IZVOD F-JE (BEZ DOKAZA)

1 IZVOD F-JE

NEKA JE F-JA DEF. NA INTERVALU (a,b). ZA $x \in (a,b)$ BROJ $\Delta x \neq 0$, TAKAV DA JE $x + \Delta x \in (a,b)$, ZOVE SE PRIRAŠTAJ NEZAV. PROM.

ZA DATI PRIRAŠTAJ Δx VELIČINA $\Delta f = \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ JE PRIRAŠTAJ ZAV. PROM.

AKO POSTOJI GRAN. VRED. KOLIČNIKA PRIRAŠTAJA F-JE U TAČKI X I PRIRAŠTAJA Δx KADA $\Delta x \to 0$ TADA SE TA GRAN. VRED. NAZIVA IZVOD F-JE (OZNAKA $f'(x)$)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

DIFERENCIJABILNOST F-JE

NEKA JE F-JA $y = f(x)$ DEFINISANA U OKOLINI TAČKE X.
F-JA f JE DIFERENCIJABILNA U TAČKI X AKO JE:

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x), \quad \Delta x \to 0, \quad A \text{ REALAN BROJ}$$

- F-JA JE DIFERENCIJABILNA U TAČKI X AKO IMA IZVOD U TOJ •
- AKO JE F-JA DIF. U TAČKI X ONDA JE I NEPR. U TOJ TAČKI.

DIFERENCIJAL F-JE

AKO JE F-JA $y = f(x) \to R$ DIFERENCIJABILNA U TAČKI $x \in (a,b)$, TADA:

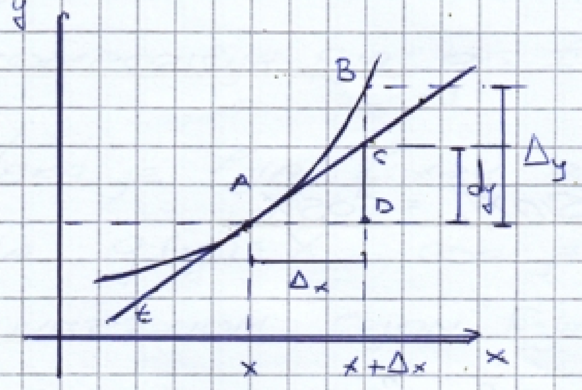
$$\Delta y = A\Delta x + \alpha\Delta x = \underbrace{f'(x)\Delta x}_{\text{LIN. DEO}} + \underbrace{\alpha\Delta x}_{\infty \text{ MALA F-JA}}$$

LINEARNI DEO PRIRAŠTAJA F-JE f U TAČKI X NAZIVA SE DIFERENCIJAL F-JE f U TAČKI X, OBELEŽAVA SE SA dy.

$$dy = f'(x)dx$$ → DIF. NEZAV. PROM. JEDNAK JE NJENOM PRIRAŠTAJU.

2 GEOM. TUMAČENJE IZVODA I DIF. I JED. TANGENTE I NORMALE KRIVE

DIFERENCIJAL PREDSTAVLJA PRIRAŠTAJ ORDINATE TANGENTE NA KRIVU $y = f(x)$ U TAČKI A KOJI ODGOVARA PRIRAŠTAJU Δx.



JED. TANGENTE KRIVE

t

$$\underbrace{y - y_0}_{d_y} = f'(x_0) \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{d_x} \quad , \quad A(x_0, y_0)$$

JEDNAČINA NORMALE KRIVE

NORM.

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad , \quad A(x_0, y_0)$$

KAD JE $f'(x_0) \neq 0$

- A KAD JE $f'(x_0) = 0$ ⤵

$y = f(x)$ JE TANGENTA, A PRAVA $x = x_0$ JE NORMALA KRIVE $y = f(x)$ U TAČKI A.

