УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Братислав Ј. Петровић

ТЕОРИЈА СИСТЕМА

Београд 2008.

ТЕОРИЈА СИСТЕМА

Проф. др Братислав Ј. Петровић

Рецензенти:

др Миодраг Ракић, редовни професор Електротехничког факултета Универзитета у Београду

др Бранко Ковачевић, редовни професор Електротехничког факултета Универзитета у Београду

Издаје и штампа:

Факултет организационих наука
Београд, Јове Илића 154
http://www.fon.bg.ac.yu

e-mail: epetrovb@fon.fon.bg. ac.yu

За издавача:

Декан

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

519.876 (075.8)

ПЕТРОВИЋ, Братислав Ј.
Теорија система / Братислав Ј. Петровић. - Београд: Факултет организационих наука, 1998 (Београд: Факултет организационих наука). - VIII, X, 421 стр.: граф. прикази; 24 cm

На врху насловне стр.: Универзитет у Београду. - Тираж 200. - библиографија: стр. 413 - 414. - Регистар.

ISBN 86 - 80239 - 28 - 3

а) Теорија система

ID = 66146828

Тираж: 200 примерака

МАРИ и ЈОЦИ

С А Д Р Ж А Ј

Предговор

Посматрајући савремену науку у целини, тешко је да ћемо наћи реч која се користи чешће од појмова *"систем"* и *"Теорија система"*. Научници и практичари из многих области: физичари, инжињери, биолози, социолози, лингвистичари, кибернетичари, психолози, економисти, информатичари, изучавају разнородне системе, методе њиховог описивања и проучавања. Због чега се од самог свог настанка Теорија система развила у научну дисциплину која је изгледа предодређена да утиче на све видове савременог друштва. Најпре изучавана као Теорија управљања од инжињера и математичара, Теорија система се сада све више и више укључује у проучавања економије, маркетинга, организационих наука, биологије, политичких наука, социологије и психологије. Шта је Теорија система и због чега је толико значајна за толико разнородних посебних области?

Теорија система или наука о системима кроз општу замисао система и управљања системима пружа разноврсну и делотворну методологију за проучавање и прорачун образовања различитих система, без обзира на њихову посебну физичку природу и начин рада. Једно од најважнијих гледишта при проучавању и образовању система је развој квантитативног модела који описује зависности узрока и деловања и узајамна дејства између променљивих система. Због тога је језик теорије система математика и сваки озбиљан покушај да се научи Теорија система мора да се заснива на познавању математике и математичкој прецизности.

У првим књигама о Теорији система разматране су углавном диференцијалне једначине, Фуријеова и Лапласова трансформација, преносне функције и поступци фреквентног домена. Друга генерација књига о системима увела је идеје променљиве стања и оживела проучавање линеарних система у временском домену. Трећа генерација спаја у целину прву и другу генерацију трансформационих метода са методама променљиве стања, разматрајући на јединствен начин временски непрекидне и временски дискретне системе и обухвата класичне линеарне системе и аутомате. Потом је Теорија система кренула разлазним путевима што већег уопштавања са једне стране (користећи све сложеније математичке структуре, које се по правилу недо-вољно изучавају на техничким факултетима) и укључивања у посебне науке и развој посебних поступака (при чему се уносе сва ограничења и особености одређене научне дисциплине). Међутим, развој рачунарске технике и одговарајуће програмске подршке, уз све већу доступност PC рачунара променили су те токове и подстакле њихово поново непосредно прожимање. Због тога су неопходни нови уџбеници четврте генерације књига о системима, који би се састојали из три повезана дела који се прожимају. У складу са тим, уџбеник за Теорију система чине:

а) Ова књига, *"Теорија система"*, која даје теоријске основе за проучавање система,

б) Књига *"Теорија система: Збирка проблема и задатака са решењима"* садржи детаљно решене задатке који разјашњавају појмове и поступке из дела уџбеника *"Теорија система"*, као и проблеме који допуњују и продубљују појмове и поступке из различитих области математике који су неопходни за успешно праћење излагања у теоријском делу уџбенику, а који се на жалост недовољно изучавају на техничким факултетима.

в) Књига *"Нумеричка и симболичка израчунавања у Теорији система"* садржи рачунске задатке и проблеме који се решавају коришћењем најновијих софтвера за нумеричка и симболичка израчунавања: Matlab, Reduce, Mathematica и Maple.

Пишући ову књигу покушали смо да развијемо педагошки увод у теорију система који ће бити прихватљив читаоцима са основним предзнањима из математи-ке која се изучава на нашим универзитетима, а да истовремено заинтересујемо и под-стакнемо читаоце који су математички и систем-теоријски искуснији и образованији. При томе смо се ослањали на прва заокружена излагања теорије система у *Linear System Theory* (Zadeh, Desoer, 1963), *System Theory* (Padulo and Arbib, 1974), која су разви-јена у монографији *Topics in Mathematical System Theory* (Kalman, Falb and Arbib, 1969) и проширена у монографији *General Systems Theory: Mathematical Foundations* (M. D. Mesarovic and Y. Takahara, 1975). Овај прилаз показује да су многе замисли корисне за нелинеарне системе исте као и за линеарне системе; да временски-дискретни системи нису посебан предмет страховања као што би могло да се учини због њиховог изучавања на крају већина књига; као и да постоје неки проблеми код линеарних система које је много лакше решити јединственим приступом него матричним манипулацијама. То не пориче постојање посебних, моћних и корисних поступака, нарочито за линеарне системе, који су такође изложени у књизи.

Као и већина уџбеника, ова књига је проистекла из предавања које је аутор држао последњих осам година на Факултету организационих наука Универзитета у Београду студентима Смера за информационе системе, током двосеместралног или једносемстралног курса из Теорије система. При томе је књига више пута преуређивана и коначно тако уобличена да буде што потпунија и општија, да се не ослања на поједине дисциплине и да садржи скоро све неопходне математичке структуре и методе које се уводе и проучавају када је то потребно. Сви појмови се уводе природно и постепено да би се схватила одговарајућа основна идеја, а потребне математичке структуре и методе постепено, држећи се принципа што веће једноставности и математичке строгости са једне стране, уз што већу примењљивост са друге стране.

Да би се лакше схватиле и разумеле апстрактне идеје из теорије система и њихове везе са математиком, нумеричком анализом, операционим истраживањима, информационим системима и програмирањем, симулацијом и динамиком организационих система, различитим организационим наукама, уџбеник садржи велики број детаљно решених примера са нагласком на организационе, економске и производне системе. Међутим, садржај књиге је схватљив и разумљив чак и ако се ти примери изоставе, те се уџбеник може користити и на другим факултетима на којима се изучава Теорија система или Теорија управљања системима у било ком обиму и облику.

У прва три поглавља проучавају се општи системи, уз стално размишљање о теорији линеарних система. Од половине четвртог поглавља, детаљније се изучава теорија линеарних система у светлу јединственог приступа проучавању општих система. Књига је подељена на 9 поглавља.

У првом поглављу - "*Системи и појам стања*", проучавају се системи и модели, корак по корак полазећи од улазно-излазног описа. Природно се уводи појам стања и детаљно изучавају особине стања и модела улаз-стање-излаз; померање у времену и временска непромењљивост , као и детерминистички и недетерминистички модели система.

Друго поглавље - "*Динамика система и основне функције прелаза*", обухвата основне функције прелаза за временски-дискретне системе, основне описе временски непрекидних система, векторске просторе и појам базиса. У одељку "Неки математички простори" проучавају се различити метричке простори и природно уводи Банахов простор у коме се могу проучавати најопштије замисли Теорије система. За разлику од књига из претходних генерација, детаљно је разматран проблем избора стања и превођење различитих модела у облик погодан за проучавање методама Теорије система.

Понашање система улаз-излаз и функције одзива, линеарност, описивање и представљање линеарног система, линеаризација система и апроксимација система, улазно-излазни описи временски дискретних система и Z-трансформација изучавани су у трећем поглављу *"Линеаризација и линеарни системи"*. Појам извода у Банаховим просторима, уведен при изучавању линеаризације модела система, кори-стићемо у осмом поглављу када проучавамо стабилност система.

Док су у прва три поглавља проучавани начини добијања различитих модела система, суштински појмови савремене Теорије система, достижљивост и осмотри-вост, проучавани су у четвртом поглављу *"Достижљивост и осмотривост"*. Уведе-не су опште дефиниције, детаљно проучене достижљивост и управљивост у дискретном времену, простори са унутрашњим производом и придружена преслика-вања. Из општих дефиниција изведена је дуалност достижљивости и осмотривости временски дискретних линеарних система.

Сложеније математичке структуре и методе који су неопходни за описивање и проучавање временски непрекидних система разматрани су у петом поглављу - *"Целокупно понашање временски непрекидних система"*. Природно је објашњен прелаз са дискретног времена на непрекидно време за временски-променљиве временски-непрекидне системе, одређени услови постојања решења система дифе-ренцијалних једначина и начини решавања на основу теореме о фиксној тачци. Та општа теорија је искоришћена за решавање линеарних векторских диференцијалних једначина и проучавање особина матрице прелаза стања. Изучени су описи излаз-улаз система, уз строго математичко разматрање Диракове јединичне импулсне и Хевисајдове јединичне одскочне функције коришћењем теорије дистрибуција, као и еквивалентни системи и реализације.

У шестом поглављу - *"Стационарни линеарни системи"*, у оквирима уведеног јединственог прилаза, разматрани су матрични експонент и решење система линеар-них диференцијалних једначине са константним коефицијентима, дијагонализација и развој по сопственим векторима, Jordan-ова канонична форма, које се појављају у књигама друге генерације из Теорије система при проучавању система у простору стања. Проучене су и класичне трансформационе методе и фреквентни домен, блок-дијаграми, графови тока сигнала и скаларне преносне функције.

Користећи опште дефиниције из четвртог поглавља и математички апарат из претходна два поглавља, у седмом поглављу - *"Управљивост и осмотривост у непрекидном времену"* изучени су управљивост у непрекидном времену, управљивост временски инваријантног система у непрекидном времену и осмотривост временски непрекидних линеарних система.

