BY
TheIgorfather

Matematika 1

PRVI DEO

SRECNO!

Ovo je skripta za manje ocene. Nema dokaze.

Ima samo najosnovnije, tako da ako profesor

pita znas li bar neki dokaz ti kazes znam "ovaj"!

Predlozi autora skripte

- izadji u svakom roku - probaj! nista ne gubis
  sto vise puta izadjes - veca sansa da ces poloziti
- da bi zavrsio fakultet moras poloziti ovo, kad tad.
  zasto ne sad?
- nikada ne vracaj pitanja. nikad! mozes nesto usmeno da
  izvuces
- nije toliko tesko koliko izgleda
- samo ponavljaj jedno te isto, 100 puta ako treba
- iako je neuredno napisano, to je to. to dolazi
  prepisi kod sebe ako ti ne valja

A_L. STRUKTURE SA JEDNOM BIN. OP. (SVE)

① **BINARNA OPERACIJA** U SKUPU S JE PRESLIKAVANJE $S \to S$, GDE JE S NEPRAZAN SKUP.
BINARNOM OPERACIJOM SE SVAKOM UREDJENOM PARU EL. a i b IZ SKUPA S DODELJUJE JEDAN EL. c IZ SKUPA S

$$a * b = c$$

GRUPOID JE UREDJEN PAR $(S, *)$ GDE JE $*$ BIN. OP. U SKUPU S. ZA GRUPOID $(S, *)$ SKUP S SE NAZIVA DOMEN.
POLUGRUPA JE GRUPOID SA ASOCIJATIVNOM BIN. OP.
NEUTRALNI ELEMENT JE $e \in S$ AKO ZA SVAKO $a \in S$ VAŽI:

$$a * e = e * a = a$$

NEUTRALNI EL. JE KOMUTATIVAN SA SVAKIM EL. GRUPOIDA.
INVERZNI ELEMENT, AKO U GRUPOIDU $(S, *)$ POSTOJI NEUTRALNI ELEMENT e I AKO ZA SVAKI EL. $a \in S$ POSTOJI ELEMENT $a^{-1} \in S$ TAKAV DA JE:

$$a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$$

TADA JE a^{-1} INV. EL. ELEMENTA a.
GRUPA JE POLUGRUPA $(S, *)$ U KOJOJ POSTOJI JEDINIČNI ELEMENT I AKO SVAKI ELEMENT IZ S IMA SVOJ INV. EL

② **TEOREMA O JEDINSTVENOSTI INV. EL.**
PRETPOSTAVIMO SUPROTNO (DA POSTOJE 2 INV. EL. a_1^{-1} i a_2^{-1}).
TADA VAŽI:

ASOCIJATIVNO

$$\underline{a_1^{-1}} = a_1^{-1} * e = a_1^{-1} * (a * a_2^{-1}) = (a_1^{-1} * a) * a_2^{-1} = e * a_2^{-1} = \underline{a_2^{-1}}$$

$\Rightarrow a_1^{-1} = a_2^{-1}$ ŠTO JE SUPROTNO PRETP. DA SU TO 2 RAZLIČITA INV. EL

③ **PRIMERI GRUPA**

a) ADITIVNE GRUPE

$(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +)$,

b) MULTIPLIKATIVNE

$(\mathbb{Q}, \cdot), (\mathbb{R}^+, \cdot), (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$

$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot), (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$

AL. STR. SA DVE BIN. OPERACIJE (SA DOKAZA)

① **BIN. OP.**, **POLUGRUPA** ✓

ABELOVA GRUPA JE $(S,*)$ AKO JE $(S,*)$ GRUPA, A $*$ JE KOMUTATIVNA OPERACIJA NA S.

