GAUSOV ALGORITAM

1. –||– (KRAMER)

2. EKVIVALENTNE TRANSFORMACIJE SISTEMA SU TRANSFORMACIJE KOJE NE MENJAJU SKUP REŠENJA SISTEMA.

TU SPADAJU:

- MNOŽENJE i-TE JEDNAČINE BROJEM $\lambda \neq 0$
- PROMENA REDOSLEDA JEDNAČINA SISTEMA
- ZAMENA j-TE JEDNAČINE SISTEMA NJENIM ZBIROM SA i-TOM JEDNAČINOM.

3. GAUSOV ALGORITAM JE NAJČEŠĆE KORIŠĆENA METODA ZA REŠAVANJE SISTEMA LIN. JED. I ZASNOVANA JE NA SUKCESIVNOJ ELIMINACIJI NEPOZNATIH U SISTEMU.

PROCES SE ODVIJA U DVE FAZE:

PRVA FAZA

SISTEM SE EKVIVALENTNIM TRANSFORMACIJAMA SVODI NA STEPENAST ILI TROUGLAST OBLIK.

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \quad \Big/ \cdot\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right) \Big/ \cdot\left(-\frac{a_{31}}{a_{11}}\right) \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \qquad a_{11} \neq 0 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

DOBIJAMO:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\
&\vdots \\
a_{m2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{mn}^{(1)}x_n &= b_m^{(1)}
\end{aligned}
$$

OVAKAV POSTUPAK ELIMINACIJE PROMENJIVE X SE NAZIVA PIVOTIRANJE PIVOTOM a_{11}.

PA DALJE AKO JE $a_{22}^{(1)} \neq 0$ PIVOTIRANJEM PIVOTOM $a_{22}^{(1)}$ ELIMINIŠE SE NEPOZNATA.

I TAKO SVE DOK NE DODJEMO DO TROUGLASTOG OBLIKA...

AKO U DOBIJENOM SISTEMU POSTOJI JED. OBLIKA:

$$0 \cdot x_r + 0 \cdot x_{r+1} + \ldots + 0 \cdot x_n = c, \quad c \neq 0$$

$$0 = c, \quad c \neq 0$$

SISTEM JE NEMOGUĆ!

U PROTIVNOM, POSTOJE DVA SLUČAJA.

DRUGA FAZA

1) AKO JE $r = n$ DOBIJENI EKV. SISTEM IMA JED. REŠENJE.

2) AKO JE $r < n$ DOBIJENI EKV. SISTEM IMA ∞ MNOGO REŠ.

PROIZVODI VEKTORA

VEKTOR je duž AB kod koje razlikujemo početnu i krajnju tačku. Prava P koja sadrži tačke A i B je nosač tog vektora i odredjuje njen pravac.

Dužina vektora je od A do B

Dužina duži AB je intezitet vektora ($\overrightarrow{AB} = \vec{a}$)

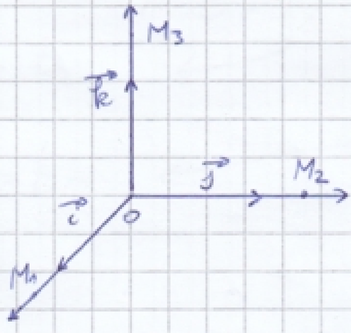
Jedinični vektor ima intezitet 1, a nula vektor 0.

Operacija $+ : V^2 \to V$ gde je V vektorski prostor kojem pripadaju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$, definisana sa $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ gde je $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ naziva se SABIRANJE VEKTORA.

Neka $\vec{a} \in V$ i $\lambda \in R$, $\lambda\vec{a}$ je vektor kolinearan vektoru $\vec{a}$ čiji je intenzitet jednak $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$ dok je smer isti kao i smer vektora $\vec{a}$ ako je $\lambda = 0$, a suprotan smeru vektora $\vec{a}$ ako je $\lambda < 0$

Operacija: $R \times V = V$, Def. sa $(\lambda, \vec{a}) \to \lambda\vec{a}$ je MNOŽENJE VEKTORA SKALAROM.

Brojevi x, y, z zovu se KOORDINATE VEKTORA $\vec{a}$ u bazi $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$



Proizvoljan vektor iz prostora V jednoznačno je odredjen svojim koordinatama. Ako su $M_1(x_1, y_1, z_1)$ i $M_2(x_2, y_2, z_2)$ dve proizvoljne tačke u prostoru tada je

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Orijentacija vektora

- Uredjen par nenultih vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je desne ili pozitivne orijentacije ako se najmanja rotacija kojom se vektor $\vec{a}$ rotira dok mu se smer ne podudari sa smerom vektora $\vec{b}$ odvija u smeru suprotnom kretanju kazaljki na satu. U suprotnom su leve orij.
- Uredjena trojka nekomplanarnih vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ obrazuje triedar desne ili pozitivne orijentacije ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ desne orijentacije (posmatrano sa kraja vektora $\vec{c}$). U suprotnom je leve.
- Koordinatni sistem je desni (engleski) ako je baza koja ga odredjuje desne orijentacije. U suprotnom je levi (francuski).

