOKAZ

AKO JE a JEDINA TAČKA NAG. NIZA, I NIZ NEMA DRUGIH TAČAKA NAG. ZNAČI DA UNUTAR OKOLINE IMA B.M. ČLANOVA NIZA, A VAN OKOLINE K. M.
(U PROTIVNOM PO BOL.-VAJ. TEOREMI ELEMENTI VAN OKOLINE BI IMALI T.N.)

$\Rightarrow a$ JE GRAN. VRED. NIZA!

13) KOŠIJEV NIZ

NIZ $\{a_n\}$ JE KOŠIJEV (FUNDAMENTALAN) AKO

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \qquad \forall m, n > n_0(\varepsilon) \in N$$

INDEKSI $\qquad n_0$ KOJE ZAVISI OD ε

NPR $\quad a_n = \frac{1}{n}$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{10}, \dots, \frac{1}{101} \dots$$

$$a_3 - a_5 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

$$a_{100} - a_{150} = \frac{1}{100} - \frac{1}{150} = \frac{1}{300}$$

RAZLIKA BILO KOJA DVA ČLANA MOŽE DA SE NAČINI PROIZVOLJ[NO] MALA ČIM SU INDEKSI TIH NIZOVA DOVOLJNO VELIKI

$$|a_{m+p} - a_m| < \varepsilon \qquad \forall m, p > n_0(\varepsilon)$$

$\Rightarrow$ SVAKI KOŠIJEV NIZ JE KONVERGENTAN.

(14) KOŠIJEV NIZ JE OGRANIČEN

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad , \quad \forall n, m > n_0(\varepsilon) \in N$$

SVI ČLANOVI NIZA ČIJI JE INDEKS VEĆI OD n_0 U OKOLINI TAČKE a_n PRIPADAJU TOM INTERVALU. VAN TOG INTERVALA MOŽE BITI SAMO KONAČNO MNOGO ČLANOVA : $a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}$

PREMA TOME, ZA SVE ČLANOVE NIZA VAŽI:

$|a_n| \leq A$ GDE JE $A = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|, |a_{n-\varepsilon}|, |a_{n+\varepsilon}|\}$

(15) KOŠIJEV KRITERIJUM (DOKAZ)

NIZ JE KONVERGENTAN AKKO JE KOŠIJEV.

DOKAZ

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} \quad \text{NIJE KONV.}$$

$a_1 = 1$

$a_2 = 1 + \frac{1}{2}$

$a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$

$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$

$a_{n+p} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p}$

NIZ JE KOŠIJEV (KONV.) : $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$; $\forall n, n+p > n_0(\varepsilon)$

$$a_{n+p} - a_n = \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\text{NAJVEĆI}} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \underbrace{\frac{1}{n+p}}_{\text{NAJMANJI}}$$

$$a_{n+p} - a_n \geq \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p}$$

$$\geq \frac{p}{n+p} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$ POŠTO JE ZA SVAKO $p = n$

$$|a_{n+p} - a_n| \geq \frac{1}{2} \rightarrow \text{NIZ JE DIVERGENTAN}$$

GRAN. VRED. F-JE (BEZ DOKAZA)

① **OKOLINA TAČKE a** $\in R$ JE SVAKI OTVOREN INTERVAL KOJI SADRŽI a I OZNAČAVA SE SA $U(a)$.

PREKO ε:

$x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$

$a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow -\varepsilon < x-a < \varepsilon \Rightarrow |x-a| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$

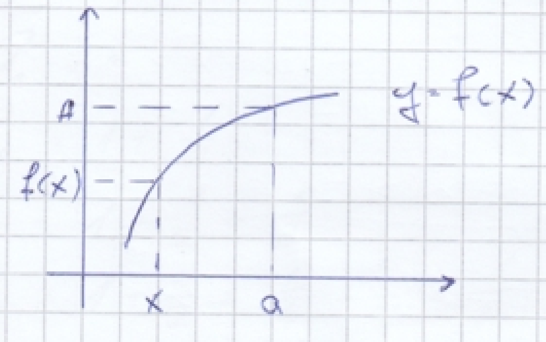
PROBUŠENA OKOLINA TAČKE a JE SKUP $U(a)$ BEZ TAČKE a.