DISTRIBUTIVNOST, NEKA JE S SKUP U KOJEM SU DEF. DVE BINARNE OPERACIJE $*$; $\circ$ $\rightarrow (S,*,\circ)$

BINARNA OPERACIJA $\circ$ JE DISTRIBUTIVNA U ODNOSU NA BINARNU OPERACIJU $*$ AKO JE:

$$a\circ(b*c) = (a\circ b)*(a\circ c)$$

$$(a*b)\circ c = (a\circ c)*(b\circ c)$$

ZA SVAKO $a,b,c \in S$

② STRUKTURA $(S,*,\circ)$ JE **PRSTEN** AKO JE:

a) $(S,*)$ ABELOVA GRUPA

b) $(S,\circ)$ POLUGRUPA

c) OPERACIJA $\circ$ DISTRIBUTIVNA U ODNOSU NA $*$

PRSTEN $(S,*,\circ)$ KOD KOGA JE $(S\setminus\{e\},\circ)$ GRUPA JE **TELO**

PRSTEN $(S,*,\circ)$ KOD KOGA JE $(S\setminus\{e\},\circ)$ ABELOVA GRUPA JE **POLJE**.

③ **DOKAZ DA U PRSTENU $(S,+,\cdot)$ VAŽI $X\cdot 0 = 0\cdot X = 0$.**

NA OSNOVU SVOJSTVA NEUTRALNOG EL. 0 I DISTRIB. IMAMO:

$$X\cdot 0 = X\cdot(0+0) = X\cdot 0 + X\cdot 0 \quad / + (-X\cdot 0)$$

$$\underbrace{X\cdot 0 + (-X\cdot 0)}_{0} = X\cdot 0 + \underbrace{X\cdot 0 + (-X\cdot 0)}_{0}$$

$$\Rightarrow X\cdot 0 = 0$$

$$0\cdot X = (0+0)\cdot X = 0\cdot X + 0\cdot X \quad / + (-0\cdot X)$$

$$\underbrace{0\cdot X + (-0\cdot X)}_{0} = 0\cdot X + \underbrace{0\cdot X + (-0\cdot X)}_{0}$$

$$\Rightarrow 0 = X\cdot 0$$

MATRICE (BEZ DOKAZA)

1. NEKA JE K NEKO POLJE I NEKA $a_{ij} \in K$ ZA $i = 1,2,\dots,m$; $j = 1,2,\dots,n$

PRAVOUGAONA TABLICA A OD $m \cdot n$ ELEM. a_{ij} RASPOREĐENIH U OBLIKU:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & & a_{mn} \end{matrix}$$

JE MATRICA TIPA $m \times n$ NAD POLJEM K.

$K = R \rightarrow$ MATRICA JE REALNA

$K = C \rightarrow$ MATRICA JE KOMPLEKSNA

PODMATRICA JE MATRICA KOJA SE DOBIJA IZOSTAVLJANJEM NEKIH VRSTA I/ILI KOLONA.

MATRICA TIPA $m \times n$ IMA $\binom{m}{p} \cdot \binom{n}{q}$ PODMATRICA TIPA $p \times q$ GDE JE $p \leq m$ I $q \leq n$.

SABIRANJE MATRICA JE MOGUĆE SAMO KADA SU MATRICE ISTOG TIPA.

→ NEKA JE $A = (a_{ij})_{m \times n}$ I $B = (b_{ij})_{m \times n}$. ZBIR MATRICA A I B JE MATRICA $C = (c_{ij})_{m \times n}$ GDE JE $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ZA $i = 1,2,\dots m$ I $j = 1,2,\dots,n$, U OZNACI $C = A + B$

MNOŽENJE MATRICE SKALAROM, NEKA JE λ EL. POLJA K I TO JE SKALAR.

→ PROIZVOD MATRICE $A = (a_{ij})_{m \times n}$ I SKALARA λ JE MATRICA $B = (b_{ij})_{m \times n}$ GDE JE $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, ZA $i = 1,2,\dots,m$ I $j = 1,2,\dots,n$ U OZNACI $B = \lambda A$

MNOŽENJE MATRICA JE MOGUĆE SAMO AKO SU MATRICE SAGLASNE.

ZA SAGLASNE MATRICE $A = (a_{ij})_{\ell \times m}$ I $B = (b_{ij})_{m \times n}$ PROIZVOD JE MATRICA $C = (c_{ij})_{\ell \times n}$ GDE JE $c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot b_{kj}$ ZA $i = 1,2,\dots,m$ I $j = 1,2,\dots,n$

U OZNACI $C = A \cdot B$

TRANSPONOVANJE je unarna operacija u skupu matrica.