Skalarni proizvod (A)

Skalarni proizvod je operacija $: V^2 \to R$ definisana sa
$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot \cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

Osobine:
1) $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$
2) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$
3) $(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$
4) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$
5) $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \;,\; \vec{a} = \vec{0}$

Dokaz

$$\vec{a}\,\vec{b} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \cdot (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) =$$
$$= x_1x_2\,\cancelto{1}{(\vec{i}\cdot\vec{i})} + x_1y_2\,\cancelto{0}{(\vec{i}\cdot\vec{j})} + x_1z_2\,\cancelto{0}{(\vec{i}\cdot\vec{k})} +$$
$$+ y_1x_2\,\cancelto{0}{(\vec{j}\cdot\vec{i})} + y_1y_2\,\cancelto{1}{(\vec{j}\cdot\vec{j})} + y_1z_2\,\cancelto{0}{(\vec{j}\cdot\vec{k})} +$$
$$+ z_1x_2\,\cancelto{0}{(\vec{i}\cdot\vec{k})} + z_1y_2\,\cancelto{0}{(\vec{j}\cdot\vec{k})} + z_1z_2\,\cancelto{1}{(\vec{k}\cdot\vec{k})} =$$
$$= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

VEKTORSKI PROIZVOD (B)

OPERACIJA $\times : V^2 \to V$ KOJOM SE PARU VEKTORA $\vec{a}$ I $\vec{b}$ DODELJUJE VEKTOR $\vec{c}$ KOJI IMA:

1) PRAVAC NORMALAN NA VEKTORE $\vec{a}$ I $\vec{b}$
2) SMER PRI KOJEM $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ OBRAZUJU TRIJEDAR DESNE ORIJENTACIJE
3) INTENZITET JEDNAK $|\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

JE <u>VEKTORSKI PROIZVOD</u>. VEKTORA $\vec{a}$ I $\vec{b}$ (U OZNACI $\vec{a} \times \vec{b}$)

<u>SVOJSTVA</u>: (ZA $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$)

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
2) $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$
3) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
4) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

AKO JE $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ I $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ TADA JE

$$\underline{\vec{a} \times \vec{b} = (y_1 z_2 - z_1 y_2, -x_1 z_2 + z_1 x_2, x_1 y_2 - y_1 x_2)}$$

DOKAZ

$$\vec{a} \times \vec{b} = (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \times (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) =$$

$$= x_1 \vec{i} \times x_2 \vec{i} + x_1 \vec{i} \times y_2 \vec{j} + x_1 \vec{i} \times z_2 \vec{k} +$$

$$+ y_1 \vec{j} \times x_2 \vec{i} + y_1 \vec{j} \times y_2 \vec{j} + y_1 \vec{j} \times z_2 \vec{k} +$$

$$+ z_1 \vec{k} \times x_2 \vec{i} + z_1 \vec{k} \times y_2 \vec{j} + z_1 \vec{k} \times z_2 \vec{k} =$$

$$= x_1 x_2 (\cancelto{0}{\vec{i} \times \vec{i}}) + x_1 y_2 (\vec{i} \times \vec{j}) + x_1 z_2 (\vec{i} \times \vec{k}) +$$

$$+ y_1 x_2 (\vec{j} \times \vec{i}) + y_1 y_2 (\cancelto{0}{\vec{j} \times \vec{j}}) + y_1 z_2 (\vec{j} \times \vec{k}) +$$

$$+ z_1 x_2 (\vec{k} \times \vec{i}) + z_1 y_2 (\vec{k} \times \vec{j}) + z_1 z_2 (\cancelto{0}{\vec{k} \times \vec{k}})$$

$$= x_1 y_2 (\vec{k}) + x_1 z_2 (-\vec{j}) + y_1 x_2 (-\vec{k}) + y_1 z_2 (\vec{i}) +$$

$$+ z_1 x_2 (\vec{j}) + z_1 y_2 (-\vec{i}) =$$

$$= \vec{i}(y_1 z_2 - z_1 y_2) + \vec{j}(-x_1 z_2 + z_1 x_2) + \vec{k}(x_1 y_2 - y_1 x_2)$$

TJ. VEKTORSKI PROIZVOD U OBLIKU DETERMINANTE

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

MEŠOVITI PROIZVOD (c)