OZNAKA: $\mathring{U}(a)$.

$x: \ x \in (a-\varepsilon, a) \cup (a, a+\varepsilon)$

GRANIČNA VRED. F-JE f U TAČKI a

OZNAKA: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ GRAN. VRED. JE BROJ A KAD $x \to a$



REALAN BR. A JE GRAN. VRED. (LIMES) AKO ZA SVAKU OKOLINU BROJA A POSTOJI PROBUŠENA OKOLINA $\mathring{U}(a)$, TAKVA DA JE $f(\mathring{U}) \subset V$.

PROIZVOLJAN MALI BROJ

A JE TAKAV DA JE $|f(x)-A| < \varepsilon$ ČIM JE $|x-a| < \delta$, $\forall \delta, \varepsilon > 0$

PREKO ε:

$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-A| < \varepsilon$

• KAD TRAŽIM GRAN. VRED. F-JE U TAČKI a, F-JA NE MORA DA BUDE DEF. U TAČKI a

Beskonačno mala f-ja kad $x \to a$

F-ja $f(x)$ je ∞ mala kad $x \to a$ ako je

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0$$

Beskonačno velika f-ja

F-ja $f(x)$ je ∞ velika kada $x \to a$ ako $\forall M > 0$ postoji $\mathcal{U}(a)$ takva da važi

$$x \in \mathring{\mathcal{U}}(a) \Rightarrow |f(x)| > M$$

Jednostrane gr. vred. f-je u tački a

1° F-ja koja je def. u levoj okolini $U(a-)$ tačke a ima levu gr. vr. A ako $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tako da

$$x \in (a - \delta, a) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

2° F-ja koja je def. u desnoj okolini $U(a+)$ tačke a ima desnu gr. vr. B ako $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tako da

$$x \in (a, a + \delta) \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon$$

Gran. vred. f-je u ∞

Kada a nije konačan broj, tj. $a \in (-\infty, \infty)$ ...

Za okoline $U_M(-\infty) = (-\infty, M)$, $U_M(\infty) = (M, \infty)$

a) F-ja koja je def. u okolini tačke $-\infty$ ima u $-\infty$ gran. vred. A ako $\forall$ okolinu V tačke A $\exists$ okolina $U_M(-\infty)$ koja se cela f-jom preslikava u V.

b) F-ja koja je def. u okolni tačke ∞ ima u ∞ gran. vred. B ako $\forall$ okolinu V tačke B $\exists$ okolina $U_M(\infty)$ koja se cela f-jom preslikava u V.

∞ GRAN. VRED. F-JE

1° F-JA U TAČKI $a \in \bar{R}$ IMA GRAN. VRED. $-\infty$ AKO ZA $\forall$ OKOLINU $V(-\infty)$ POSTOJI OKOLINA $U(a)$ TAKVA DA JE $f(\mathring{U}(a)) \subset V(-\infty)$

SPECIJALNO, ZA $V(-\infty) = (-\infty, M)$ I $U(a) = O_\delta(a)$ VAŽI

$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < M$

2° F-JA U TAČKI $a \in \bar{R}$ IMA GRAN. VRED. ∞ AKO $\forall$ OKOLINU $V(\infty)$ $\exists$ OKOLINA $U(a)$ TAKVA DA JE $f(\mathring{U}(a)) \subset V(\infty)$

SPECIJALNO, ZA $V(\infty) = (M, \infty)$ I $U(a) = O_\delta(a)$ VAŽI

$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > M$

(2) DOKAZ DA JE GRAN. VRED. F-JE JEDINSTVENA

PRETPOSTAVIMO DA POSTOJE DVE GR. VRED. A I B.