Matricu A^T dobijenu iz mat. A zamenom vrsta odg. kolonama nazivamo transponovanom mat. date mat. A.

$$A=(a_{ij})_{m\times n} \Rightarrow A^T=(a_{ji})_{n\times m}$$

② Svojstva transponovanja

a) $(A^T)^T = A$

b) $(\lambda A^T) = \lambda A^T$

c) $(A+B)^T = A^T + B^T$

d) $(A\cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

$(S,+)$ je Abelova grupa ako je S skup svih mat. istog tipa

Zbir dve mat. je mat. istog tipa, sabiranje je asocijativno i komutativno, nula matrica je neutralni element, inverzni el. za $A\in S$ je suprotna mat. $-A$.

/ Spunjeni su svi uslovi za Abelovu grupu!

PERMUTACIJE SKUPA (BEZ DOKAZA)

(1) **PERMUTACIJA SKUPA** $\{1,2,\dots,n\}$ JE BIJEKTNO PRESLIKAVANJE TOG SKUPA U SAMOG SEBE.

NPR PERMUTACIJA $(3,2,5,1,4)$ SKUPA $\{1,2,3,4,5\}$ JE PRESLIKAVANJE U ZAPISU $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

INVERZIJA PERMUTACIJE IZ SKUPA P_n

NEKA JE P_n SKUP SVIH PERMUTACIJA SKUPA $\{1,2,\dots,n\}$ PRI ČEMU JE PERMUTACIJA $(1,2,\dots,n)$ OSNOVNA I NEKA JE $G=(G_1, G_2, \dots, G_n)$ NEKA DRUGA PERMUTACIJA TOG SKUPA.

AKO U PERMUTACIJI G VAŽI $G_i > G_j$ ZA $i<j$ ONDA EL. G_i I G_j OBRAZUJU JEDNU INVERZIJU.

NPR U PERMUTACIJI $(n, n-1, \dots, 2, 1)$ SVAKA DVA EL. SU U INVERZIJI.

PARNA / NEPARNA PERM. IZ SKUPA P_n

PERMUTACIJA G JE PARNA AKO JE UKUPAN BR. INVERZIJA U KOJOJ PARAN, A NEPARAN AKO JE NEPARNA.

NPR $P_n = \{1,2,3,4\}$, $G = (3,4,1,2) \Rightarrow G$ JE PARNA PERMUTACIJA

$\underbrace{\begin{matrix} 3<1 & 4<1 \\ 3<2 & 4<2 \end{matrix}}_{=4}$

INVERZNA PERM.

PERM. P JE ONA KOJA JE ODREDJENA INVERZNIM PRESLIKAVANJEM P^{-1}.

NPR $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ $P^{-1}: 1 \to 4 \dots \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

MEDJ. INV. PER. IMAJU JEDNAK BROJ INVERZIJA

(2) TEOREMA O INVERZIJAMA MEDJ. INV. PERMUTACIJA

U NAŠEM PRIMERU: $Inv(G) = 2+1+2 = 5$

$Inv(G^{-1}) = 3+1+1 = 5$

Pojam determinante (bez dokaza)

① Preslikavanje $\det: M_n \to R$, gde je M_n skup svih kvadratnih mat. reda n sa elem. iz R, dato sa

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in P_n} (-1)^{inv(\sigma)} a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \dots a_{n\sigma_n}$$

gde je $A = (a_{ij})_n \in M_n$ naziva se **determinanta**.

② Sarusovo pravilo

Determinanti se sa desne strane dopišu prve dve kolone. Izračunaju se proizvodi elemenata na glavnoj dijagonali i dve dijagonale njoj paralelne. Izračunaju se proizvodi elemenata na sporednoj dijagonali i njoj paralelne dve dijagonale ali sa predznakom minus.

Vred. det. jednaka je zbiru tih proizvoda.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\underline{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}}$$

Sabirci za $n=3$

OSNOVNA SVOJSTVA DETERMINANTI (BEZ DOKAZA)

① DETERMINANTA ✓

② DET. MENJA ZNAK AKO DVE VRSTE ZAMENE MESTA (ZADRŽAVAJU APSOLUTNU VRED.