У осмом поглављу - *"Увод у теорију стабилности"* уведени су основни појмови и дефиниције, проучене квалитативне особине стабилности стања, стабилност улаз-излаз и стабилност у смислу Љапунова, као и критеријуми за њихово испитивање.

У завршном деветом поглављу - *"Управљање системима и повратна спрега"*, користећи претходна знања проучавани су начини управљања системима: повратна спрега, управљивост и канононичке форме, обсервери и контролери, као и управља-ње линеарним системима са више улаза и више излаза.

Списак литературе садржи дела која су коришћена приликом писања и уобли-чавања ове књиге, као и дела из којих би читаоци могли да се детаљније упознају са одређеним проблемима и посебним методама њиховог решавања. У *Списку појмова* наведене су кључне речи које се појављују у тексту књиге.

Велику помоћ у припреми прве верзије ове књиге: *"Теорија система"*, Скрипта за студенте Факултета организационих наука, Београд 1991, пружили су моји студен-ти из генерације Радмиле Јаничић; док су студенти из генерације Ане Савић и Мило-ша Костића знатно допринели њеном завршавању, на чему им се захваљујем.

Посебно се захваљујем се др М. Ракићу и др М. Матаушеку, професорима Електротехничког факултета у Београду, др Ј. Меданићу са University of Illinois at Urbana Champaign, Illinois, USA др Б. Лазаревићу, др С. Бингулцу, др П. Пејовићу и др С. Дајовићу професорима Факултета организационих наука на дугогодишњој подршци и саветима. Колеге др С. Станковић и др Б. Ковачевић, професори Електро-техничког

факултета у Београду су својим корисним саветима допринели коначном уобличавању ове књиге, на чему им се искрено захваљујем. У ову књигу је уграђена и дугогодишња сарадња и пријатељство са проф. З. Гајићем са Rutgers University, New Jersey, USA и дружење са проф. В. Бајићем са Technikon Natal, Durban, South Africa.

Унапред се захваљујем свим колегама, професорима и студентима, који ће указати на недостатке ове књиге, којих свакако има, како би наредна издања била бар без штампарских грешака.

Београд, 1997. Братислав Ј. Петровић

УВОД

Машине, летилице и возила састављени на основу твојих квантитативних, математичких процена ослањају се на три елемента, који су потпуно лишени квантитативности. То су: једнина, тачка и садашњи тренутак. Само збир једнина чини количину; сама једнина лишена је сваке количинске самерљивости. Што се тачке тиче, пошто нема ниједну димензију, ни ширину, ни висину, ни дубину, она није подложна ни мерењу ни рачунању. Најмањи састојци времена пак, увек имају један заједнички именитељ; то је тренутак садашњости, а он је такође лишен квантитета и несамерљив.
Тако основни елементи твоје квантитативне науке представљају нешто чијој је самој природи туђ сваки квантитативни прилаз. Како да онда верујемо таквој науци? Зашто машине начињене по мери тих квантитативних заблуда имају тако кратак век, краћи од људског три, четири или више пута?

М. Павић: ”Веџвудов прибор за чај“
”Гвоздена завеса“

У савременој науци и техници тешко може да се нађе нека реч која се користи чешће од појма ”систем“, а која има толико различитих значења и тумачења. Тако се под системом подразумева ”скуп елемената у узајамним везама“ (L. von Bertalanffy); ”било који скуп променљивих доступних на стварном уређају“ (W. Ross Ashby); ”скуп објеката заједно са релацијама између објеката и њихових атрибута“ (A.Hall and Fagen); ”скуп активности (функција) које су и просторно и временски повезане скупом доношења одлука и праксом понашања-развоја (тј. управљања)“ (S.Sengupta and R. Ackoff; ”било шта што се састоји од узајамно повезаних делова“ (St.Bear) и ”пресликавање једног скупа (улази и стања) у други (излази)“ (М. Месаровић). Више од тридесет различитих дефиниција система анализирано је у ”*Systems Theory: philosophical and methodological problems*“ (Blauberg I.V.). Многи напори да се утврди одређено опште прихваћено значења система остали су за сада без успеха.

И поред различитих значења појма ”систем“, због историјских и практичних извора настајања, њихова упоредна анализа указује на два кључна стајалишта. Прво, систем као посебан објекат је супротан несистему, као што је мноштво, множина (неки скуп елемената) супротно јединки, појединачном (објекат који се састоји од једног или највише неколико елемената). Друго, систем се јавља не само као скуп већ као повезан скуп елемената који поседује целовитост услед њихових повезаности. Између ових гледишта, неке од постојећих дефиниција истичу множину елемената система, друге су усредређене на узајамна деловања елемената система и на његову целовитост. Полазећи од целовитости система можемо да дефинишемо систем преко следећих својстава: (1) систем је сложена целина узајамно повезаних елемената; (2) он образује посебну целину са околиним (у неком проблемима систем не може да се посматра одвојено од околине, али то не значи да су сви проблеми проучавања система и структура такве природе); (3) обично је испитивани систем елеменат система вишег реда (тј. у другим проблемима он може да се појави као подсистем или елеменат ширег система); (4) елементи било ког проучаваног система са своје стране се обично јављају (поново у посебним проблемима) као системи нижег реда. При томе, треба обратити посебну пажњу на хијерархијски карактер система која је уско везана за његову целовитост. Та хијерархија се исказује и кроз низ инклузија једног система у други и кроз узајамна деловања појединих подсистема, укључујући и њихов допринос посматраном систему.

Са друге стране, приликом дефинисања система појавиће се многе потешкоће, од којих су следеће две најбитније. Прва је захтев да се концепт система користи у најразличитијим областима научних и практичних деловања са очигледно различи-тим значењима. Друга потешкоћа је повезана са непостојањем епистемолошких[1] критеријума за придруживање атрибута система појединим објектима. Добро је познато да практично било који објекат може да се представи као систем одређивањем скупа елемената у њему, заједно са релацијама и узајамним деловањима између њих, и утврђивањем његових скупних карактеристика. Међутим, веома је тешко (ако је уопште и могуће) одредити нетривијалне поступке и методе које захтева представљање система таквих објеката као система посебних знакова неког језика.

Да би се то превазишло Bertalanffy је предложио своју општу теорију система као неку философију науке. Та теорија треба да проучава фундаменталне процесе који су толико општи да обухватају појаве из било које научне дисциплине. Теорија мора да буде интердисциплинарна и ослобођена унутардисциплинарних оквира и гледишта без обзира колико је одређена дисциплина добро развијена. Посебно је издвајао математику, тврдећи да би развој математичке теорије општих система противуречио основним појмовима опште теорије система. Међутим, Norbert Wiener је постављајући основе *кибернетике* - науке о управљању, добијању преносу и обради информација у управљивим системима, показао да међудисциплинарни проблеми могу да се решавају математичким методама, указујући на особеност и важност процеса управљања разнородним појавама у природи. Тежња да се појмови изразе јасно, тачно и строго на језику математике не садржи никаква ограничења. Напротив, основна опасност при развијању теорије, а нарочито међудисциплинарне теорије, крије се у нејасној, непрецизној основи која допушта различита тумачења. Док је Bertalanffy проучавао аспекте система који су повезани са теоријом општих система као науком о универзалним законима и принципима, који истовремено важе у биолошким, физичким, друштвеним и другим појавама, нас интересује општа теорија система која изучава општа својства формалних релација објеката које проучавамо, те није неопходно да се она позива на неку уску дисциплину, јер је било која формална теорија по својој природи међудисциплинарна.

Иако се настанак теорије система обично везује за Bertalanffy-ја, руски научник А.А. Богданов је још почетком двадесетог века проучавајући опште проблеме природних наука успоставио теорију организације, уводећи појам организације као један од основних појмова. Према тој теорији, материја постоји у времену и простору и увек има неки облик организације, а истовремено организацију не можемо замислити без њеног материјалног носиоца. Основа за образовање теорије је чињеница да је број организационих структура релативно мали, без обзира на стварне различите облике материје који постоје у природи. То је показао многобројним примерима различите природе. Испитујући развој организације није је проучавао само статички, већ је изучавао и различите облике особености начина избора који одређују еволуцију

[1] епистемологија (грчки, επιστημη знање, сазнање, наука, логика) теорија сазнања; наука о аксиомима философије.

организације. Напоменимо да је Богданов користио неке математичке резултате и идеје познатог српског математичара М. Петровића-Аласа.

Теорија система је научна дисциплина која изучава различите појаве без обзира на њихову конкретну природу, а заснива се само на формалним везама између различитих чинилаца и на начинима њихових промена под утицајем спољних услова. При томе се сви резултати објашњавају само узајамним деловањем њихових компоненти, на пример карактером њихове организације и узајамним утицајима, а не помоћу непосредног разматрања природе самих појава и њихових начина рада (било да су оне физичке, биолошке, социолошке, организационе или чисто концептуалне). За теорију система објекат изучавања није "физичка стварност", рецимо физичка, хемијска, биолошка или социолошка појава, већ "модел система": формална узајамна веза између посматраних особина и основних својстава (атрибута). Из концепцијских разлога, језик који се користи за описивање понашања система је језик обраде информација и налажења решења (теорија управљања). При томе могућност да се изучава понашање система испитивањем протеклих процеса избора решења или механизама, који обезбеђују сврсисходност његовог понашања, има кључну важност.

Проучавање математичких модела је увек повезано са неком "алгебром" - правилима деловања над изучаваним објектима, која одражавају везе између узрока и последица. Када је таква алгебра довољно развијена, кажемо да је у оквирима датог модела настала теорија, најчешће мислећи на детаљно развијену теорију. Поједине чињенице теорије - тврђења, теореме - понекад зовемо закони (на пример, други Њутнов закон механике, Омов закон у електротехници, закон понуде и потражње у економији). Такође се и низ полазних феноменолошких претпоставки, које су добро проверене огледима, називају закони. Због тога се каже да се теорија заснива на одговарајућим законима и моделима.