$\boxed{\text{IZVODI ELEMENTARNIH F-JA}}$ (BEZ DOKAZA)

1. OSNOVNE EL. F-JE ✓
   ELEMENTARNE F-JE ✓
   IZVOD F-JE U TAČKI ✓

2. **DOKAZ ZA $(x^n)' = nx^{n-1}$; $(\sin x)' = \cos x$**

$\underline{f(x) = x^n}$, $n \in N$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} (\Delta x)^k =$$

$$= nx^{n-1}$$

$\underline{f(x) = \sin x}$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \cos x$$

=

IZVOD SLOŽENE I INVERZNE F-JE (BEZ DOKAZA)

(1) NEKA SU DATE F-JE $f: X \to Y$ I $g: Y \to Z$.
F-JA $h: X \to Z$ DEF. SA $h(x) = g(f(x))$ ZOVE SE
KOMPOZICIJA F-JA g I f I OZNAČAVA SE SA $g \circ f$.

NEKA JE F-JA $f: X \to Y$ BIJEKCIJA. F-JA $g: Y \to X$ DEF.
ZA $g(y) = x$, GDE JE $y = f(x)$ ZOVEMO
INVERZNOM F-JOM F-JE f I OZNAČAVAMO SA f^{-1}.

GRAN. VRED. F-JE ✓

IZVOD F-JE ✓

(2) TEOREMA O IZVODU SLOŽENE I INV. F-JE

IZVOD SLOŽENE

NEKA F-JA $y = f(x)$ IMA IZVOD U TAČKI x, I NEKA F-JA $z = g(x)$ IMA IZVOD U TAČKI y. TADA F-JA $g \circ f$ IMA IZVOD U x, PRI ČEMU

$$(g \circ f)'(x) = g'(y) \cdot f'(x)$$

IZVOD INVERZNE

NEKA JE F-JA f NEPREKIDNA STROGO MONOTONA F-JA U OKOLINI TAČKE x, I NEKA JE $f'(x) \neq 0$. AKO JE g INV. F-JA F-JE f I AKO JE $y = f(x)$, TADA JE

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

IZVODI I DIFERENCIJALI VIŠEG REDA

1 DIFERENCIJABILNA F-JA

IZVOD VIŠEG REDA

AKO JE F-JA f DIFERENCIJABILNA NA INTERVALU (a, b) ONDA JE NJEN IZVOD F-JA NEZAV. PROM. X NA TOM ISTOM INTERVALU.

TA F-JA MOŽE BITI TAKODJE DIFERENCIJABILNA U NEKOJ TAČKI $X \in (a, b)$. U TOM SLUČAJU NJEN IZVOD ZOVEMO IZVODOM DRUGOG REDA F-JE f U TAČKI X

U TOM SMISLU MOŽEMO DEF. I IZVODE VIŠEG REDA.

IZVOD REDA n F-JE f U TAČKI X (AKO POSTOJI) JE IZVOD OD IZVODA REDA $n-1$ F-JE f U TAČKI X.

$$f^{n}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$$

DIFERENCIJAL dy F-JE $f: X \to y$ ZOVEMO I DIF. I REDA.

DIFERENCIJAL DRUGOG REDA JE DIF. (AKO POSTOJI) DIF. PRVOG REDA.

$$d^2y = d(dy)$$

DIF. n-TOG REDA: $d^ny = d(d^{n-1}y)$

2 TEOREMA O SVOJSTVIMA DIFERENCIJALA

AKO SU F-JE U ; V DIF. U TAČKI X TADA JE:

1) $d(u(x) \pm v(x)) = du(x) \pm dv(x)$

DOKAZ:

$$d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv$$

2) $d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv$

DOKAZ:

$$d(u \cdot v) = (u \cdot v)'dx = (u'v + uv')dx = u'vdx + uv'dx = duv + udv$$

3) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{duv - u \cdot dv}{v^2}$

DOKAZ

$$d\left(\frac{u}{v}\right)'dx = \frac{u'v - uv'}{v^2} \cdot dx = \frac{u'dx\,v - u \cdot v'dx}{v^2} = \frac{duv - udv}{v^2}$$

ROLOVA TEOREMA (BEZ DOKAZA)