PRESLIKAVANJE SKUPA V^3 U SKUP $\mathbb{R}$ KOJIM SE VEKTORIMA $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ DODELJUJE SKALARNI PROIZVOD VEKTORA $\vec{a} \times \vec{b}$ I VEKTORA $\vec{c}$ JE <u>MEŠOVITI PROIZVOD</u> VEKTORA $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

MEŠOVIT PROIZVOD MOŽE DA SE <u>IZRAZI PREKO KOORDINATA VEKTORA U ORTONORMIRANOJ BAZI.</u>

AKO JE $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ U ORTONONIRANOJ BAZI $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ DESNE ORIJENTACIJE TADA JE:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

<u>TEOREMA O GEOM. INTERPRETACIJI MEŠOVITOG PROIZVODA</u>

MEŠOVIT PROIZVOD NEKOMPLANARNIH VEKTORA $\vec{a}, \vec{b}$ I $\vec{c}$ JEDNAK JE ZAPREMINI V PARALELEPIPEDA ODREĐENOG SA TA TRI VEKTORA AKO SU ONI DESNE ORIJENTACIJE.

TJ. JEDNAK JE $-V$ AKO SU LEVE ORIJENTACIJE.

DOKAZ

NEKA JE $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{d}$ I H JE VISINA PARALELOGRAMA.

TADA JE $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{d}||\vec{c}| \cos\sphericalangle(\vec{d}, \vec{c})$, PRI ČEMU JE $|\vec{d}|$ POVRŠINA PARALELOGRAMA NAD $\vec{a}$ I $\vec{b}$ DOK

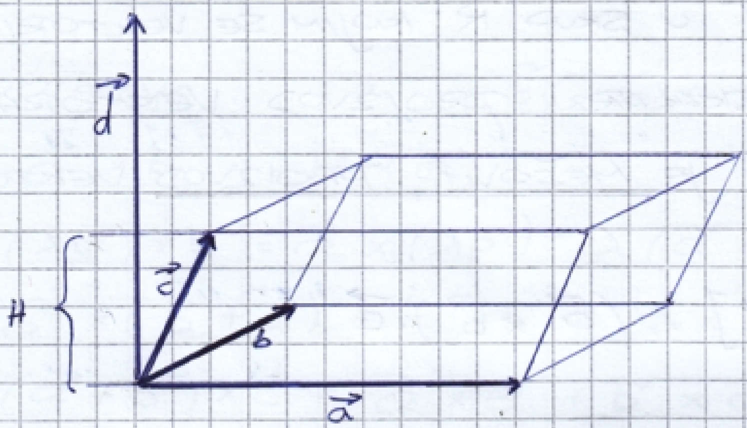
JE $\underbrace{|\vec{c}| \cdot \cos\sphericalangle(\vec{d}, \vec{c}) = H}_{\text{AKO SU VEKTORI } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ DESNE ORIJENTACIJE}}$ $\boxed{\left(\text{JER } \cos\sphericalangle(\vec{d}, \vec{c}) = \frac{H}{|\vec{c}|}\right)}$

TJ. $\underbrace{|\vec{c}| \cos\sphericalangle(\vec{d}, \vec{c}) = -H}_{\text{AKO SU VEKTORI LEVE ORIJENTACIJE}}$

$\Rightarrow [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \pm V$

DESNO

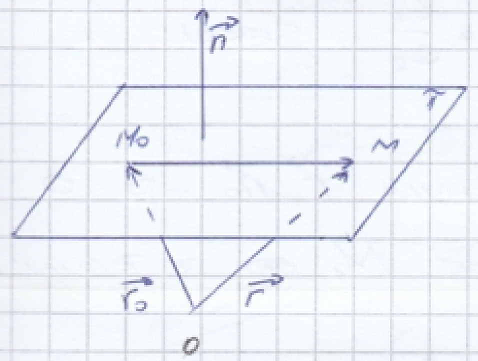
LEVO



RAVAN (SVE)

RAVAN JE ODREDJENA JEDNOM TAČKOM I VEKTOROM KOJI JE NORMALAN NA RAVAN.

VEKTORSKI OBLIK



O - PROIZVOLJNA TAČKA PROSTORA
M - PROIZVOLJNA TAČKA RAVNI π

TAČKA M_0 NORMALNA NA VEKTOR $\vec{n}$.

$$\left.\begin{aligned} \vec{r_0} &= \overrightarrow{OM_0} \\ \vec{r} &= \overrightarrow{OM} \end{aligned}\right\} \text{VEKTORI POLOŽAJA (RADIJUS VEKTORI) TAČAKA } M_0 \text{ I } M.$$

TAČKA M PRIPADA RAVNI π AKKO JE $\vec{r} - \vec{r_0} = \overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$, TJ.