NEKA JE MAT. B DOBIJENA ZAMENOM i-TE i j-TE VRSTE MAT. A. U SVAKOM SABIRKU ZA $|B|$ ELEMENTI $a_i b_i$ i $a_j b_j$ SU ZAMENILI MESTA ŠTO ZNAČI DA BROJ INVERZIJA MENJA PARNOST, A TO ZNAČI DA SVI SABIRCI MENJAJU ZNAK. $\Rightarrow |B| = -|A|$

③ 3 SVOJSTVA DET.

1)

2) AKO SU A i B KVADRATNE MATRICE ISTOG REDA TADA JE

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

3) VRED. DET. MAT. A JEDNAKA JE NULI AKO:

a) MAT. IMA DVE JEDNAKE VRSTE

b) MAT. IMA DVE PROPORCIJALNE VRSTE

c) JEDNA VRSTA MAT. JE LIN. KOMBINACIJA OSTALIH VRSTA

RAZLAGANJE DETERMINANTE (BEZ DOKAZA)

1. DETERMINANTA ✓

MINOR M_{ij} ELEMENTA a_{ij} MAT. A JE DET. KOJA SE DOBIJA IZOSTAVLJANJEM i-TE VRSTE I j-TE KOLONE MAT. A.

KOFAKTOR (ALGEBARSKI KOMPLEMENT) A_{ij} ELEM. a_{ij} MAT. A JE BROJ $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

2. RAZVOJ DETERMINANTE (LAPLASOV)

ZA SVAKO $i = 1, 2, \dots, n$ VAŽI

- $|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$

OVOM FORMULOM DAT JE RAZVOJ DET. PO i-TOJ VRSTI.

POTPUNO ANALOGNO MOŽE SE DOBITI RAZVOJ DET. PO j-TOJ KOLONI

- $|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$

ZA BILO KOJE $j = 1, 2, \dots, n$

INVERZNA MATRICA (SA DOKAZOM)

① NEKA JE A KVADRATNA MAT. I NEKA SU A_{ij} NJENI KOFAK.
MAT. $\mathrm{cof}A = (A_{ij})$ SE NAZIVA KOFAKTOR MAT. MAT. A,
A MAT. $\mathrm{adj}A$ DEF. SA $\mathrm{adj}A = (\mathrm{cof}A)^T$ SE NAZIVA
ADJUNGOVANA MAT. MAT. A.

INV. MAT.

AKO ZA KV. MAT. A POSTOJI MAT. X TAKVA DA JE $AX = XA = E$
ZA MAT. X KAŽEMO DA JE INV. MAT. MAT. A, U OZNACI A^{-1}.

$$|A||A^{-1}| = 1$$

$$\Rightarrow |A| \neq 0, \quad |A^{-1}| \neq 0 \quad ; \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

MATRICA KOJA IMA INVERZNU JE REGULARNA! REGULARNOST MAT. JE POTREBAN USLOV ZA POSTOJANJE NJENE INV. MAT...
TO JE I DOVOLJAN USLOV. (② TO DOKAZUJE)

② $$A^{-1} = \frac{\mathrm{adj}A}{|A|}$$

$$A \cdot \mathrm{Adj}A = \mathrm{adj}A \cdot A = |A|E \quad / : |A|$$

$$A \cdot \frac{\mathrm{adj}A}{|A|} = \frac{\mathrm{adj}A}{|A|} \cdot A = E$$

$\Rightarrow X = \frac{\mathrm{adj}A}{|A|}$ JE INV. MAT. (IZ DEF. INV. MAT.)

3. Svojstva inv. mat.

Ako su A i B regularne mat. važi:

a) $\underline{(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}}$

$$\underbrace{AB \cdot (AB)^{-1}}_{E} = A\underbrace{B \cdot B^{-1}}_{E} \cdot A^{-1}$$

$$E = AEA^{-1}$$

$$E = AA^{-1}$$

$$E = E$$

b) $\underline{(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n}$ za $n \in N$

$$\underbrace{(A \cdot A \cdot A \cdot \ldots \cdot A)^{-1}}_{n} = \underbrace{(A^{-1})(A^{-1}) + \ldots \cdot (A^{-1})}_{n}$$