1 ✓ GRAN. VRED, NEPR., IZVOD

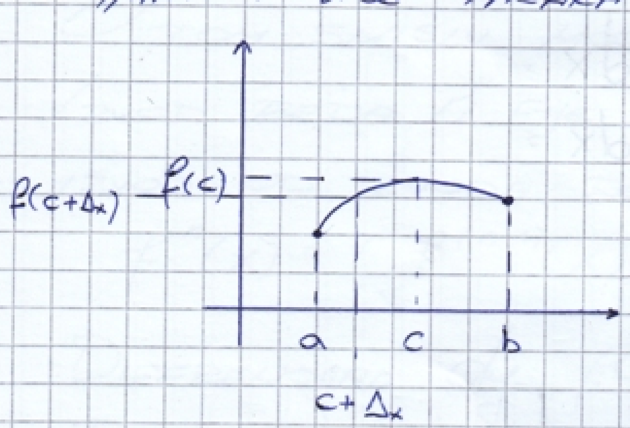
2 1° $f(x)$ NEPREKIDNA NA $[a, b]$

2° $f(x)$ DIFERENCIJABILNA NA (a, b)

3° $f(a) = f(b)$

AKO JE SVE OVO ISPUNJENO TADA $\exists$ TAČKA $C \in (a,b)$, TAKVA DA JE $f'(c) = 0$

* F-JA KOJA ISPUNJAVA USLOVE ROLOVE TEOREME MOŽE IMATI I VIŠE TAČAKA U KOJIMA JE IZVOD $= 0$.



SVAKA PRETPOSTAVKA JE BITNA JER NPR. F-JE:

$f(x) = x$, $g(x) = |x|$, $h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (-1, 1] \\ 1, & x = -1 \end{cases}$

GDE $f, g, h : [-1, 1] \to R$. ZA NJIH NE VAŽI ROLOVA TEOREMA.

JER:

1) $f(x) = x \to$ NEMA JEDNAKE VRED. NA KRAJEVIMA ODSEČKA $[-1, 1]$

$f(-1) = -1$, $f(1) = 1$

2) $g(x) = |x| \to$ NIJE DIFERENCIJABILNA NA $(-1, 1)$, TJ. U NULI

3) $h(x) \to$ NIJE NEPREKIDNA NA $[-1, 1]$

LAGRANŽOVA TEOREMA (SA DOKAZOM U DRUGOM PITANJU)

1. DVE TEOREME O SREDNJIM VRED. DIF. F-JE

- ROLOVA
- LAGRANŽOVA (SPECIJALAN SLUČAJ KOŠIJEVE)

1° $f(x)$ NEPREKIDNA NA $[a,b]$

2° $f(x)$ DIFERENCIJABILNA NA (a,b)

AKO JE SVE OVO ISPUNJENO TADA $\exists$ TAČKA $c \in (a,b)$ TAKVA DA JE $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

2.

DOKAZ: FORMIRAM NOVU F-JU...

$$\Phi(x)=f(x)-f(a)-\underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{f'(c)}(x-a)$$

1° NEPR. ✓

2° DIF. ✓

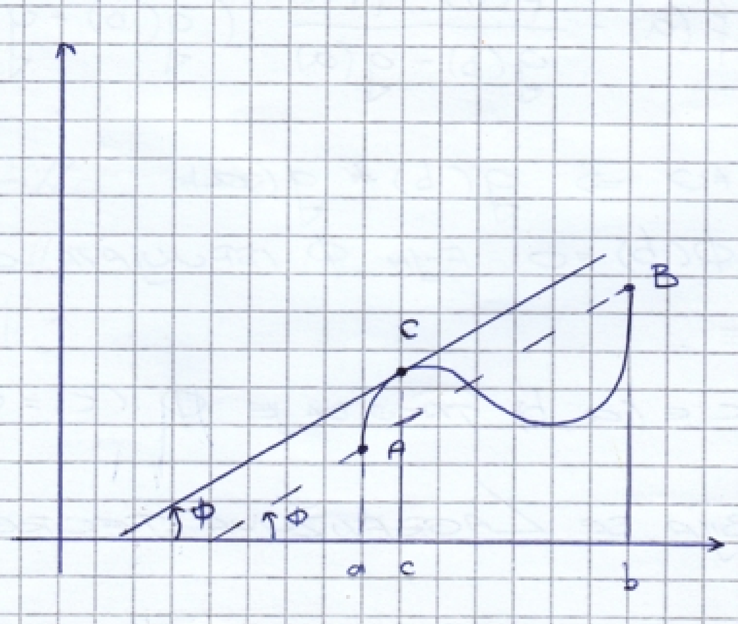
3° $\Phi(a)=f(a)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)=0$