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r_0}) = 0$$

SKUP SVIH VEKTORA KOJI ZADOVOLJAVAJU OVU JEDNAČINU ODREDJUJE RAVAN π, PA JE TO I JEDNAČINA RAVNI U VEKTORSKOM OBLIKU

OPŠTI OBLIK

PRETPOSTAVIMO DA JE O KOORDINATNI POČETAK PRAVOUGLOG KOORDINATNOG SISTEMA I DA SU (x_0, y_0, z_0) KOORDINATE TAČKE M_0, A (x, y, z) KOORD. TAČKE M.

AKO JE $\vec{n} = (A, B, C)$, GDE JE $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ JEDNAČINA (OVA GORE) SE MOŽE NAPISATI U SKALARNOM OBLIKU

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{Ax + By + Cz = 0}$$

JEDNAČINA RAVNI U OPŠTEM OBLIKU

GDE JE $D = -\vec{n} \cdot \vec{r_0} = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$

SEGMENTNI OBLIK

AKO SU DATE TAČKE NA KOORDINATNIM OSAMA $M_1(a,0,0)$, $M_2(0,b,0)$ I $M_3(0,0,c)$ JED. RAVNI ODREDJENA TIM TAČKAMA JE

$$\ldots \begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0, \text{ tj. } (x-a)bc + abz + acy = 0$$

IZ OVOG USLOVA DOBIJAMO SEGM. OBLIK JEDNAČINE RAVNI π -

$$\underline{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1} \qquad (abc \neq 0)$$

NORMALAN OBLIK

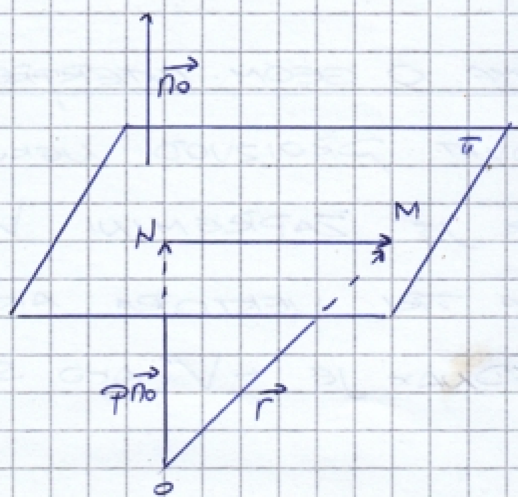
$\vec{n}_0$ - JEDINIČNI VEKTOR

p - ODSTOJANJE KOORD. POČETKA O OD DATE RAVNI π

N - PODNOŽJE NORMALE IZ TAČKE O NA RAVAN π

M - PROIZVOLJNA TAČKA

$\vec{r} = \vec{OM}$ - RADIJUS VEKTOR TAČKE M



$p\vec{n}_0 = \vec{ON} \perp \vec{NM} = \vec{r} - p\vec{n}_0$

$\Rightarrow (\vec{r} - p\vec{n}_0)\vec{n}_0 = 0$

KAKO JE $p\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_0 = p$

$\Rightarrow \underline{\vec{r} \cdot \vec{n}_0 - p = 0}$

NORMALAN OBLIK U VEKTORSKOJ FORMI

AKO SU α, β I γ UGLOVI VEKTORA NORMALE RAVNI π, I AKO JE $M(x, y, z)$ TAČKA RAVNI π, ONDA JE $\vec{n}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ I $\vec{r} = \vec{OM} = (x, y, z)$. PA:

$$\underline{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0}$$

NORMALAN OBLIK U SKALARNOJ FORMI

(2) RAVNI $\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1$, $\Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2$

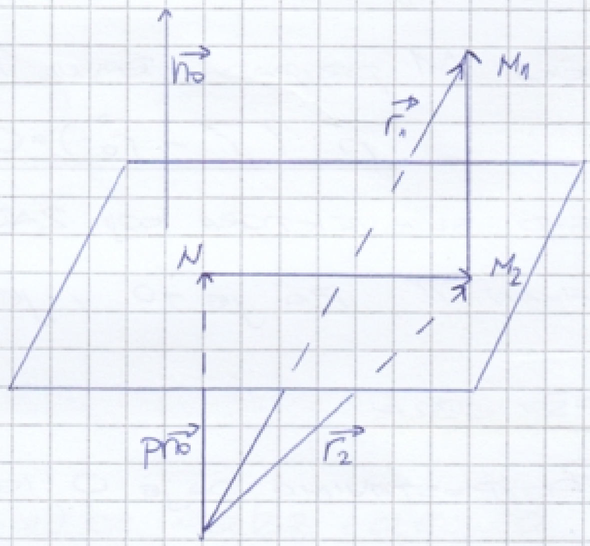
NJIHOV MEDJUSOBNI POLOŽAJ MOŽE BITI:

a) $\Pi_1 \parallel \Pi_2 \iff \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$ NORMALNE

b) $\Pi_1 \equiv \Pi_2 \iff \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ POKLAPAJU

c) $\Pi_1 \cap \Pi_2 \iff \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ ILI $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ SEKU