Образовање модела је увек неформализована процедура и она веома много зависи од истраживача, његовог искуства, талента, увек се ослања на одређене експерименте, те често кажемо да процес моделовања има феноменолошку основу. Модел мора да довољно добро описује појаву и да буде погодан за коришћење. Зато је степен детаљизације модела, облик његовог представљања одређен сврхом и циљевима истраживања и непосредно зависи од истраживача. На основу једних истих експерименталних података, различити истраживачи могу доћи до различитих модела. Нови експериментални подаци могу довести до побољшања модела тако да рани-ји модел постане његов посебан случај. Такву је судбину доживела Њутнова механи-ка која је дуго била чисто феноменолошки модел. Међутим после појаве специјалне теорије релативности она је постала њена последица, јер се може извести из ње за брзине кретања много мање од брзине светлости.

Нагласимо суштинску разлику између класичних метода приближне анализе (апроксимације) и прилаза који се заснива на коришћењу апстрактнијих модела. У првом случају и даље користимо исту математичку структуру као и раније, а упрошћење се постиже одбацивањем оних делова модела који се сматрају мање важним. На пример, диференцијалну једначину петог реда можемо заменити једначином другог реда, посматрајући само две "доминантне", променљиве стања. Међутим, код другог приступа можемо да користимо друге математичке структуре, структуре које су апстрактније, али које још увек разматрају цео систем, на мање детаљизираном нивоу. У овом случају упрошћење се не постиже смањивањем броја променљивих, већ одбацивањем детаља које сматрамо небитним.

Структурна разматрања имају првостепен значај и при анализи и при синтези система различите врсте и природе. Више је него лоша стратегија почети истраживање детаљног математичког модела пре него што су проверене основне претпоставке и достигнуто дубље поимање начина рада система. Много је делотворније, посебно код система који се састоје од много узајамно повезаних подсистема, најпре одредити основне подсистеме и установити главне узајамне везе између њих, а затим прећи на детаљно моделовање начина рада различитих подсистема. Обично инжењери употребљавају принципске схеме за приказивање опште структуре система, као и за упрошћавање рада при даљем структуирању и добијању аналитичких модела. Основа привлачности принципских схема је њихова једноставност, док им је главни недостатак одсуство прецизности. Модели теорије система одклањају тај недостатак уношењем у описивање прецизност математике, док при томе задржавају њихову предност - једноставност принципских схема.

Теорија система нам даје и језик за међудисциплинарну размену научних резултата, пошто је она довољно општа да не уноси своја сопствена ограничења, а истовремено због своје прецизности одклања могућности опасних обмана. На пример, различита схватања и тумачења појма ”адаптације“ у психологији, биологији, техници и другим областима науке, могла би најпре да се формализују језиком теорије система, а затим међусобно упореде. Често се тврди да теорија система мора да одражава ”инваријантне структурне“ видове различитих система које сусрећемо у свакоднев-ном животу, тј. те видове њиховог понашања који остају неизмењени у аналогним појавама у разним областима сазнања. Одговарајућу сличност можемо заиста устано-вити само тада када су одговарајући појмови одређени довољно пажљиво и прецизно. У супротном, опасност да дође до збрке је исувише велика. То указује да је сасвим оправдано да разматрамо теорију система као основу за формализацију било ког концепта система. Приликом коришћења теорије система за дефинисање појмова неопходно је имати у виду да одлучујући чинилац није то да ли је та дефиниција исправна приликом сваког од могућих тумачења, већ да ли је тај појам дефинисан довољно прецизно, тако да га можемо јасно и недвосмислено разумети и као таквог надаље испитивати и користити у другим дисциплинама. У том смислу теорија система може да пружи језик за међудисциплинарну размену. Са чисто математичког становишта, слична примена теорије система може да изгледа тривијална, али то није тако са гледишта управљања напорима специјалиста из различитих области који заједно раде на решавању сложених проблема, као што често бива у организационим проблемима повезаним са управљањем и развојем предузећа, градова, области и другим великим пројектима.

Глава 1

СИСТЕМИ и ПОЈАМ СТАЊА

У оквиру овог курса покушаћемо да образујемо и развијемо математичку основу помоћу које можемо не само да проучавамо велику класу система, већ и да развијемо и добијемо поступке за анализу и синтезу система који би се понашали на жељени начин. При томе је кључан појам *модел система*, те ћемо најпре у одељку 1-1 видети како потреба да се схвати и разуме систем у стварном свету тражи од нас да издвојимо само неке битне особине и променљиве постојећег система ради што бољег уочавања и поимања појава и рада посматраног система. Та разматрања математички ћемо описати у одељку 1-3, пошто наш опис система захтева да одредимо *улазе*, или управљања која би на њега деловала, као и *излазе* који представљају наша могућа разматрања система (или утицаје које очекујемо да систем има на друге системе). Да би изложили те концепте у општем, али и сажетом облику, користићемо савремене математичке појмове и ознаке теорије скупова. Преглед основних, за почетак потребних појмова и ознака дат је у одељку 1-2. Неопходне математичке структуре и поступке уводићемо и проучаваћемо када то природно буде неопходно. Показаће се да улазно-излазни описи не испуњавају све наше захтеве, на пример не дају једнозначну зависност између улаза и излаза, већ морају да се знају и променљиве које сачињавају унутрашње стање описаног система. Тако ћемо у одељку 1-3 природно доћи до појма стања система и проучити релацију улаз-излаз-стање и њихове особине и односе. У одељку 1-5 детаљно ћемо изучавати особине стања и једначине прелаза стања као и начине њиховог одређивања. При томе ћемо стално имати на уму да је овај сам по себи тежак проблем израженији код организационих система него код техничких система, не само због њихове сложености и разнородности већ и због непостојања "основних наука", које би попут природних наука код техничких система, омогућиле релативно лако и једнозначно описивање појава које се у њима одвијају. Такође ћемо изложити шта подразумевамо под временски непрекидним (континуалним) системима и временски дискретним системима. У одељку 1-6 проучаваћемо када је систем временски променљив, а када временски непроменљив. У одељку 1-7 посматраћемо системе код којих текуће стање и приспели улази не одређују тачно будуће стање, већ само са неким вероватноћама. Међутим, у овим излагањима придаваћемо већу важност класи система који су детерминистички у смислу да познавање текућег стања потпуно одређује текући излаз система; док знање стања у тренутку t_0 и познавање улаза од тренутка t_0 до неког наредног тренутка t_1 потпуно одређује стање у тренутку t_1. Видећемо да постоје и "неразговетни" системи (*fuzzy system*, *нечеткая система*) код којих само познавање текућег стања и будућих улазних дејстава не омогућава да се јасно (у смислу традиционалне математике) одреде будућа стања. Подвуцимо да су уведени концепти веома општи и да важе без обзира да ли је посматрани систем линеаран или није. У ствари, све до трећег поглавља када ћемо проучавати линеарне системе, нећемо посебно изучавати линеарне системе, сем у неким примерима.

1-1 СИСТЕМИ И МОДЕЛИ

У постојећем свету свакодневно срећемо стварне, разнородне физичке објекте - путеве, народе, електронске уређаје, псе или мачке, свемирске бродове и програме за рачунаре. Све те стварне објекте зваћемо **физички системи**. Појам "физички" користићемо у његовом изворном значењу, те ћемо под физичким системима подразумевати стварне, постојеће системе без обзира на њихову природу или порекло.

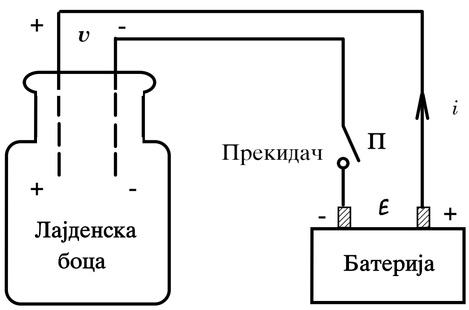
Чим почнемо да размишљамо о једном од тих физичких система, ми формулишемо **модел** објекта сужавајући се, често нехотице, на неки мали број особина и основних својстава (атрибута) кроз које га сагледавамо. На пример, када чујемо "посматрајмо физички систем зван персонални рачунар", вероватно помислимо на мали објекат (централна јединица са процесором, уређајем за дискете и диском, тастатура, монитор, штампач, "миш" и оперативни програми - DOS, Windows, UNIX) који нам омогућава да одговарајућом обрадом улазних података проучавамо различите појаве. Приликом састављања или поправке персонални рачунар посматрамо као скуп електронских и механичких делова. За свакодневни живот је кратки списак споменутих основних својстава вероватно одговарајући модел персоналног рачунара. Међутим, за децу је то "чаробна кутија" пуна занимљивих игара, што их упућује на сасвим другачији модел истог рачунара.

Уочавамо да за посматрани физички систем, бирамо модел система који одговара оним основним својствима (атрибутима) система о којима водимо рачуна у датим околностима.

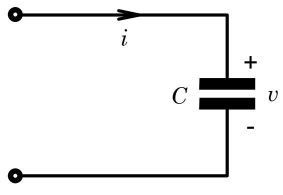
Када смо једном изабрали модел за проучавани систем, тада морамо да одлучимо о начину на који ћемо говорити о моделу и шта намеравамо да радимо са њим. У случају да желимо да анализирамо модел и проучавамо га математички или помоћу рачунара, неопходна нам је математичка представа и математички опис модела, тј. неки скуп математичких релација и једначина које описују модел. Чак и када једначине савршено описују модел, ако модел није потпун опис физичког систе-ма, једначине не могу да нам кажу превише о систему, без обзира колико их пажљиво и тачно решимо.

Проучимо најпре једноставан систем из средњошколске физике и његов модел, идеалан кондензатор.

<u>Пример 1</u>: Лајденска боца или кондензатор, приказана симболички на слици 1-1(а), прикупља наелектрисања на двема танким металним тракама које су приказане испрекиданим линијама.