$\Phi(b)=f(b)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=0$

$\Phi(a)=\Phi(b)$

$\Rightarrow$ $\Phi(x)$ ZADOVOLJAVA USLOVE ROLOVE TEOREME.

PREMA TOME, POSTOJI $c \in (a,b)$ TAKO DA JE $\Phi'(c)=0$



KOŠIJEVA TEOREMA (SA DOKAZOM U DRUGOM PITANJU)

(1) LAGRANŽOVA TEOREMA ✓

KOŠIJEVA TEOREMA

1° $f(x)$; $g(x)$ NEPREKIDNE NA $[a,b]$

2° $f(x)$; $g(x)$ DIFERENCIJALNE NA (a,b)

3° $g'(x) \neq 0$

AKO JE SVE OVO ISPUNJENO TADA $\exists$ TAČKA $c \in (a,b)$, TAKVA DA JE

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

• LAGRANŽOVA JESTE SPECIJALNI SLUČAJ KOŠIJEVE!

(2) DOKAZ :

$$\phi(x) = f(x) - f(a) - \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}}_{\lambda} \cdot (g(x) - g(a))$$

1° $\phi(x)$ NEPR. ✓

2° $\phi(x)$ DIFER. ✓

3° $\phi(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot (g(a) - g(a)) = 0$

$\phi(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot (g(b) - g(a)) = 0$

IZ USLOVA $g'(x) \neq 0 \Rightarrow g(b) \neq g(a)$

KAKO JE $\phi(a) = \phi(b) = 0$ F-JA ϕ ISPUNJAVA USLOVE ROLOVE TEOREME.

PREMA TOME $\exists c \in (a,b)$ TAKO DA JE $\phi'(c) = 0$.

ZA $g(x) = x$ DOBIJA SE LAGRANŽOVA TEOREMA.

LOPITALOVA TEOREMA (BEZ DOKAZA)

1. GRAN. VRED. ✓

IZVOD ✓

VRSTE NEODREDJENOSTI OBLIKA $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0 SE ALGEBARSKIM OPERACIJAMA ILI LOGARITMOVANJEM SVODE NA OBLIK $\frac{0}{0}$ ILI $\frac{\infty}{\infty}$.

2. LOPITALOVA PRAVILA ZA $\frac{0}{0}$ I $\frac{\infty}{\infty}$

$\boxed{\frac{0}{0}}$

NEKA SU F-JE f I g DIFERENCIJABILNE U PROBUŠENOJ OKOLINI $\mathring{U}(a)$ TAČKE a I NEKA JE:

a) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$

b) $g'(x) \neq 0$ ZA $x \in \mathring{U}(a)$

c) POSTOJI $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, TADA JE

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$

–||–

a) –||– $=\infty$

b) –||–

c) –||–

–||–

TEJLOR (BEZ DOKAZA)

1 TEJLOROV POLINOM

ZA APROKSIMACIJU DATE F-JE U OKOLINI TAČKE a NAJČEŠĆE SE KORISTI POLINOM P_n. AKO TAJ POLINOM ZADOVOLJAVA $P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$, $k = 0, 1, \dots, n$, ON SE NAZIVA TEJLOROVIM POLINOMOM.

NEKA JE F-JA f DIFERENCIJABILNA U OKOLINI U TAČKE a. PREMA LAGRANŽOVOJ TEOREMI, ZA $x \in U$ POSTOJI TAČKA c IZMEDJU x I a TAKVA DA JE $f(x) = f(a) + f'(c)(x-a)$.