(3) IZ NORMALNOG OBLIKA JEDNAČINE RAVNI $\vec{r} \cdot \vec{n_0} - p = 0$ MOŽE SE DOBITI ODSTOJANJE d TAČKE M_1 OD TE RAVNI.



AKO JE M_2 PROJEKCIJA TAČKE M_1 NA DATU RAVAN, ODSTOJANJE JE JEDNAKO INTENZITETU VEKTORA $\overrightarrow{M_2M_1}$. KAKO M_2 PRIPADA RAVNI, I KAKO JE VEKTOR $\overrightarrow{M_2M_1}$ KOLINEARAN SA $\vec{n_0}$:

$\vec{r_2} \cdot \vec{n_0} - p = 0$, $\vec{r_1} - \vec{r_2} = \lambda \vec{n_0}$

$\Rightarrow (\vec{r_1} - \lambda \vec{n_0}) \cdot \vec{n_0} - p = 0$

$\Rightarrow \lambda = \vec{r_1} \cdot \vec{n_0} - p$

$\rightarrow d = |\lambda| = |\vec{r_1} \cdot \vec{n_0} - p|$

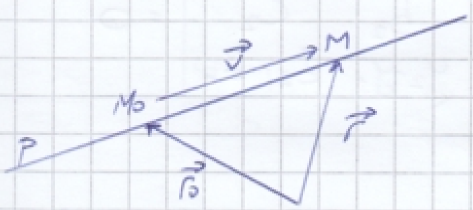
TJ. SKALARNO $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

PRAVA (SVE)

① PRAVA p SADRŽI TAČKU $M_0(x_0, y_0, z_0)$ I NEKA JE PARALELNA VEKTORU $\vec{v} = (a, b, c)$. AKO JE $M(x, y, z)$ PROIZVOLJNA TAČKA PRAVE p, ONDA SU VEKTORI $\overrightarrow{M_0M}$ I $\vec{v}$ KOLINEARNI. DAKLE, ZA NEKO $t \in R$ VAŽI $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{v}$, TJ:

$$\underline{\vec{r} - \vec{r_0} = t\vec{v}}$$

$(\vec{r_0} = \overrightarrow{OM_0},\ \vec{r} = \overrightarrow{OM}$, TO SU RADIJUS VEKTORI TAČAKA M_0 I $M)$



VEKTORSKI OBLIK

KAKO JE $\vec{r} - \vec{r_0} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, $t\vec{v} = (ta, tb, tc)$ OVA GORE JEDNAČINA JE EKVIVALENTNA:

$$x = x_0 + ta$$
$$y = y_0 + tb$$
$$z = z_0 + tc$$

PARAMETARSKI OBLIK

ELIMINACIJOM PARAMETRA t IZ SISTEMA PARAM. OBLIKA DOBIJA SE

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} = t$$

KANONSKI OBLIK

② POLOŽAJ DVE PRAVE

A) PARALELNE

VEKTORI $\vec{V_1}$ I $\vec{V_2}$ SU KOLINEARNI, A VEKTOR $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ NIJE KOLINEARAN NIJEDNOM OD NJIH.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}, \quad \frac{a_1}{x_2 - x_1} \neq \frac{b_1}{y_2 - y_1} \text{ ILI } \frac{a_1}{x_2 - x_1} \neq \frac{c_1}{z_2 - z_1}$$

B) POKLAPAJU

VEKTORI $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ i $\overrightarrow{M_1M_2}$ SU KOLINEARNI.

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}, \quad \frac{a_1}{x_2-x_1}=\frac{b_1}{y_2-y_1}=\frac{c_1}{z_2-z_1}$$

C) PRIPADAJU ISTOJ RAVNI I SEKU SE

VEKTORI $\vec{v_1}$ i $\vec{v_2}$ NISU KOLINEARNI, PRI ČEMU JE $[\vec{v_1}, \vec{v_2}, \overrightarrow{M_1M_2}]=0$.

$$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2} \quad \text{ili} \quad \frac{a_1}{a_2}\neq\frac{c_1}{c_2} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix}=0$$

D) MIMOILAZNE

VEKTORI $\vec{v_1}$ i $\vec{v_2}$ NISU KOLINEARNI, PRI ČEMU JE $[\vec{v_1}, \vec{v_2}, \overrightarrow{M_1M_2}]\neq 0$.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix}\neq 0$$

3 OPŠTI → KANONSKI

PRAVA p JE PRESEK RAVNI π_1 i π_2 ČIJI SU VEKTORI NORMALE $\vec{n_1}=(A_1, B_1, C_1)$, $\vec{n_2}=(A_2, B_2, C_2)$

JEDNAČINE:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

PREDSTAVLJAJU OPŠTI OBLIK JEDNAČINE PRAVE.