Слика 1-1 (а) Цртеж стварног физичког система



Слика 1-1 (б) Идеалан кондензатор капацитивности C

Takође je приказана батерија са напоном $\mathcal{E}$, који проузрокује проток струје i у смеру означеном стрелицом и напон u на крајевима боце када је прекидач П затворен. Одговарајући модел Лајденске боце је **идеалан кондензатор** који се симболички представља као на слици 1-1(б), где је i ознака за струју кроз кондензатор, u ознака напона на кондензатору, а константа C је капацитивност. Стрелица и знакови + и - указауjу на референтни смер или поларитет за i и u у сваком тренутку времена.

Математички опис модела кондензатора на слици 1-1(б) је једначина коју је експериментално одредио Фарадеј (M. Faraday)

$$q(t) = C\,u(t) \tag{1}$$

где $q(t)$ означава количину електрицитета, а $u(t)$ напон на кондензатору у тренутку t. Пошто је електрична струја брзина протицања количине електрицитета у јединици времена, $i(t) = dq(t)/dt$, када диференцирамо обе стране једначине (1) по t, добијамо други математички опис

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\,Cu(t) = C\frac{du(t)}{dt} \tag{2}$$

који повезује струју и напон у нашем моделу.

Трећи, најопштији и најпоптпунији математички опис су Maxwell-ове једначине

$$\begin{gathered} \nabla \times H = j + \frac{\partial D}{\partial t} \\ \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla\, D = \rho \\ \nabla\, B = 0 \end{gathered} \tag{3}$$

које повезују јачину магнетног поља H, јачину електричног поља E, густину помераја електрицитета D, густину магнетног флукса B, вектор густине електричне струје j и густину наелектрисања ρ.

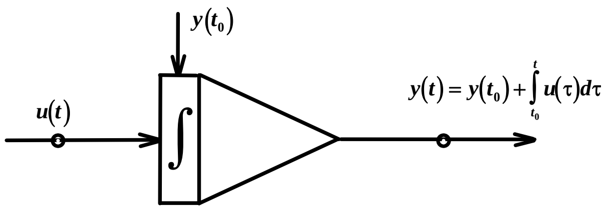
Коју од ових математичких представа би најрадије применили ако се захтева да одредимо количину електрицитета нагомилану у Лајденској боци када на њу делује напон од 5 волта? У случају да знамо да решимо једначине (1), (2) или (3), било који од ових модела кондензатора би нам одредио количину електрицитета на Лајденској боци. Очигледно је прва математичка представа много лакша за рад од решавања диференцијалне једначине (2) или парцијалних диференцијалних једначина (3). Решење је $q = 5C$.

Када променимо питање у ”која је количина електрицитета на Лајденској боци ако се на њене крајеве доведе напон од 5 милиона волта“ (5×10^6), према релацији (3) је $q = 5 \times 10^6 C$. Међутим, једино што може да се деси када покушамо да прикључимо 5 милиона волти на малу Лајденску боцу је да ће доћи до пробијања изолације или можда до ломљења, те је уствари исправан одговор да ће на Лајденској боци бити наелектрисање $q = 0$, без обзира шта каже наш модел. ○

Када се мало удубимо у различите појаве које смо изучавали у средњошколској физици и њихове математичке описе, које смо звали ”закони“, ако ”заборавимо“ физичко значење променљивих и константи, приметићемо да су многи од њих истог облика. Пошто се два система различита по физичкој природи понашају на аналогни начин, математички описи њиховог понашања биће исти те је могуће проучавати понашање једног система проучавајући понашање аналогног система. Коришћени принцип називамо *непосредна аналогија*, јер постоји непосредно подударање у понашању одговарајућих променљивих оба система. На пример, исто се понашају механички резонантни систем који се састоји од редне везе масе и опруге и трења, и електрични резонантни систем који се састоји од кондензатора, индуктивности и отпорника, те су оба описана истим математичким релацијама. Јединa разлика у математичким описима њиховог понашања потиче од различитог физичког значења променљивих и коефицијената. Међутим, не постоји увек аналогија у понашању различитих физичких система што ограничава употребу овог принципа. Проблем би могли да превазиђемо када би могли основне математичке операције које се јављају у описима понашања система да остваримо неким физичким појавама. Тананије разматрање корена непосредне аналогије - Лајбницових монада и Њутнове идеје диференцијално-интегралног рачуна и замисли математичке и материјалне тачке природно нас наводе како да то урадимо. На пример, посматрајмо ”пуњење“ кондензатора: у неком тренутку t укупна количина електрицитета на кондензатору $Q(t)$ је једнака (бесконачном) збиру свих наелектрисања (бесконачно малих количина електрицитета) $q(t)$ протеклих кроз кондензатор за неко време под дејством спољашњег напона $u(t)$. Сећајући се дефиниције интеграла, видимо да процес ”пуњења“ кондензатора може да обави математичку операцију интеграљења. Коришћени принцип називамо *посредна аналогија,* јер се не захтева непосредна аналогија у понашању одговарајућих променљивих проучаваног система и променљивих аналогног рачунара. На тај начин могу се проучавати појаве сасвим различите по физичкој природи и степену сложености које се јављају у електричним и механичким системима, организационим и социолошким системима, итд., чак и апстрактни математички проблеми.

Према томе, уређај који користи основне операције сабирања, множења и интеграљења за симулацију понашања система и решавање диференцијалних једначина назваћемо **аналогни рачунар.**

Пример 2: Видели смо да електронски аналогни рачунари садрже уређај који дати временски-променљив сигнал u на улазу (који добија вредност $u(t)$ у тренутку t) претвара у излазни сигнал y, чија је вредност $y(t)$ у тренутку t, који изгледа као интеграл улаза после неког скупа операција. Модел таквог електронског кола је **идеалан интегратор**, приказан на слици 1-2(а), где су $u(t)$ и $y(t)$ вредности улазног и излазног сигнала у тренутку t, а $y(t_0)$ означава почетну вредност y у тренутку t_0.



Слика 1-2(а) Идеални интегратор са улазом u, излазом y и почетним условом $y(t_0)$ у тренутку t_0

Члан за почетни услов је укључен у модел, јер је према основној теореми диференцијално-интегралног рачуна

$$\int_{t_0}^{t} \dot{y}(\tau)d\tau = y(t) - y(t_0)$$

тако да је

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} \dot{y}(\tau)d\tau$$

Пошто **почетни услов мора да увек буде присутан**, можемо га испустити на нашем дијаграму.

Према томе, идеални интегратор - математички модел интегратора - може двојако да се представи:

(*i*) Улаз и излаз су повезани *интегралном једначином*

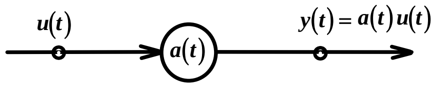
$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau \tag{4}$$

(*ii*) Улаз и излаз су повезани *диференцијалном једначином*

$$\dot{y}(t) = u(t) \tag{5}$$

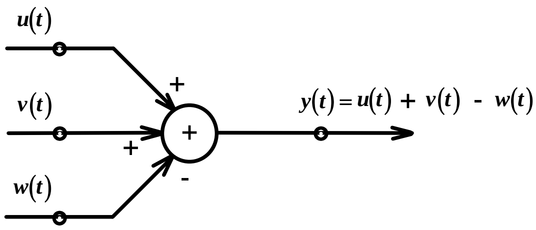
са почетним условом $y(t_0)$.

Множење сигнала *u* са функцијом *a* моделоваћемо помоћу **идеалног множача** на слици 1-2(б) са улазом $u(t)$ и излазом $y(t)$ у тренутку *t*. Вредност $a(t)$ са којом множимо $u(t)$ да би добили $y(t)$ зваћемо **појачање** множача.



Слика 1-2 (б) Идеални множач са појачањем $a(t)$ у тренутку *t*.

Идеални сабирач је модел уређаја за сабирање и одузимање сигнала, слика 1-2(в), код кога знак минус на линији улазног сигнала указује да се врши одузимање уместо сабирања.



Слика 1-2 (в) Идеални сабирач

Сва три модела на сликама 1-2(а), (б) и (в) тачно описују рад стварних електронских уређаја у рачунару уколико се примењени сигнали налазе унутар одређених граница. Када делује улаз $u(t) = +1$ волт, за почетну вредност $y(t_0) = 0$, у тренутку $t \geq t_0$ према моделу идеалног интегратора добићемо на излазу

$$y(t) = \int_0^t 1\, d\tau = t$$

за свако *t*. У складу са моделом, у тренутку $t = 10^6$ секунди, излаз би био 10^6 волти. Да ли ће стварни електронски интегратор имати милион волти на излазу када доведемо 1 волт на његов улаз? Наравно да неће - очекујемо да стварни излаз расте као и *t* све док не постане већи од неке конструкционе вредности, најчешће 100V или 10V, када престаје да се повећава са временом *t*, јер је достигао ниво засићења. ○

Остале операције аналогног рачунара, на пример множење два промењљива сигнала, различите нелинеарности, генератор функција, увешћемо када нам буду требале.

Према томе, добар зналац теорије система мора да буде оспособљен да прави добре моделе и добре представе стварних система које проучава, без обзира на њихову природу.