AKO F-JU f U OKOLINI TAČKE a APROKSIMIRAMO POLINOMOM $P_0(x) = f(a)$, TADA POLINOM I F-JA IMAJU ISTU VREDNOST U TAČKI a.

GREŠKA APROKSIMACIJE

IZ OVOGA SLEDI $\Rightarrow$ $R_0(x) = f(x) - f(a) =$

$= f'(c)(x-a)$

AKO F-JU f APROKSIMIRAMO POLINOMOM P_n DEF. SA $P_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n$,

BIĆE $\Rightarrow$ $\underline{f(x) = P_n(x) + R_n(x)}$

TEJLOROVA FORMULA

$$\underline{P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{n}(a)}{n!}(x-a)^n}$$

TEJLOROV POLINOM

2 Lagranžov oblik ostatka

Neka f-ja f u okolini U tačke a ima izvod reda $n+1$ i neka je

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \quad x \in U$$

Tejlorova formula.

Onda postoji tačka c između a i x takva da je

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Peanov oblik ostatka

Ako f-ja f : ① u okolini U tačke a ima izvod reda $n+1$

② u tački a ima izvod reda n

Tada važi:

$$R_n(x) = o\left((x-a)^n\right), \quad x \to a$$

MAKLOREN (SA DOKAZIMA)

1. TEJLOROV POLINOM ✓

2. MAKLORENOV POLINOM

TEJLOROVA FORMULA ZA $a=0$ SE ZOVE MAKLOR. FORMULA.

$$f(x) = \underbrace{f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n}_{P_n(x) \to \text{MAKL. POLINOM}} + R_n(x)$$

OSTATAK U LAGR. OBLIKU

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$0 < \theta < 1$

3. $f(x) = e^x$ $\qquad f(0) = e^0 = 1$

$f'(x) = e^x \qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = e^x \qquad f''(0) = 1$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$f^n(x) = e^x \qquad f^n(0) = 1$

$$P_n(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n$$

$$\boxed{e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}}$$

$f(x) = \sin x \qquad f(0) = \sin 0 = 0$

$S \to C$

$C \to - S$

$f'(x) = \cos x \qquad f'(0) = \cos 0 = 1$

$f''(x) = -\sin x \qquad f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x \qquad f'''(0) = -1$

$\vdots$

$f^{IV}(x) = \sin x$

$f^{V}(x) = \cos x$

$f^{VI}(x) = -\sin x$

$f^{VII}(x) = -\cos x$

$f^{VIII}(x) = \sin x$

$$P_n(x) = 1 \cdot \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\boxed{\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}}$$

$f(x) = \ln \cancel{x} (1+x) \qquad f(0) = \ln 1 = 0$

$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = -(1+x)^{-2} \qquad f''(0) = -1$

$f'''(x) = -1(-2)(1+x)^{-3} = 2(1+x)^{-3} \qquad f'''(0) = 2!$

$f^{IV}(x) = -1 \cdot 2 \cdot 3(1+x)^{-4} = -6(1+x)^{-4} \qquad f^{IV}(0) = -3!$

$f^{V}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (1+x)^{-5} = 24(1+x)^{-5} \qquad f^{V}(0) = 4!$

$$P_n(x) = 1 \cdot x - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{2!}{3!} x^3 - \frac{3!}{4!} x^4 + \frac{4!}{5!} x^5 - \dots$$

$$\boxed{\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}}$$

$f(x) = \cos x \qquad f(0) = 1$

$f'(x) = -\sin x \qquad f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos x \qquad f''(0) = -1$

$f'''(x) = \sin x \qquad f'''(0) = 0$

$f^{IV}(x) = \cos x \qquad f^{IV}(0) = 1$

$f^{V}(x) = -\sin x \qquad f^{V}(0) = 0$

$$P_n(x) = 1 + \frac{0}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4$$

$$\boxed{\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots - (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}}$$

$f(x) = (1+x)^\alpha \qquad f(0) = 1$

$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \qquad f'(0) = \alpha$

$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \qquad f''(0) = \alpha(\alpha-1)$