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A^{1} \cdot A^{-1} \cdot \ldots \cdot A^{-1}}_{n} = \underbrace{A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot \ldots \cdot A^{-1}}_{n}$$

c) $\underline{(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1}}$

$$(A \cdot A^{-1})^{T} = (A^{-1})^{T} \cdot A^{T} \quad i \quad AA^{-1} = E$$

RANG MATRICE (BEZ DOKAZA)

① **MINOR REDA r** MAT. A JE DETERMINANTA NEKE NJENE PODMAT. REDA r (DET. KOJA SADRŽI ONE ELEM. MAT. A KOJI SE NALAZE U PRESEKU PROIZVOLJNO ODABRANIH r VRSTA I r KOLONA, SA OČUVANJEM PORETKA TIH VRSTA/KOLONA).

SKUP MINORA SASTOJI SE OD 2 DISJUNKTNA SKUPA MINORA, ONIH KOJI SU $=0$ I ONIH KOJI SU $\neq 0$.

BROJ r JE **RANG MATRICE** $A \neq 0$ (NE NULA MAT.) AKO MEDJU MINORIMA RAZLIČITIM OD NULE POSTOJI MINOR REDA r, DOK SU SVI MINORI REDA VEĆEG OD r (AKO POSTOJE) JEDNAKI NULI.
RANG NULA MATRICE JE NULA.

$\operatorname{rang} A \leq \min\{m,n\}$ ZA MAT. TIPA $m \times n$

AKO JE RANG $= r$, SVAKI MINOR REDA r KOJI JE $\neq 0$ JE BAZNI MINOR A NJEGOVE VRSTE I KOLONE SU BAZISNE VRSTE/KOLONE.

ELEM. TRANSFORMACIJE

1) ZAMENA MESTA 2. VRSTE/KOLONE
2) MNOŽENJE 1. VRSTE/KOLONE NE NULA BROJEM
3) DODAVANJE NEKE VRSTE (KOLONE) DRUGOJ VRSTI (KOLONI)

② **ELEM. TRANSFORMACIJE NE MENJAJU RANG.**

MAT. KOJE IMAJU ISTI RANG SU EKVIVALENTNE MAT.: $A \sim B$.
CILJ JE MAT. A TRANSFORMISATI DO MAT. A' KOJA IMA STEPENASTU FORMU KOJA JE POGODNA ZA ODREDJIVANJE RANGA.

③ Transponovanjem matrice se ne menja njen rang

• Prvo dokažemo da je $r(A) \leq r(A^T)$

Ako je $M^{j_1 \dots j_r}_{i_1 \dots i_r} \neq 0$ minor reda r mat. A

onda je $N^{i_1, \dots i_r}_{j_1 \dots j_r} \neq 0$ minor mat. A^T (isto je $\neq 0$ jer je nastao transponovanjem minora M)

$\Rightarrow r(A) \leq r(A^T)$

• Iz drugog dokaza zaključujemo da je $r = r(A^T) \leq r((A^T)^T)$

Što dalje znači da je $\underline{\underline{r(A^T) = r(A) = r}}$

VEKTORI (2 DOKAZA DA, 2 NE)

① → VEKTORSKI PROSTOR

POLJE ✓

VEKTORSKI PROSTOR

NEKA JE $V \neq (\emptyset)$ (NEPRAZAN SKUP), K JE POLJE I NEKA SU

$+ : V^2 \to V$
$\cdot : K \times V \to V$ } DVE BINARNE OPERACIJE

ALGEBARSKA STRUKTURA $(V, K, +, \cdot)$ JE VEKTORSKI ILI LINEARNI

PROSTOR AKO JE:

1) $(V, +)$ ABELOVA GRUPA
2) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$
3) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$
4) $(\alpha \cdot \beta)x = \alpha(\beta x)$
5) $1 \cdot x = x$

ZA SVAKO $x, y \in V$ I $\alpha, \beta \in K$

ELEMENTI SKUPA V SU VEKTORI, A ELEMENTI SKUPA K SKALARI.

AKO JE $K = R$ → VEKTORSKI PROSTOR JE REALAN.