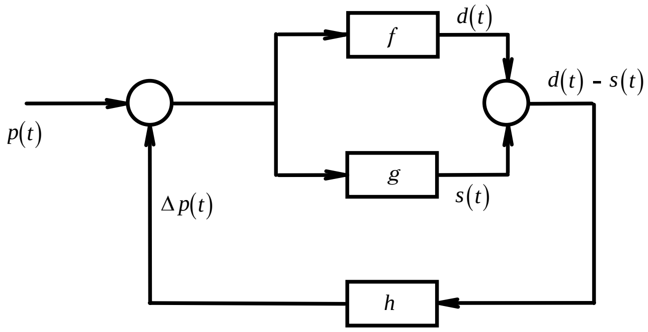
Пример 3: *Модел система цена - понуда - потражња једног производа*: Посматрајмо тржиште једног производа на коме цена $p(t)$ у тренутку t зависи од понуде $s(t)$ и потражње $d(t)$. Претпоставимо да сама потражња $d(t)$ и понуда $s(t)$ зависе од цене производа $p(t)$

$$\begin{aligned} d(t) &= f\left(p(t)\right) \\ s(t) &= g\left(p(t)\right) \end{aligned} \tag{5}$$

док прираштај цене $\Delta p(t)$ зависи од односа понуде и потражње

$$\Delta p(t) = h\left(d(t) - s(t)\right) \tag{6}$$

Структурна модела приказана је на слици



Слика 1-3 Систем цена - понуда - потражња једног производа

Према релацији (6), цена у следећем тренутку $p(t+\Delta t)$ се или не мења $\left(\Delta p(t) = 0\right)$ ако је $\left|d(t) - s(t)\right| = a$, ($a$ је константа) или повећава за $d(t) - s(t) > a$, или смањује за $d(t) - s(t) < a$. Пресликавања $f(\cdot), g(\cdot), h(\cdot)$ могу да се одреде или помоћу знања из економских наука или емпиријски. У најпростијем случају, код Маршаловог модела (A. Marshal) се предпоставља да су једначине (5) линеарне

$$\begin{aligned} d(t) &= a + b\, p(t) \\ s(t) &= m + n\, p(t) \end{aligned}$$

док је брзина промена цене на тржишту сразмерна са односом понуде и потражње

$$\frac{d\,p(t)}{dt} = c\left(d(s) - p(s)\right)$$

Са друге стране, овај модел може да се лако уопшти на тржиште са n-производа уз различите предпоставке и вођење рачуна о одговарајућим ограничењима. ○

Зато ћемо као примере проучавати различите корисне моделе и њихове математичке представе. Користићемо веома једноставне моделе да разјаснимо поступке и концепте помоћу којих можемо анализирати сложене моделе који су неопходни за проучавање реалних система

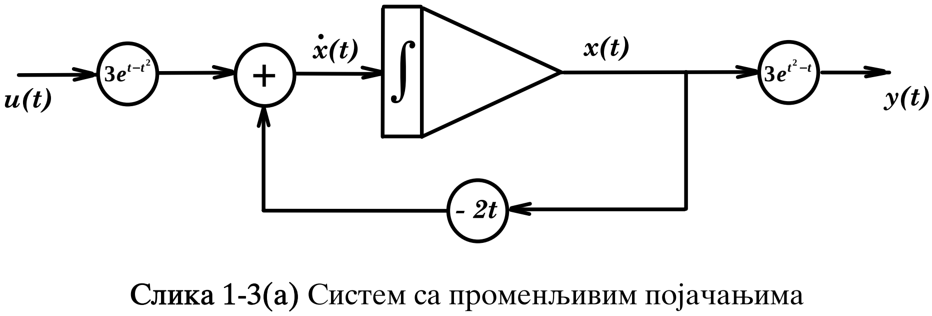
Под системом увек подразумевамо две ствари: а) постојећи систем који служи као подстицај наших истраживања и преиспитивања појмова и замисли, б) апстрак-тни систем - модел стварног система који је полазна основа свих прецизних дефини-ција и теорема. Уобичајен поступак моделовања система је очевидан: скуп познатих чињеница и података се формализује и преводи у погодан облик и исписују једначине (или одговарајуће релације) при чему се узимају у обзир све расположиве квантитативне информације. Суштинска претпоставка да тај поступак буде ваљан је да ”закони“, у складу са којима се одвијају различите појаве и процеси у одређеном систему, не зависе од проучаваног система. Битна особина економских и организационих појава, процеса и система је да то једноставно није тако. У друштвено-економским и организационим наукама не постоје ”закони“ у значењу на које смо се навикли у природним и техничким наукама, те не постоје ни општи модели. Такав модел би био неделотворан не само због своје сложености, већ не би ни говорио ишта о чињеници да особена природа многих социолошких, економских и организационих механизама није још увек довољно добро проучена. При моделовању друштвено-економских и организационих појава, код којих је могућност експеримената увелико ограничена, теоријско знање које се користи за изградњу модела има одлучујуће значење. Оно одређује у знатној мери избор метода моделовања и структуру модела, методе формалног описа појединих подсистема, опсег и подручје примењивости модела и очекиваних резултата.

Проблеми формализације процеса су уско повезани са проблемом провере ваљаности модела, посебно пошто није могуће да он проистекне из ”тачних“ закона у природним наукама и када се мора прибећи одређеном скупу претпоставки. Поред тога, увођење у модел емпиријских релација, које су добијене обрадом резултата посматрања појаве, захтева веома пажљива истраживања и детаљна испитивања не само полазних података већ и примењених метода.

Неопштост или системска неодређеност социолошко-економског и организационог сагледавања веома отежава моделовање у пракси. Ваљаност и количина информација утеловљена као модел веома зависи од резултата предходних истраживања. Другачије речено, теорија система може да започне онда када се расправе и размрсе фундаменталне науке које изучавају процесе у посматраном систему. Друга могућност је да се одговарајуће основне науке не користе као унапред дата теорија, већ да модел проистекне непосредно из података. То се стварно дешава код изучавања многих процеса који су исувише сложени да би могла да се непосредно користи ”чиста“ теорија. Друштвено-економске и организационе науке треба да створе нове категорије, параметре и инваријанте које могу да се на неки начин ”мере“ и због тога би свим истраживачима изгледале објективно исте, без обзира на њихове личне предрасуде, склоности и интуицију или природу поступка њихових ”мерења“.

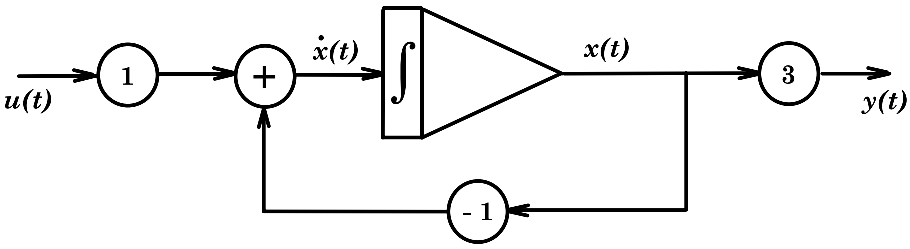
Да би схватили неопходност **прецизног и јасног изражавања** при изучавању савремене теорије система, због чега ћемо користити језик и ознаке математике, посматрајмо следеће примере.

Пример 4: На први поглед, аналогни модел система на слици 1-3а представља временски променљив систем пошто се појачања мењају са временом. У истом тренутку можда ћемо помислити да је систем временски непроменљив ако његов импулсни одзив $g(t,\tau)$ на Диракову импулсну функцију зависи само од $(t-\tau)$.



Слика 1-3(а) Систем са променљивим појачањима

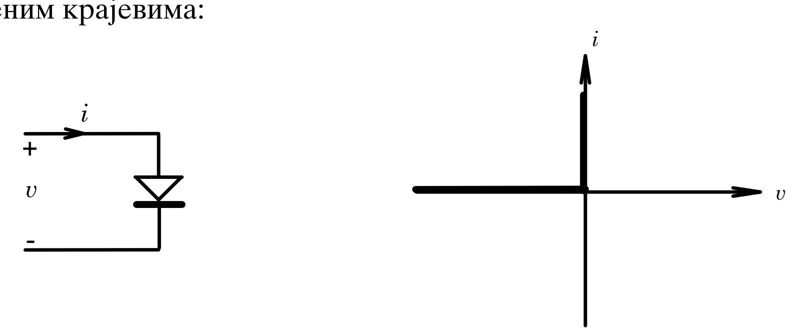
Многи ће се изненадити када покажемо да тај систем има потпуно исти импулсни одзив као и систем са непроменљивим појачањима приказан на слици 1-3б, а који ћемо звати временски непроменљив систем јер се појачања не мењају током времена.



Слика 1-3(б) Систем са непроменљивим појачањима, који има исти импулсни одзив као систем на слици 1.3(а)

У одељку 1-6 и 5-2 даћемо строге, математичке дефиниције временске инваријантности и импулсног одзива, које ће нам омогућити да без недоумица одредимо да ли је модел систем временски непроменљив или није. ○

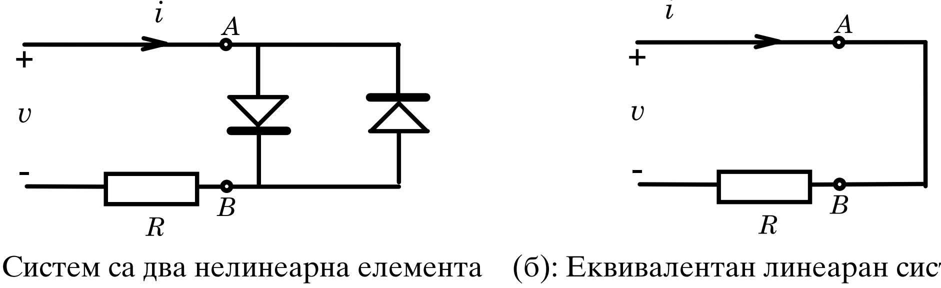
При проучавању постојећих система, често се сусрећемо са "једносмерним" уређајима као што су вентили, точкови са устављачима, електронске диоде, као и обична врата која се отварају када су гурнута у једном правцу али остају затворена када су гурнута у супротном правцу. Погодно је такве уређаје моделовати помоћу **идеалне диоде**, приказане на слици 1-4а, где је са i означена референтна струја кроз диоду и напон u на њеним крајевима:



Слика 1-4 (а) Идеална диода (б) Напонско-струјна карактеристика

Рад диоде је описан напонско-струјном карактеристиком диоде, слика 1-4б, која показује да је струја i једнака нули када је напон на крајевима диоде u негативан и да i може да има било коју вредност када је u ненегативан. У ствари, идеална диода је савршен прекидач: "искључен" (отворен) када је u негативан и "укључен" (затворен) када је u ненегативан.