$f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3} \qquad f'''(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$

$$P_n = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3\cdot 2\cdot 1}x^3 + \dots$$

$$\boxed{(1+x)^\alpha \approx 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n}$$

LOKALNI EKSTR. F-JE (SA DOKAZA)

1 F-JA $f: A \to R$ JE NA INTERVALU $(a,b) \subset A$

1) RASTUĆA $\overset{\text{AKO}}{\Rightarrow}$ $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

2) OPADAJUĆA $\to$ $x_1 \geq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

3) STROGO RASTUĆA $\to$ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

4) STROGO OPADAJUĆA $\to$ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

ZA SVAKO $x_1, x_2 \in (a,b)$

F-JA f JE MONOTONA AKO VAŽI NEKI OD USLOVA 1) - 4)

2 DOVOLJNI USLOVI ZA MONOTONOST F-JE

NEKA JE F-JA $f: A \to R$ DIFERENCIJABILNA NA INTERVALU $(a,b) \subset A$

1) AKO JE $f'(x) \geq 0$ ZA $x \in (a,b)$ F-JA f JE RASTUĆA NA (a,b)

2) AKO JE $f'(x) \leq 0$ -11- JE OPADAJUĆA NA (a,b)

3) AKO JE $f'(x) > 0$ -11- JE STR. RAS. NA (a,b)

4) AKO JE $f'(x) < 0$ -11- JE STR. OPAD. NA (a,b)

DOKAZ ZA $x_1, x_2 \in (a,b)$; $x_1 < x_2$, NA OSNOVU LAGRA-NŽOVE TEOREME IMAMO DA JE

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \quad c \in (x_1, x_2)$$

/2 1) SLEDI DA JE $f'(c) \geq 0$, PA JE $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$,

TJ. $f(x_2) \geq f(x_1)$

SLIČNO SE DOKAZUJU I DRUGI SLUČAJEVI...

POTREBNI USLOVI ZA MONOTONOST F-JE

NEKA JE F-JA f DIFERENCIJABILNA NA INTERVALU (a,b)

1) AKO JE F-JA f RASTUĆA NA (a,b) TADA JE $f'(x) \geq 0$

2) AKO JE F-JA f OPADAJUĆA NA (a,b) TADA JE $f'(x) \leq 0$

DOKAZ 1) KAKO JE F-JA f RASTUĆA, TO JE ZA $x+\Delta x \in (a,b)$,

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0 \quad \text{PA JE}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0$$

SLIČNO SE DOKAZUJE I ZA 2) ...

NEOPHODAN I DOVOLJAN USLOV ZA LOKALNI EKSTREMUM (SA DOKAZI

① LOKALNI EKSTREMUM

- F-JA JE DEF. U OKOLINI TAČKE C. AKO POSTOJI OKOLINA U TAČKE C ZA KOJU JE $f(x) < f(c)$, ZA SVAKO $x \in U \setminus \{c\}$ F-JA f U TAČKI C IMA STROGI LOKALNI MAKSIMUM.
- AKO JE $f(x) > f(c)$, ZA SVAKO $x \in U \setminus \{c\}$, F-JA f U TAČKI C IMA STROGI LOKALNI MINIMUM.

→ STROGI LOKALNI MAX I STROGI LOKALNI MIN SU STROGI LOKALNI EKSTREMUMI F-JE f.

MONOTONA F-JA, DIFERENCIJABILNA F-JA ✓

② FERMAOVA TEOREMA

DATA JE F-JA $f:(a,b) \to R$, I $x_0 \in (a,b)$ JE PRETPOSTAVIM NJEN LOKALNI EKSTREMUM. AKO JE F-JA f DIFEREN. U x_0 ONDA JE $f'(x_0) = 0$.

③ DOVOLJAN USLOV (PREKO I IZVODA)

NEKA JE f NEPREKIDNA U NEKOJ OKOLINI U TAČKE C I DIFERENCIJABILNA U $U \setminus \{c\}$

1) AKO ZA $x \in U$ VAŽI $f'(x) < 0$ ZA $x < C$ I $f'(x) > 0$ ZA $x > C$ ONDA F-JA U C IMA STR. LOK. MIN.