AKO JE $K = C$ → VEKTORSKI PROSTOR JE KOMPLEKSAN

LINEARNA KOMBINACIJA VEKTORA $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ IZ V JE VEKTOR

$\vec{x} = \alpha_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_n \vec{x}_n$ GDE SU $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ SKALARI IZ K.

LINEAL JE SKUP SVIH LINEARNIH KOMBINACIJA VEKTORA

$\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ DATOG SKUPA $X = \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}$. U OZNACI $L(X)$.

$L(X) = \{\alpha_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_n \vec{x}_n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K\}$

X JE GENERATORSKI SKUP ZA $L(X)$, TJ. ON GENERIŠE $L(X)$.

LINEAL = LINEARNI OMOTAČ.

VEKTORI $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ VEKTORSKOG PROSTORA V SU LINEARNO ZAVISNI AKO POSTOJE SKALARI $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ OD KOJIH JE BAR JEDAN RAZLIČIT OD NULE, ZA KOJE VAŽI:

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_n \vec{x}_n = \vec{0}$$

U PROTIVNOM, VEKTORI $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ SU LINEARNO NEZAV. AKO JE OVA GORE JEDNAKOST MOGUĆA SAMO ZA $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

2 OPERACIJE + i · U SKUPOVIMA R, $P_{\leq n}$ i R DA SE DOBIJU VEKTORI

1) $V = R^n$, $K = R$ $\quad + : (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$

$\cdot : \alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$

VEKTORSKI PROSTOR $(R^n, R, +, \cdot)$ JE LINEARAN ARITMETIČKI PROSTOR.

2) $V = P_{\leq n}$ (SKUP POLINOMA $st \leq n$), $K = R$

+ : SABIRANJE POLINOMA, · MNOŽENJE POLINOMA REALNIM BR.

3) $V = R^R$ (SKUP F-JA $f : R \to R$), $K = R$

$+ : (f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $\cdot : (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$

BAZA VEKTORSKOG PROSTORA V JE UREDJEN SKUP LIN. NEZAV. VEKTORA IZ V ZA KOJE JE $L(B) = V$. SVAKI VEKTOR IZ V SE MOŽE IZRAZITI KAO LINEARNA KOMBINACIJA VEKTORA BAZE.

DIMENZIJA VEKTORSKOG PROSTORA JE BROJ ELEMENATA BAZE KONAČNODIMENZIONALNOG VEKTORSKOG PROSTORA (AKO U VEKTORSKOM PROSTORU V POSTOJI BAZA KOJA SADRŽI KONAČAN BROJ VEKTORA PROSTOR JE KONAČNODIMENZIONALAN).

PRIMER BAZE U $\mathbb{R}^n$

JEDNA BAZA PROSTORA $\mathbb{R}^n$ JE $\beta = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

$e_1 = (1,0,\dots,0)$ $e_2 = (0,1,\dots,0)$ $e_n = (0,0,\dots,1)$

VEKTORI SKUPA β SU LIN. NEZAV. I SVAKI VEKTOR $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ IZ $\mathbb{R}^n$ JE LIN. KOMBINACIJA VEKTORA. JE[...]

$$a = (a_1, 0, \dots, 0) + (0, a_2, 0, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, a_n)$$
$$= a_1(1,0,\dots,0) + a_2(0,1,0,\dots,0) + \dots + a_n(0,0,\dots,1)$$
$$= a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$$

PRIMER POLINOMA

POLINOMI $P_1(x) = 1$, $P_2(x) = x$ I $P_3(x) = x^2$ ČINE BAZU VEK. PROSTORA $P_{\leq 2}$ JER SU LIN. NEZAV. I PRI TOME JE $P = a \cdot P_1 + b \cdot P_2 + c \cdot P_3$ ZA PROIZVOLJAN POLINOM $p(x) = a + bx + cx^2$ IZ $P_{\leq 2}$.

POTREBAN I DOVOLJAN USLOV ZA LIN. ZAV. VEKTORA $X_1 \dots X_n$.