Пример 5: Када се придржавамо простог правила "систем је нелинеаран ако садржи неки нелинеарни елеменат" при анализи система на слици 1-5а, где је R отпорник, можемо лако да направимо грешку.



(а): Систем са два нелинеарна елемента (б): Еквивалентан линеаран систем

Слика 1-5

Укупни утицај две супротно поларисане диоде у паралели је да ће једна од њих увек да проводи без обзира на знак сигнала v, а оне су еквивалентне савршеном проводнику који увек спаја тачке A и B, као што је приказано на слици 1-5б. ○

У одељку 3-2 ћемо строго дефинисати појмове линеарности и линеарних система, али за тренутно разматрање уочимо да идеална диода није линеарна пошто није тачно да је $i(v_1+v_2)=i(v_1)+i(v_2)$ за сваки напон v_1 и v_2. Да би то сагледали, нека је $v_1=+1$ и $v_2=-5$ тако да је $v_1+v_2=-4$. Тада је $i(v_1+v_2)=i(-4)=0\neq i(+1)+i(-5)\;=i(v_1)+i(v_2)$.

Да би одредили строгу дефиницију не само линеарности, подсетићемо се неких основних појмова из математике о скуповима, векторским просторима, функцијама или пресликавањима и вишеструким пресликавањима. Посебне математичке структуре уводићемо и проучавати постепено када се природно укаже потреба за њима.

1-2 НЕКИ МАТЕМАТИЧКИ ПОЈМОВИ

За образовање математичке теорије која разрађује замисли из увода и претходног одељка неопходно нам је означавање које нам омогућава да замисли изразимо сажето и да са њима јасно деламо. Подсетимо се основних раније научених појмова.

Претпоставићемо да је читалац проучавао реалне и комплексне бројеве. Користићемо **Z** да означимо скуп свих целих бројева, **R** да означимо скуп свих реалних бројева и **C** за скуп свих комплексних бројева. **N** користимо за означавање скупа свих ненегативних целих бројева и $\mathbf{R}_+$ за ненегативне реалне бројеве.

Такође ћемо претпоставити да не треба посебно објашњавати следеће ознаке:

$\in$ за "припада": као у тврђењу $5\in\mathbf{Z}$

$\notin$ за "не припада": као у тврђењу $-5\notin\mathbf{N}$

$\subset$ за "је подскуп од": као у тврђењу $\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$

$\not\subset$ за "није подскуп од": као у тврђењу $\mathbf{Z}\not\subset\mathbf{N}$

$\{x\mid P(x)\}$ за скуп x-ова за који је $P(x)$ тачно: као у тврђењу

$$\mathbf{R}_+=\{x\,|\,x\in\mathbf{R}\wedge x\geq 0\}$$

$A\bigcup B=\{x\,|\,x\in A\vee x\in B\}$, **унија** скупа A и скупа B

$A\bigcap B=\{x\,|\,x\in A\wedge x\in B\}$, **пресек** скупа A и скупа B

$A-B=\{x\,|\,x\in A\wedge x\notin B\}$, **разлика** скупа A и скупа B

Понекад користимо скраћенице као што су **акко** или $\Leftrightarrow$ за **ако и само ако** и $\Rightarrow$ за **проистиче (следи)** и $\Leftarrow$ за **проистекло из (следи из)**. Нешто ређе користићемо $\forall$ за **за свако** и $\exists$ за **постоји**.

Пример 1: Тврђење "за свако $x\in\mathbf{R}$, постоји $y\in\mathbf{R}$ тако да је $y>x$" изражава чињеницу да не постоји највећи реални број и може се написати као

$$(\forall x\in\mathbf{R})(\exists y\in\mathbf{R})(y>x)$$ ○

Пример 2: $f(t)=g(t)\;\forall t$ има исти смисао као и $\forall t\,\big(f(t)=g(t)\big)$, а значи да је за све вредности t из T вредност $f(t)$ једнака $g(t)$. Израз $\exists t\,\big(f(t)=g(t)\big)$ значи да постоје вредности t из T за које је $f(t)=g(t)$; док $\forall\alpha\;\exists t\,\big(f(t,\alpha)=g(t,\alpha)\big)$ означава да за све вредности α постоји таква вредност t (*која зависи од* α) да је $f(t,\alpha)=g(t,\alpha)$. ○

Сам читалац може да наведе многе функције или операције које придружују један број другом; на пример, операције квадрирања, која узима број из $\mathbf{R}$ и даје број у $\mathbf{R}_+$ или операција извлачења квадратног корена, која узима неки број из $\mathbf{R}_+$ да би дала други број у $\mathbf{R}_+$ али није дефинисана за бројеве из $\mathbf{R}-\mathbf{R}_+$. Често ћемо разматрати функције и на другим скуповима, сем на скуповима реалних или комплексних бројева.

Нека су A и B било која два скупа објеката. **Пресликавање** из A у B је додељивање сваком елементу из A јединственог елемента из B. Пишемо $F: A \to B$ са значењем "F је пресликавање из A у B", и користимо одговарајуће називе **функција, оператор и трансформација**. Када је $F: A \to B$ пресликавање и ако је a неки елеменат из A (пишемо $a \in A$) тада се са $F(a)$ или Fa означава **вредност** F у a и назива **слика** (**лик**) од a под дејством F. За два пресликавања f и g из A у B се каже да су **једнака** ако је $f(a)=g(a)$ за свако a из A. Често се пише $a \mapsto F(a)$ да би се указало да је дејство пресликавања F да преобрази одређени елеменат из A у одговарајућу вредност $F(a)$. A се назива **домен** (**област**) за F и B **кодомен** за F.

Ако је W неки подскуп од A, што пишемо $W \subset A$, скуп свих елемената $F(w) \in B$, где се w пружа преко свих елемената из W, назива се **слика** (**лик**) W испод F и означава $F(W)=\{F(w) \mid w \in W\}$. Посебно се скуп свих елемената облика $F(a)$ за a из A назива **слика** (**лик**) $\boldsymbol{F}$ или **област** $\boldsymbol{F}$ и означава се са $F(A)$ или $\mathcal{R}(F)$.

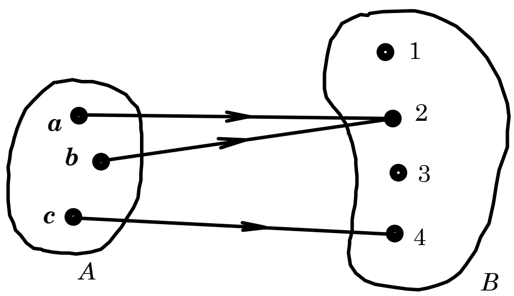
<u>Пример 3</u>: Нека је $A=\{a,b,c\}$, $B=\{1,2,3,4\}$ и $f: A \to B$ дефинисано правилом

$$a \mapsto 2$$
$$b \mapsto 2$$
$$c \mapsto 4$$

које може да се представи таблицом

x	$f(x)$
a	2
b	2
c	4

или сликовито, дијаграмом на слици 1-6.



Слика 1-6 Пресликавање из $\{a,b,c\}$ у {1,2,3,4} са вредностима $f(a), f(b), f(c)$

Домен пресликавања f је $\{a,b,c\}$ и кодомен f је $\{1,2,3,4\}$. Слика или област пресликавања f је подскуп $\{2,4\}$ кодомена

$$\mathcal{R}(f) = f(\{a,b,c\}) = \{2,4\}$$ ○

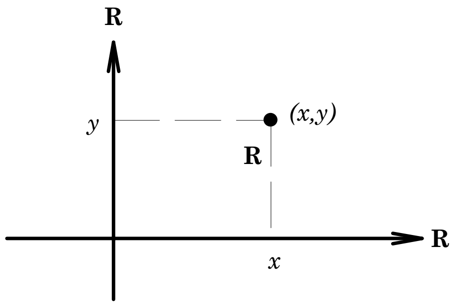
Декартов производ два скупа *A* и *B* пише се $A \times B$, чита ”*A* крст *B*“, је скуп $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$ свих **уређених парова** (a,b) чији први члан *a* припада *A* и чији други члан *b* припада *B*. Слично, скуп свих уређених ***n*-торки** $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ чији сваки *n*-ти члан a_i припада скупу A_i, означава се $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ и назива се Декартов производ *n* скупа $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Када су сви A_i једнаки, рецимо $A_i = A$, производ *n* чланова $A \times A \times \cdots \times A$ пишемо као A^n.

Пример 4: За $A = \{x, y\}$ и $B = \{1,2,3\}$ је

$$A \times B = \{(x,1),(x,2),(x,3),(y,1),(y,2),(y,3)\}$$
$$B \times A = \{(1,x),(1,y),(2,x),(2,y),(3,x),(3,y)\}$$
$$A^2 = A \times A = \{(x,x),(x,y),(y,x),(y,y)\}$$

Уочимо да $A \times B$ и $B \times A$ имају исти број елемената али да нису једнаки; у овом примеру они чак немају ни заједнички елемент. ○

Подсетимо се да је Декартово проницање у то да се раван може представити као R^2, Декартов производ две линије, довело да развоја аналитичке геометрије.



Слика 1-7 Раван је Декартов производ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$

Када смо проучавали реалне функције више реалних променљивих, као што су $z = f(x, y)$ и $w = g(x, y, z)$, писали смо

$$f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R} \quad \text{и} \quad g : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

или

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} \quad \text{и} \quad g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$$

да би указали да је пар реалних бројева (x, y) укључен у f и да је тројка реалних бројева (x, y, z) укључена у *g*.

У општем случају, сусретаћемо се са пресликавањима *F* која делују на *n* различитих променљивих, рецимо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_n \in A_n$, и која придружују свакој уређеној *n*-торки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ неки објекат у одређеном скупу **C**. Домен таквог пресликавања је $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, кодомен је **C**, а пишемо

$$F : A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \to \mathbf{C}$$

да би изразили да $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Пример 5: Посматрајмо скупове $A = \{x, y\}$, $B = \{1,2,3\}$ и $C = \{a,b\}$. Пресликавање $F : A \times B \to C$ може да се зада табелом чији елементи показују деловање F на сваку тачку (x_1, x_2) из $A \times B$.