KAKO JE RANG SISTEMA $=2 \Rightarrow D=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\neq 0$

JEDNO REŠENJE TOG SISTEMA JE $(x_0, y_0, 0)$ GDE JE

$$x_0=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} -D_1 & B_1 \\ -D_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad y_0=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} A_1 & -D_1 \\ A_2 & -D_2 \end{vmatrix}$$

PREMA TOME KANONSKI OBLIK JE JEDNAK:

$$\frac{X - X_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

KANONSKI → OPŠTI

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \quad \wedge \quad \frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c}$$

$$bx - bx_0 = ay - ay_0 \qquad cx - cx_0 = za - z_0$$

$$bx - ay - bx_0 + ay_0 = 0 \qquad cx - za - cx_0 + z_0 = 0$$

$$bx + ay - bx_0 + ay_0 = cx - az - cz_0 + z_0$$

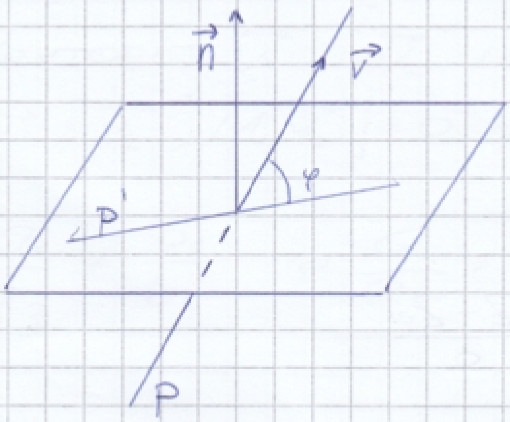
$$(b - c)x + ay + az - (b - c)x_0 + ay_0 - az_0$$

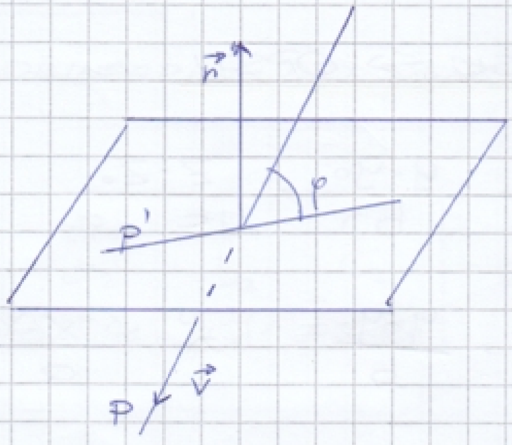
$$\Rightarrow \underline{Ax + By + Cz + D = 0}$$

POLOŽAJ PRAVE I RAVNI

① OBLICI PRAVE - ✓ , OBLICI RAVNI - ✓

② UGAO IZMEDJU PRAVE I RAVNI





To je ugao izmedju prave p i njene ortogonalne projekcije na ravan π, u slučaju da prava p nije normalna na ravan π. (Ako je normalna uzima se $\varphi = 90^\circ$).

Kako je $\measuredangle(\vec{n},\vec{v}) = 90^\circ - \varphi$ (levo) ili $\measuredangle(\vec{n},\vec{v}) = 90^\circ + \varphi$ (desno), to je $\sin\varphi = \cos\measuredangle(\vec{n},\vec{v})$ (levo) ili $\sin\varphi = -\cos\measuredangle(\vec{n},\vec{v})$ (desno)

Oba slučaja se objedinjuju sa $\sin\varphi = |\cos\measuredangle(\vec{n},\vec{v})|$ pa je:

$$\sin\measuredangle(p,\pi) = \sin\varphi = \frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{|\vec{v}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{|aA+bB+cC|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

③ MEDJUSOBNI POLOŽAJ

1) PARALELNE $\rightarrow$ $\vec{v}\perp\vec{n}$ tj. $\vec{v}\cdot\vec{n} = 0$; $M_0 \notin \pi$

$aA + bB + cC = 0$, $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$

2) PRIPADA PRAVA RAVNI $\rightarrow$ $\vec{v}\perp\vec{n}$; $M_0 \in \pi$

$aA + bB + cC = 0$, $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$

3) PRAVA PRODIRE RAVAN $\rightarrow$ $\vec{v}\cdot\vec{n} = aA + bB + cC \neq 0$

(vektori $\vec{v}$ i $\vec{n}$ nisu ortogonalni)

Ako je i $\vec{v}\parallel\vec{n}$, tj. $\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}$ onda je prava p normalna na π.