AKO SU V_A I V_B DISJUNKTNE OKOLINE ZA A I B TADA NE $\exists$ OKOLINA $U(a)$ KOJA SE F-JOM PRESLIKAVA I U V_A I U V_B. PA NE MOGU POSTOJATI DVE RAZLIČITE GRAN. VRED. U ISTOJ TAČKI.

(3) TEOREME O GRAN. VRED. ZBIRA, PROIZV. I KOLIČNIKA 2 F-JE

1) NEKA JE A GRAN. VRED. F-JE $f(x)$ KAD $x \to a$

NEKA JE B GRAN. VRED. F-JE $g(x)$ KAD $x \to a$

TADA VAŽI: a) $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = A + B$

b) $\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = A \cdot B$

2) NEKA JE A GRAN. VRED. F-JE $f(x)$ KAD $x \to a$

NEKA JE B GRAN. VRED. F-JE $g(x)$ KAD $x \to a$, $B \neq 0$

TADA VAŽI: a) F-JA $\frac{1}{g(x)} \to \frac{1}{B}$, KAD $x \to a$

b) F-JA $\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{A}{B}$, KAD $x \to a$

UPOREDJIVANJE ∞ MALIH F-JA (BEZ DOKAZA)

① BESK. MALA F-JA ✓

EKVIVALENTNE ∞ MALE F-JE KAD $x \to a$

NEKA SU $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ ∞ MALE F-JE KAD $x \to a \in R$

AKO $\boxed{\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1}$, TADA SU $\alpha(x)$ i $\beta(x)$

EKVIVALENTNE ∞ MALE F-JE KAD $x \to a$ U OZNACI:

$\alpha(x) \sim \beta(x)$, $x \to a$

- KAŽE SE DA SE $\alpha(x)$ ASIMPTOTSKI PONAŠA KAO $\beta(x)$, KAD $x \to a$

NEUPOREDIVE ∞ MALE F-JE KAD $x \to a$

∞ MALE F-JE $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ SU NEUPOREDIVE KADA $x \to a$ AKO NE $\exists$ $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$

NPR: $\alpha(x) = \frac{\sin x}{x}$, $\beta(x) = \frac{1}{x}$ SU NEUPOR. KAD $x \to \infty$

② AKO JE $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $x \to a$

$\beta(x) \sim \beta_1(x)$, $x \to a$ i

AKO $\exists$ $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ TADA JE $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$

OVA TEOREMA DOZVOLJAVA DA PRI IZRAČUNAVANJU GR. VRED. KOLIČNIKA ZAMENIMO ∞ MALE F-JE.

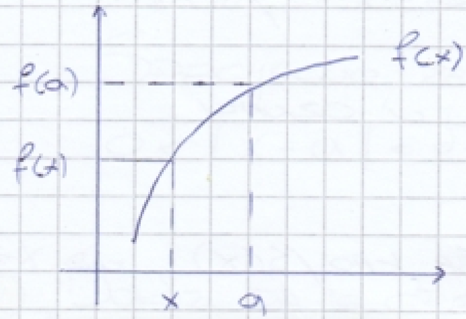
TEOREMA O ZAMENI BESK. MALIH F-JA PRI RAČUNANJU GRAN. VRED. KOLIČNIKA

NEPREKIDNOST F-JA (BEZ DOKAZA)

1 NEPREKIDNOST F-JE U TAČKI

F-JA JE NEPREKIDNA U TAČKI $a \in D$ AKO $\forall$ OKOLINU V TAČKE $f(a)$ $\exists$ OKOLINA U TAČKE a, TAKVA DA JE $f(U) \subset V$, TJ.

$$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$



$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

NEPREKIDNOST F-JE NA SKUPU

F-JA JE NEPREKIDNA NA SKUPU $A \subset D$ AKO JE NEPREKIDNA U SVAKOJ TAČKI TOG SKUPA.