(x_1, x_2)	$F(x_1, x_2)$
$(x,1)$	a
$(x,2)$	b
$(x,3)$	b
$(y,1)$	b
$(y,2)$	a
$(y,3)$	b

○

За интервале реалних бројева користићемо следеће ознаке:

$$]a,b[= \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$$

$$[a,b[= \{x \in \mathbf{R} \mid a \le x < b\}$$

$$]a,b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \le b\}$$

$$[a,b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \le x \le b\}$$

да не би побркали **отворени интервал** $]a,b[$ са уређеним паром (a,b). Често се $[a,b]$ назива **сегмент** (затворени интервал, одсечак) и $[a,b[$ **полуотворен** интервал са десна, односно $]a,b]$ са лева.

Када је задато пресликавање $F : A \to B$ а желимо да разматрамо само деловање F на неки подскуп W из домена A, пишемо $F_W : W \to B$ или $F\big|W : A \to B$ и називамо F_W **рестрикција** F на W (сужење пресликавања F на скупу W). Тада је $F_W(w) = F(w)$ за $w \in W$. На пример, нека $u : R \to R$ представља неко дејство улаза на систем, где број $u(t)$ представља дејство улаза у тренутку t. Када желимо да проучавамо утицај u на систем у тренутцима t већим или једнаким од t_0, разматраћемо рестрикцију u на интервал $[t_0, \infty[= \{t \mid t_0 \le t < \infty\}$ и означавати са $u_{[t_0, \infty[}$.

Са $(d/dt)u$ или $\dot{u}$ означавамо извод функције $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, а са $u^{(n)}(t_0)$ n-ти извод од u израчунат у $t = t_0$.

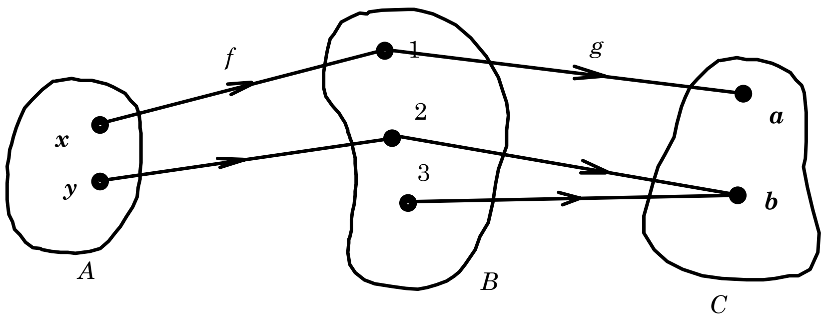
За неко пресликавање $f : A \to B$ каже са да је **на** (**сурјекција**) ако и само ако свака тачка у B има предходника у A кога f пресликава у b; тј. за свако $b \in B$ постоји $a \in A$ тако да је $f(a) = b$. Кажемо да је f пресликавање **један-према-један** (**инјекција**) ако и само ако из $f(x) = f(y)$ следи $x = y$; тј. f пресликава различите тачке у различите слике $f(x), f(y)$.

Пример_6: Помоћу графика пресликавања $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ се лако показује да је $x \mapsto e^x$ пресликавање један-према-један али није на; $x \mapsto x\sin(x)$ је на али није један према један; док $x \mapsto x^2$ није ни једно ни друго, а $x \mapsto 2x+3$ је и једно и друго. ○

Када је $f: A \to B$ пресликавање и на и један-према-један, каже се да је *f* **један-према-један коресподенција** или **бијекција**. Два скупа *A* и *B* имају исти број елемената (исту **кардиналност**) ако и само ако постоји бијекција $f: A \to B$.

За $f: A \to B$ и $g: B \to C$ дефинише се **композиција** (производ) пресликавања (сложено пресликавање) $g \circ f: A \to C$ правилом $x \mapsto g\left[f(x)\right]$; тј. на задато $x \in A$ прво применимо *f* да добијемо $f(x) \in B$, а затим применимо *g* да као резултат добијемо $g\left[f(x)\right] = (g \circ f)(x) \in C$. Када не постоји могућност збрке $g \circ f$ скраћено пишемо $g\,f$.

Пример_7: Нека су $A = \{x, y\}, B = \{1,2,3\}$ и $C = \{a, b\}$ и посматрајмо пресликавања $f: A \to B$ **Error! Switch argument not specified.** и $g: B \to C$ приказана дијаграмима на слици 1-8.

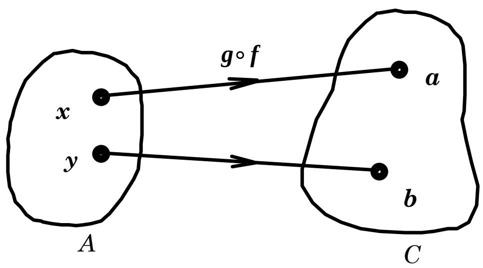


Слика 1-8 Два пресликавања $f: A \to B$ **Error! Switch argument not specified.** и $g: B \to C$

Уочимо да је *f* један-према-један али није на, а *g* је на али није један-према-један. Композиција пресликавање $g \circ f: A \to C$

$$(g \circ f)(x) = g\left[f(x)\right] = g(1) = a$$
$$(g \circ f)(y) = g\left[f(y)\right] = g(2) = b$$

је као што је приказано на слици 1-9.



Слика 1-9 Сложено пресликавање $g \circ f: A \to C$

Видимо да је композиција пресликавања $g \circ f$ бијекција, иако то није ни један од њених саставних елемената. ○

Кроз курс из теорије система сусретаћемо занимљиво питање како различите особине појединачних пресликавања наслеђују њихове композиције пресликавања: тако ћемо о одељку 3-2 видети да је композиција два линеарна пресликавања такође линеарно пресликавање. Како је композиција два пресликавања очигледно редна (каскадна или серијска) операција (прво делује f а затим g), то је композиција модел којим можемо да опишемо редно повезане системе. На пример, операцију $f : A \to B$ са слике 1-8 можемо да сагледамо као систем који желимо да проучавамо, а опера-цију $g : B \to C$ као наша мерења или посматрања система. Шта стварно тада видимо као резултат наших мерења није понашање f већ $g \circ f$; нама "познати" процес прикупљања података g прикрива "непознато" f и даје нам $g \circ f$. Због тога је неопходно да научимо како да издвајамо податке о f из познатог g и осмотреног $g \circ f$.

1-3 МОДЕЛИ СИСТЕМА

До сада смо неколико пута нагласили да је за теорију система суштаствен *модел* $\mathcal{A}$ постојећег система - *математички опис* особина постојећег физичког система и њихов узајамни однос. Мноштво променљивих $v_1, v_2, \ldots$ које карактеришу особине физичког система које проучавамо зваћемо *основне променљиве*, а релације између основних променљивих *основне једначине модела* $\mathcal{A}$. Основне једначине модела могу да се одреде на основу познавања закона који описују појаве у посматраном физичком систему уз увођење одговарајућих претпоставки и ограничења или на основу експеримената и мерења извршених на физичком систему $\mathcal{P}$: Добијене релације писаћемо симболички као

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}^{(1)}(v_1, \ldots, v_n) = 0 \\ &\mathcal{A}^{(2)}(v_1, \ldots, v_n) = 0 \\ &\cdots \\ &\mathcal{A}^{(m)}(v_1, \ldots, v_n) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

где свако $\mathcal{A}^{(j)},\ j = 1, \ldots, m$ представља узајамне односе $v_i,\ i = 1, \ldots, n$. Такође ћемо претпостављати да су основне променљиве *функције времена*. Тако ће променљиве $v_i,\ i = 1, \ldots, n$ означавати функције времена које у тренутку t имају вредност $v_i(t)$. Ради лакшег и краћег писања сматраћемо да су променљиве $v_i(t)$ компоненте n-димензионалног вектора $v(t) = (v_1(t), \ldots, v_n(t))$ основних променљивих.

При проучавању физичког система $\mathcal{P}$ обично се издвоји део основних променљивих $v_1, \ldots, v_k$ које проузрокују одређене промене у систему и које се мењају у времену од тренутка t_0 до t_1 по правилу описаном временским функцијама $u_1(\cdot), \ldots, u_k(\cdot)$ тако да је $v_i(t) = u_i(t),\ i = 1, \ldots, k,\ t \le t < t_0$. Настале промене се сагледавају кроз промене $y_1(\cdot), \ldots, y_m(t)$ које одговарају својствима $v_{k+1}, \ldots, v_{k+m}$, а не води се рачуна о осталим величинама $v_{k+m+1}, \ldots, v_n$. Функције времена $u_{1[t_0,t_1[}, u_{2[t_0,t_1[}, \ldots, u_{k[t_0,t_1[}$ зваћемо *улазна дејства* или *улази*, функције времена $y_{1[t_0,t_1[}, y_{2[t_0,t_1[}, \ldots, y_{m[t_0,t_1[}$ *излазна дејства* или *излази*, а променљиве $v_{k+1+m}, \ldots, v_n$ *сакривене излазне променљиве*. Ради прегледнијег излагања користићемо векторски запис те се вектор $u_{[t_0,t_1[} = \left(u_{1[t_0,t_1[}, u_{2[t_0,t_1[}, \ldots, u_{k[t_0,t_1[}\right)$ назива *вектор улазних дејстава* или *вектор улаза*; $y_{[t_0,t_1[} = \left(y_{1[t_0,t_1[}, y_{2[t_0,t_1[}, \ldots, y_{m[t_0,t_1[}\right)$ *вектор излазних дејстава* или *вектор излаза* и $\tilde{y} = \left(v_{k+m+1}, \ldots, v_n\right)$ *сакривени вектор излаза*.