IZVODJENJE FORMULE ZA KOORDINATE PRODORNE TAČKE

REŠIMO SISTEM:

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

- UZMEMO x, y, z IZ PARAMETARSKIH JEDNAČINA PRAVE p. (IZ PRVE)

$$x = x_0 + at$$
$$y = y_0 + bt$$
$$z = z_0 + ct$$

/ ZAMENIMO U DRUGU

$$t(aA + bB + cC) + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

$$\Rightarrow t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{aA + bB + cC} = -\frac{\vec{r_0}\cdot\vec{n} + D}{\vec{v}\cdot\vec{n}}$$

- UBACIMO t GORE.

b) RADIJUS VEKTOR TAČKE P JE DAT SA:

$$\vec{r} = \vec{r_0} - \frac{\vec{r_0}\cdot\vec{n} + D}{\vec{v}\cdot\vec{n}}\cdot\vec{v}$$

SVOJSTVA SKUPA REALNIH BROJEVA (SA DOKAZOM)

① SKUP A REALNIH BROJEVA JE OGRANIČEN ODOZGO AKO POSTOJI REALAN BROJ M TAKAV DA JE $X \leq M$ ZA SVAKI REALAN BROJ $X \in A$.

— // — OGRANIČEN ODOZDO

m $\quad m \leq X$

SKUP A JE OGRANIČEN AKO JE OGR. ODOZGO I ODOZDO.

BROJ L JE SUPREMUM SKUPA A AKO JE:

1) $X \leq L$ ZA SVAKI BROJ $X \in A$
2) ZA SVAKO $\varepsilon > 0$ POSTOJI BROJ $X \in A$ TAKAV DA JE $X > L - \varepsilon$

BROJ ℓ JE INFIMUM SKUPA A AKO JE:

1) $X \geq \ell$ ZA SVAKI BROJ $X \in A$
2) ZA SVAKO $\varepsilon > 0$ POSTOJI BROJ $X \in A$ TAKAV DA JE $X < \ell + \varepsilon$

② AKSIOMA SUPREMUMA

SVAKI NEPRAZAN SKUP U $\mathbb{R}$ KOJI JE OGRANIČEN ODOZGO IMA SUPREMUM.

③ SVAKI NEPRAZAN SKUP U $\mathbb{R}$ KOJI JE OGRANIČEN ODOZDO IMA INFIMUM.

NEKA JE $A \subset \mathbb{R}$ SKUP KOJI JE OGRANIČEN ODOZDO I NEKA JE M SKUP SVIH DONJIH OGRANIČENJA SKUPA A. KAKO JE $A \neq \emptyset$, TO JE SKUP M OGRANIČEN ODOZGO. PREMA AKSIOMI SUPREMUMA POSTOJI ~~ZNAČI DA JE SUP~~ $\sup M$ (JER JE $M \neq \emptyset$) I VAŽI $\sup M \leq a$ ZA SVAKO $a \in A$. PREMA TOME, BROJ $\sup M$ JE DONJE OGRANIČENJE SKUPA A. PO DEF. SUPREMUMA TO ZNAČI DA JE $\sup M$ NAJVEĆE DONJE OGRANIČENJE SKUPA A ODNOSNO DA JE $\sup M = \inf A$

FUNKCIJE (SVE)

1) AKO SE SVAKOM ELEMENTU $x \in X$ DODELI TAČNO JEDAN ELEMENT $y \in Y$ KAŽEMO DA JE DEFINISANA FUNKCIJA f KOJA PRESLIKAVA X u Y.

F-JA $f: X \to Y$ JE:

a) SIRJEKCIJA AKO JE $f(X) = Y$

b) INJEKCIJA AKO IZ $f(x_1) = f(x_2)$ SLEDI $x_1 = x_2$

c) BIJEKCIJA AKO JE ISTOVREMENO SIRJEKCIJA I INJEKCIJA.