VEKTORI $\vec{X_1}, \dots, \vec{X_n}$ SU LIN. ZAV. AKKO JE JEDAN OD NJIH LINEARNA KOMBINACIJA OSTALIH VEKTORA

DOKAZ (3)

a) AKO SU VEKTORI LIN. ZAV. TADA JE U NJIHOVOJ LIN. KOMBINACIJI BAR JEDAN SKALAR RAZLIČIT OD NULE. VEKTOR UZ TAJ SKALAR JE LIN. KOMB. OSTALIH.

b) OBRATNO, AKO JE 1 OD VEKTORA LIN. KOMBINACIJA OSTALIH, ONDA JE LIN. KOMB. SVIH VEKTORA JEDNAKA NULI, A JEDAN SKALAR JE JEDNAK JEDAN, TJ. $\neq 0$.

$$\vec{X_n} = \alpha_1 \vec{X_1} + \dots + \alpha_{n-1} \overrightarrow{X_{n-1}}$$
$$\Rightarrow -\alpha_1 \vec{X_1} + \dots - \alpha_{n-1} \overrightarrow{X_{n-1}} + \vec{X_n} = \vec{0}$$

$\alpha_1 \vec{X_1} + \dots + \alpha_n \vec{X_n} = \vec{0}$ i npr. $\alpha_n \neq 0 \Rightarrow$

$\alpha_n \vec{X_n} = -\alpha_1 \vec{X_1} + \dots - \alpha_{n-1} \overrightarrow{X_{n-1}} \quad / : \alpha_n \neq 0 \Rightarrow$

$\vec{X_n} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} \vec{X_1} + \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \overrightarrow{X_{n-1}}$.

3 $(M_{m\times n}, +, \cdot)$ JE VEK. PROSTOR AKO JE + OPERACIJA SABIRANJE MATRICA, A $\cdot$ OPERACIJA MNOŽENJA MATRICE REALNIM BR.

1) $(M_{m\times n}, +)$ JE ABELOVA GRUPA JER ZA OPERACIJU SABIRANJA MATRICA U SKUPU SVIH MATRICA TIPA $m\times n$ VAŽI:

- ZATVORENOST (DOBIJA SE MATRICA TIPA $m\times 1$)
- ASOCIJATIVNOST (SABIRANJE 3 MATRICE TIPA $m\times n$)
- NEUTRALNI ELEMENT (JE NULA MAT. TIPA $m\times n$)
- INVERZNI ELEMENT (ZA MAT. TIPA $m\times n$ JE MAT. A KOJA JE ISTOG TIPA)
- KOMUTATIVNOST (ZA SABIRANJE 2 MATRICE)

2) VAŽI DISTRIBUTIVNOST ZA MNOŽENJE SKALAROM ZBIRA DVE MATRICE.

$\alpha(M_1 + M_2) = \alpha M_1 + \alpha M_2$, $M_1 M_2 \in M_{m\times n}$, $\alpha \in K$

3) VAŽI DISTRIBUTIVNOST ZA MNOŽENJE ZBIRA SKALARA MATRICOM.

$(\alpha + \beta) M = \alpha M + \beta M$

4) VAŽI ASOCIJATIVNOST ZA MNOŽENJE MATRICE PROIZVODOM DVA SKALARA

$(\alpha \cdot \beta) M = \alpha (\beta M)$

5) $\underline{I} \cdot M = M = M \cdot I$ - JEDINIČNA MAT. TIPA $m\times n$ JE NEUTRALNI ELEMENT ZA MNOŽENJE MATRICA TIPA $m\times n$.

1-5 ISPUNJENO $\Rightarrow (M_{m\times n}, R, +, \cdot)$ JE VEK. PROSTOR

Kramerova Teorema

1. Sistem oblika:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

je sistem od m linearnih jednačina nad poljem K sa nepoznatim promenljivim $x_1, x_2, \dots, x_n$.

$a_{ij} \to$ koeficijenti, $b_i \to$ slobodni članovi

Uredjena n-torka $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n) \in K^n$ je rešenje sistema ako zamenom u sistemu x_k sa α_k (za $k = 1, \dots, n$) dobijamo m matričnih jednakosti.

- Sistem je rešiv ako ima bar jedno rešenje, tj. ako je skup svih rešenja sis. $\neq \emptyset$. U protivnom, sistem je nerešiv.

Odredjen je ako ima jedno rešenje, a neodredjen ako ima više.