RAVNOMERNA NEPREKIDNOST F-JE

F-JA JE RAVNOMERNO NEPREKIDNA NA $D \subset R$ AKO $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ TAKVO DA $\forall x, y \in D$ VAŽI:

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

ELEMENTARNE F-JE

EL. F-JA JE SVAKA F-JA KOJA SE DOBIJA KONAČNOM PRIMENOM ARITMETIČKIH OPERACIJA I KOMPOZICIJA NAD OSNOVNIM ELEM. F-JAMA.

- OSNOVNE EL. F-JE: KONSTANTA, STEPENA F-JA, EKSPONENC. F-JA, LOGARITAMSKA F-JA, TRIGONOMET. F-JA, INVERZNA TRIGON. F-JA.
- ELEM. F-JE: POLINOM $\rightarrow P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$

  RACIONALNA F-JA $\rightarrow \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ← POLINOMI

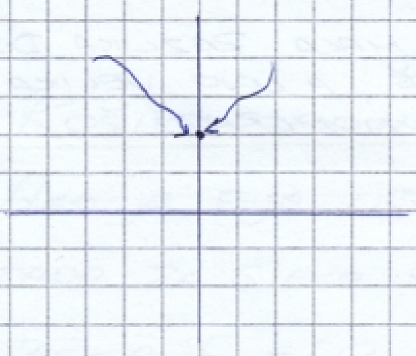
  HIPERBOLIČKE F-JE, ITD

PREKID I VRSTE

Ako je a tačka prekida f-je, ako u toj tački postoje jednostrane gran. vred., tada je a tačka prekida prve vrste.

OTKLONJIV

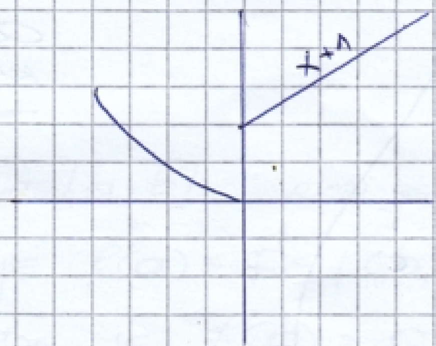
NPR. $f(x)\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & ; x \neq 0 \\ A & ; x = 0 \end{cases}$



$\lim\limits_{x \to 0^{\pm}} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow$ kad je $A=1$ f-ja je neprek.

NEOTKLONJIV

NPR. $f(x)\begin{cases} x+1 & , x \geq 0 \\ x^2 & , x < 0 \end{cases}$



$\lim\limits_{x \to 0^{\pm}} x^2 = 0$

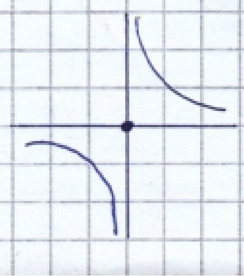
Prekid je otklonjiv ako u toj tački postoji gran. vred.

PREKID II VRSTE

Ako za f-ju tačka prekida nije prve vrste, onda je prekid druge vrste.

Za prekid druge vrste bar jedna od gran. vrednosti ne postoji ili je beskonačna.

NPR. $f(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow D: x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$



$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = \infty \quad , \quad \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$

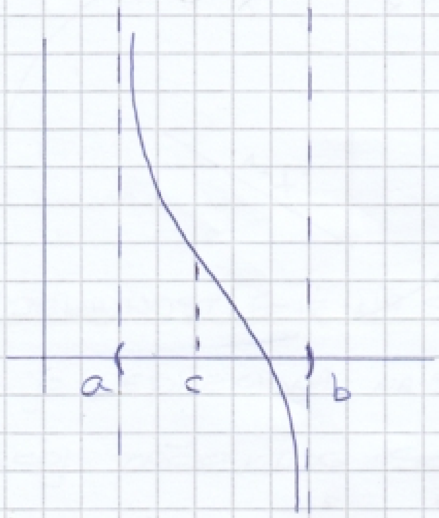
② Teorema o neprekidnosti el. f-ja.

Sve el. f-je su neprekidne u oblasti def.