NEKA SU DATE F-JE $f: X \to Y$ i $g: Y \to Z$

F-JA $h: X \to Z$ DEFINISANA SA $h(x) = g(f(x))$ ZA $x \in X$ ZOVE SE KOMPOZICIJA F-JA g i f (U OZNACI $g \circ f$)

NEKA JE F-JA $f: X \to Y$ BIJEKCIJA. F-JU $g: Y \to X$ DEFINISANU SA $g(y) = x$ (GDE JE $y = f(x)$) ZOVEMO INVERZNOM F-JOM F-JE f. (U OZNACI f^{-1})

2) TEOREMA O JEDNAKOSTIMA KOJE KARAKTERIŠU INVERZNO PRESLIKAVANJE

AKO JE F-JA $f: X \to Y$ BIJEKCIJA I AKO JE f^{-1} NJENA INVERZNA F-JA, TADA SU F-JE $f^{-1} \circ f$ i $f \circ f^{-1}$ IDENTIČNA PRESLIKAVANJA.

DOKAZ
$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$$
$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$$

3) ZA KOMPOZICIJU F-JA VAŽI ASOCIJATIVNI ZAKON

$f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, $h: Z \to U$

$$\boxed{h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f}$$

IZ DEFINICIJE KOMPOZICIJE F-JA SLEDI DA JE ZA SVAKO $x \in X$

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$
$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$$

KARDINALNI BROJEVI (BEZ DOKAZA)

(1) PARTITIVNI SKUP je skup svih podskupova skupa A.

BIJEKCIJA ✓

DVA SKUPA IMAJU ISTU MOĆ AKO POSTOJI BIJEKCIJA IZ JEDNOG U DRUGI SKUP. ZA TAKVE SKUPOVE SE KAŽE DA SU EKVIVALENTNI.

SKUP JE BESKONAČAN AKO JE EKVIVALENTAN NEKOM SVOM PRAVOM PODSKUPU, A U PROTIVNOM JE KONAČAN.

NPR. SKUP N JE BESKONAČAN JER JE EKVIVALENTAN SVOM PODSKUPU $2N$ (PARNI PRIRODNI BROJEVI)

(2) KANTOR - BERNŠTAJNOVA TEOREMA

AKO ZA SKUPOVE A i B VAŽI $\text{card}A \leq \text{card}B$ i $\text{card}B \leq \text{card}A$ TADA JE $\text{card}A = \text{card}B$.

IZ OVE TEOREME MOŽEMO ZAKLJUČITI DA SU SKUPOVI A i B EKVIVALENTNI UKOLIKO POSTOJI PRAVI PODSKUP SKUPA A KOJI JE EKVIVALENTAN SKUPU B, POSTOJI PRAVI PODSKUP SKUPA B KOJI JE EKVIVALENTAN SKUPU A.

(3) SKUPOVI A i $P(A)$ NISU EKVIVALENTNI AKO JE A NEPRAZAN SKUP

X

PREBROJIVI I NEPREBROJIVI SKUPOVI (SA DOKAZIMA)

1) EKVIVALENTNI SKUPOVI ✓

AKO NJEGOVI ELEMEN[TI] MOGU DA SE POREDJA[JU] U NIZ

SKUP KOJI JE EKVIVALENTAN SKUPU $\mathbb{N}$ JE PREBROJIV.
BESKONAČAN SKUP KOJI NIJE PREBROJIV JE NEPREBROJIV.

2) PREBROJIVOST SKUPA RACIONALNIH BROJEVA IZ $(0,1]$

OVAJ SKUP JE PREBROJIV JER NJEGOVI ELEMENTI MOGU DA SE POREDJAJU U NIZ:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots$$

3) UNIJA PREBROJIVO MNOGO PREBROJIVIH SKUPOVA JE PREBROJIV SK[UP]

NEKA SU $A_1, A_2, \dots$ PREBROJIVI SKUPOVI I NEKA JE $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$

(NJIHOVA UNIJA)

AKO JE:

$$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots\}$$
$$A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots\}$$
$$A_3 = \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, \dots\}$$
$$\vdots$$

ELEMENTE SKUPA A MOŽEMO DA POREDJAMO U NIZ UZIMANJEM ELEMENATA PO DIJAGONALAMA, UZ IZOSTAVLJANJE ELEMENATA KOJI SE PONAVLJAJU.

SKUP $(0,1)$ JE NEPREBROJIV

PRETPOSTAVIMO SUPROTNO. AKO SU

$$a_1 = 0,a_{11}a_{12}\ldots a_{1n}\ldots$$
$$a_2 = 0,a_{21}a_{22}\ldots a_{2n}\ldots$$
$$a_n = 0,a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn}\ldots$$
$$\vdots$$

SVI ELEMENTI SKUPA $(0,1)$, ONDA JE BROJ

$$a = 0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots \qquad \left(\alpha_k \neq a_{kk}\ (k\in N)\right)$$

RAZLIČIT OD BILO KOG OD NJIH I TAKODJE PRIPADA SKUPU $(0,1)$. KONTRADIKCIJA!