2) —//— $f'(x) > 0$ —//—
—//— IMA STR. LOK. MAX.

DOKAZ 1) $1/2$ DOVOLJNOG USLOVA ZA MONOTONOST SLEDI DA f OPADA ZA $x < C$, RASTE ZA $x < C$.

(ISTO SE DOKAZUJE 2))

→ U TAČKI C SU ISPUNJENI USLOVI IZ DEF. STR. LOK. MI

DOVOLJAN USLOV (PREKO II IZVODA)

NEKA JE $X = C$ STACIONARNA TAČKA F-JE f KOJA IMA NEPR. PRVI IZVOD U NEKOJ OKOLINI TAČKE C I NEKA POSTOJI DRUGI IZVOD.

1) AKO JE $f''(c) > 0$, TADA F-JA f U C IMA STR. LOK. MIN.

2) AKO JE $f''(c) < 0$, —//— STR. LOK. MAX.

DOKAZ PRIMENOM TEJLOROVE FORMULE IMAMO DA JE

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2 + \underline{\sigma((x-c)^2)}, \quad x \to c$$

AKO JE

$$\sigma((x-c)^2) = \frac{\alpha(x)}{2}(x-c)^2, \quad \alpha(x) \to 0 \text{ KAD } x \to c$$

TADA JE

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{(x-c)^2}{2}\left(f''(c) + \alpha(x)\right)$$

1) POSTOJI OKOLINA TAČKE C U KOJOJ JE $f''(c) + \alpha(x) > 0$. KAKO JE $f'(c) = 0$ TO JE $f(x) > f(c)$, PA JE $X = C$ STR. LOK. MIN.

2) —//— $f''(c) + \alpha(x) < 0$

—//— $f(x) < f(c)$ —//—

STR. LOK. MAX.

KONVEKSNOST F-JE (BEZ DOKAZA)

① IZVOD VIŠEG REDA, DIF. F-JA, DIF. VIŠEG REDA ✓

F-JA JE:

a) KONVEKSNA NA (a,b) AKO $f(x) \geq y_c(x)$:)

b) KONKAVNA NA (a,b) AKO $f(x) \leq y_c(x)$:(

TAČKA $P(a, f(a))$ JE TAČKA PREVOJA KRIVE $y = f(x)$ AK[O] POSTOJI OKOLINA TAČKE a U KOJOJ JE F-JA STROGO KONVEKSNA ZA $x < a$; STROGO KONKAVNA ZA $x > a$ ILI OBRATNO (STR. KONK. ZA $x < a$; STR. KONV. ZA $x > a$

② TEOREME O DOVOLJNIM USLOVIMA ZA KONV. / KONK.

T1) DVA PUTA DIF. F-JA f JE STROGO KONV. NA (a,b) AKO JE $f''(x) > 0$ ZA SVAKO $x \in (a,b)$, A KONV. AKO JE $f''(x) \geq 0$ ZA SVAKO $x \in (a,b)$

T2) DVA PUTA DIF. F-JA f JE NA (a,b) KONV. AKO JE F-JA f' RASTUĆA NA (a,b)

T3) AKO JE $f''(c) > 0$; AKO JE f'' NEPREK. F-JA U TAČKI C TADA POSTOJI OKOLINA TAČKE C U KOJOJ JE F-JA f STROGO KONVEKSNA.

T4) NEKA JE F-JA f DVA PUTA DIF. NA (a,b)

1) F-JA f JE STR. KONK. AKO JE $f''(x) < 0$ ZA $x \in (a,b)$
2) F-JA f JE KONK. AKO JE $f''(x) \leq 0$ ZA $x \in (a,b)$
3) F-JA f JE KONK. AKO JE f' OPADAJUĆA F-JA NA (a,b)
4) AKO JE $f''(c) < 0$, AKO JE f'' NEPREKIDNA F-JA U TAČKI C TADA POSTOJI OKOLINA TAČKE C U KOJOJ JE F-JA f KONKAVNA.