Kantova teorema za nepr. f-je

Ako je f-ja neprekidna na zatvorenom odsečku $[a, b]$, tada je i ravnomerno neprekidna na $[a, b]$.

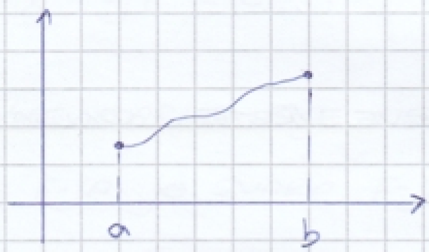
Ako je na otvorenom intervalu ne mora da bude ravnomerna.



a i c su mala razlika dole kad pogledaš, a levo velika
⇒ nije ravnomerno!

I Vajerštrasova teorema

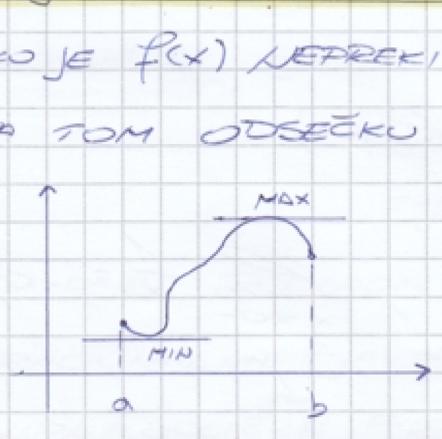
Ako je $f(x)$ neprekidna f-ja na odsečku $[a, b]$, tada ona je i ograničena na $[a, b]$



ograničena

II Vajerštrasova teorema

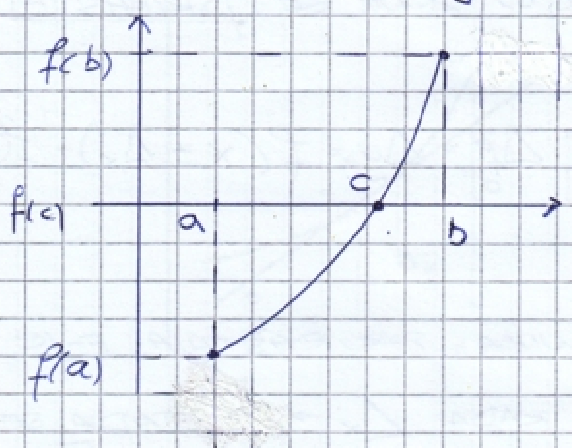
Ako je $f(x)$ neprekidna f-ja na odsečku $[a, b]$, tada ona na tom odsečku dostiže najmanju i najveću vred.



max, min

I Košibolcanova teorema

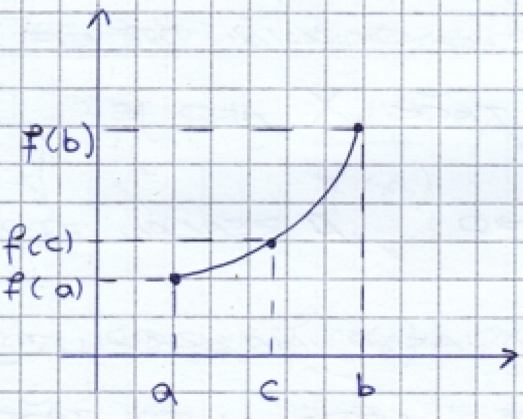
Ako je f-ja neprekidna na $[a,b]$, ako su $f(a)$ i $f(b)$ različitog znaka tada u intervalu (a,b) $\exists$ bar jedna tačka C za koju je $f(c)=0$.



ima nulu / nule

II Košibolcanova teorema

Ako je f-ja neprekidna na $[a,b]$ i ako je $f(a)<f(b)$ tada za svako C za koje je $f(a)<C<f(b)$ $\exists$ bar jedna tačka $c\in(a,b)$ takva da je $f(c)=C$.



Medjuvrednost
(postoji jedna/više tačaka između)