Sistemi S_1 i S_2 su ekvivalentni ako imaju iste skupove rešenja.

Matrični zapis

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Vektorski zapis

$$(A_1\, A_2 \dots A_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

(2) AKO JE MATRICA SISTEMA REGULARNA SISTEM IMA JEDINSTVENO REŠENJE DATO SA

$$X_K = \frac{D_K}{K}, \quad k = 1, \dots, n$$

FORMULACIJA

(3) IZ 1 SLEDI DA SISTEM IMA JEDINSTVENO REŠENJE AKO JE $D \neq 0$. SPECIJALNO, HOMOGEN SISTEM ZA $D \neq 0$ IMA SAMO TRIVIJALNO REŠENJE

DOKAZ

NPR:

$$X_1 + X_2 + 2X_3 = 0$$
$$X_1 + 2X_2 + X_3 = 0$$
$$2X_1 + X_2 + X_3 = 0$$

IMA SAMO TRIVIJALNO REŠENJE JER JE $D = -4 \neq 0$

KRONEKER-KAPELIJEVA TEOREMA

1. –||– (KRAMER)

2. MINOR M MATRICE JE **BAZISNI MINOR** AKO JE $\neq 0$ I AKO JE RED TOG MINORA JEDNAK RANGU MATRICE A.

NEKA JE $R(A) = R$, TADA:

A) MEDJU KOLONAMA $A_1, A_2, \dots, A_n$ POSTOJI r LIN. NEZAV.

USLOV $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_r A_r = 0$ ODREDJUJE HOM. SISTEM

$$a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1r}\alpha_r = 0$$
$$\vdots$$
$$a_{r1}\alpha_1 + a_{r2}\alpha_2 + \dots + a_{rr}\alpha_r = 0$$
$$a_{(r+1)1}\alpha_1 + a_{(r+1)2}\alpha_2 + \dots + a_{(r+1)r}\alpha_r = 0$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \dots + a_{mr}\alpha_r = 0$$

KAKO PRVIH r JEDNAČINA ČINI KVADRATNI SISTEM SA REGULARNOM MATRICOM ON IMA JED. REŠ (TRIVIJALNO). TO JE UJEDNO I REŠENJE CELOG SISTEMA PA SU KOLONE $A_1, \dots A_r$ LINEARNO NEZAVISNE.

B) SVAKA OD OSTALIH $n-r$ KOLONA JE LINEARNA KOMB. r NEZAVISNIH KOLONA.

3. FORMULACIJA I DOKAZ K-K TEOREME

SISTEM LINEARNIH JEDNAČINA JE SAGLASAN AKKO JE RANG MATRICE SISTEMA JEDNAK RANGU PROŠIRENE MAT. SIS.

A MATRICA SIS. S , $\bar{A} = [AB]$ PROŠ. MAT. TOG SIS.

NEOPHODAN USLOV: AKO JE SISTEM SAGLASAN TADA JE KOLONA B LINEARNA KOMB. KOLONA $A_1, \dots, A_n$ MAT. A PA JE DIMENZIJA PROSTORA KOLONA MAT. $\bar{A}$ JEDNAKA

...DIMENZIJI PROSTORA KOLONA MAT. A.

$\Rightarrow R(\bar{A}) = R(A)$

<u>DOVOLJAN USLOV</u>: NEKA JE $R(\bar{A}) = R(A) = r$ I NEKA PRVIH r KOLONA MAT. A ČINI BAZU PROSTORA TE MATRICE. ISTE TE KOLONE ČINE BAZU PROSTORA KOLONA MATRICE $\bar{A}$.

KOLONA B JE DAKLE LIN. KOMB. KOLONA $A_1, \ldots, A_r$ ŠTO ZNAČI DA POSTOJE SKALARI $\alpha_1, \ldots \alpha_r$ TAKVI DA:

$$B = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_r A_r$$

U TOM SLUČAJU JE I

$$B = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots \alpha_n A_r + 0 \cdot A_{r+1} + \ldots + 0 \cdot A_n,$$

PA JE $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, 0, \ldots, 0)$ REŠENJE SIS. S

$\Rightarrow$ PREMA TOME, SISTEM JE SAGLASAN!