Скуп вредности $u(t)$ у тренутку t зваћемо *простор улаза* система $\mathcal{P}$ и означавати са $R\left[u(t)\right]$, а одговарајућу област промена функције времена $u \triangleq u_{[t_0,t_1[}$ *простор одсечака улазних функција* означаваћемо са $R\left[u\right]$. Доста је важно да уочимо разлику између $R\left[u(t)\right]$ - области вредности $u(t)$ које је мноштво облика $\mathbf{R}^n$ и $R\left[u\right]$ - области вредности u које је мноштво функција времена, тј. функционални простор.

<u>Пример 1</u>: Нека се t мења на $\left[0,1\right]$ и компоненте управљања $u(t) = \left[u_1(t) \quad u_2(t)\right]^T$ задовољавају ограничења (i) $\left|u_1(t) + u_2(t)\right| \le 1, \forall t \in \left[0,1\right]$ и (ii) $\int_0^1 \left|u_1(t)\right| dt \le 2$. У овом примеру је $R\left[u(t)\right]$ подскуп скупа $\mathbf{R}^2$ (простора парова реалних бројева) и одређен је неједначином (i); док је $R\left[u\right]$ простор свих векторских функција времена дефинисаних на $\left[0,1\right]$ које задовољавају ограничења (i) и (ii). ○

<u>Пример 2</u>: Претпоставимо да је $T = Z_+ = \left\{0,1,\ldots\right\}$, $R\left[u(t)\right] = \left\{0,1\right\}$ и да низови вредности $u(t)$ задовољавају услов $u(t) + u(t+1) \le 1, \forall t$. Тада је $R\left[u\right]$ мноштво свих улазних низова, који почињу у тренутку $t = 0$, код којих се јединица не јавља два пута за редом. ○

Приметимо да $R\left[u\right]$ зависи од два параметра, t_0 и t_1, при чему се t_0 и t_1 не мењају на усвојеном одсечку. У стварности, са проучаваним објектом $\mathcal{P}$ није повезан само један простор функција улаза $R\left[u\right]$, већ мноштво тих простора $\left\{R\left[u_{[t_0,t_1[}\right]\right\}$, које генеришу параметри t_0 и t_1. Одговарајуће називе и ознаке користићемо и за $R\left[y\right]$.

Када се улази u мењају у простору $R\left[u\right]$, на основу посматрања излаза y истраживач може да добије, у крајњем случају у принципу, мноштво релација које повезују y_i и u_i, а које могу да се напишу у облику

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}^{(1)}\left(u_1,\ldots,u_k,y_1,\ldots,y_m\right) = 0 \\ &\mathcal{P}^{(2)}\left(u_1,\ldots,u_k,y_1,\ldots,y_m\right) = 0 \\ &\qquad\cdots \\ &\mathcal{P}^{(m)}\left(u_1,\ldots,u_k,y_1,\ldots,y_m\right) = 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

или сажетије:

$$\mathcal{P}(u,y) = 0 \qquad (3)$$

Релација облика (3) назива се *једначина улаз-излаз* система $\mathcal{P}$. Она се разликује од основних једначина (1) по томе што су основне променљиве раздељене на улазне и излазне променљиве.

<u>Пример 3</u>: Нека се горе описани експеримент спроводи на кондензатору $\mathcal{P}$, са струјом i као улазом и напоном v као излазом. Резултат експеримента би била емпиријска релација улаз-излаз

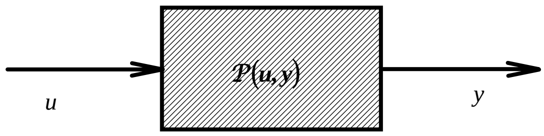
$$C\frac{dv}{dt} = i$$

где је C (капацитивност кондензатора) константан параметар, која може да се напише у облику

$$\mathcal{P}(i, v) = 0$$

Уочимо да једначина улаз-излаз кондензатора не одређује v једнозначно у зависности од i. Напон v одређује и константа која описује напон на кондензатору $\mathcal{P}$ на почетку експеримента. Поред тога, облик ове једначина се не мења ако се за улаз усвоји напон v, а за излаз струја i кроз кондензатор. ○

То значи да код улазно-излазног описа систем разматрамо као "црну кутију" у коју уводимо улазе, а из које добијамо одговарајуће излазе, као што је приказано на слици 1-10. На пример, за производну траку у фабрици улази могу да буду разни материјали, сировине и енергија а излази готови производи; код рачунара улази и излази су информације записане на бушеним картицама, магнетној траци или дискети или добијене непосредно мерењем на неком систему.2



Слика 1-10 Систем као "црна кутија"

МОДЕЛ СИСТЕМА: Да би формално дефинисали апстрактни систем - модел система, посматрајмо на интервалу времена $[t_0, t_1[$ уређени пар функција времена (u, y) и скуп таквих парова $R_{[t_0,t_1[} \triangleq \{u, y\}$ за изабране вредности t_0, t_1 при $t_0, t_1 \in T$ (T је област промене t). Нека је $\left\{R_{[t_0,t_1[}\right\}$ мноштво таквих скупова која се добија при промени t_0, t_1 дуж интервала T, при $t_1 \geq t_0$ Сада може да се уведе следећа дефиниција апстрактног система - модел система $\mathcal{P}$.

Дефиниција 1: *Оријентисани апстрактни систем* $\mathcal{A}$ (или модел система) је мноштво $\left\{R_{[t_0,t_1[}\right\}$, $t_0, t_1 \in T$ скупова уређених парова функција времена (u, y) где је прва компонента $u \triangleq u_{[t_0,t_1[}$ *улаз* (одсечак улазне функције на интервалу $[t_0, t_1[$), а друга компонента $y \triangleq y_{[t_0,t_1[}$ *излаз* (одсечак излазне функције на интервалу $[t_0, t_1[$). Пар (u, y) зваћемо *пар улаз-излаз који припада моделу* $\mathcal{A}$ и записивати као $(u, y) \in \mathcal{A}$, ако $(u, y) \in R_{[t_0,t_1[}$ за неке $t_0, t_1 \in T$.[1]

Елементи мноштва $\left\{R_{[t_0,t_1[}\right\}$ задовољавају *услов сагласности*: ако пар $\left(u_{[t_0,t_1[}, y_{[t_0,t_1[}\right) \in \mathcal{A}$ тада и било који део тог улазно-излазног пара $\left(u_{[\tau_0,\tau_1[}, y_{[\tau_0,\tau_1[}\right) \in \mathcal{A}$ за $t_0 \leq \tau_0 \leq t_1$, $\tau_0 \leq \tau_1 \leq t_1$ и $u_{[\tau_0,\tau_1[} = u_{[t_0,t_1[}$, $y_{[\tau_0,\tau_1[} = y_{[t_0,t_1[}$ на $[\tau_0, \tau_1[$.

Мноштво свих одсечака u на интервалу $[t_0, t_1[$ тако да $(u, y) \in \mathcal{A}$ зваћемо *одсечак простора улаза објекта* $\mathcal{A}$ и означавати са $R[u]$, а мноштво свих одсечака y тако да

[1] На овај начин, оријентисани апстрактни систем $\mathcal{A}$ може да се поистовети са свим могућим паровима улаз - излаз који припадају $\mathcal{A}$.

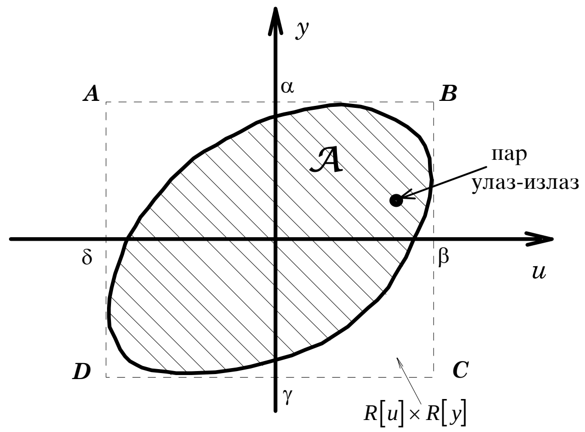
$(u, y) \in \mathcal{A}$ зваћемо *одсечак простора излаза* и означавати са $R[y]$.

Релацију, написану у облику

$$\mathcal{A}(u, y) = 0 \qquad (4)$$

која одређује мноштво свих парова улаз-излаз који припадају $\mathcal{A}$, зваћемо *једначина улаз-излаз* оријентисаног апстрактног система $\mathcal{A}$. ◇

Уочимо да услов сагласности захтева да сваки део пара улаз-излаз $\mathcal{A}$ сам буде пар улаз-излаз $\mathcal{A}$. Тај услов унапред јемчи унутрашњу непротивуречност одређива-ња мноштва $\left\{R_{[t_0,t_1[}\right\}$, $t_0, t_1 \in T$. Мноштво $R_{[t_0,t_1[}$ парова $\left(u_{[t_0,t_1[}, y_{[t_0,t_1[}\right)$ који припадају $\mathcal{A}$, је неко подмноштво из $R[u] \times R[y]$. Однос $R_{[t_0,t_1[}$ и $R[u] \times R[y]$ приказан је на слици 11, где $\delta\beta$ и $\gamma\alpha$ одговарају $R[u]$ и $R[y]$, правоугаоник ABCD одговара $R[u] \times R[y]$ и скуп означен са $\mathcal{A}$ одговара скупу уређених парова улаз -излаз (u, y).



Слика 1-11 Геометријска представа апстрактног система

Пример 4: Нека је $\mathcal{A}$ модел описан једначином улаз-излаз

$$\frac{dy}{dt} = u$$

где је $T = \left]-\infty, \infty\right[$ и функција u припада простору непрекидних реалних функција времена $u \in C\left]-\infty, \infty\right[$. Мноштво $R_{[t_0,t_1[}$ парова улаз-излаз на интервалу $\left[t_0, t_1\right[$ је мно-штво свих уређених парова функција времена облика 3 $\left(u(t), \alpha + \int_{t_0}^{t} u(\beta)\, d\beta\right), \quad t_0 \le t < t_1$,

где је α произвољна реална константа. На пример, $(1, t), t \in \left[t_0, t_1\right[$; $(1, 1+t), t \in \left[t_0, t_1\right[$ $\left(t, \frac{t^2}{2} + 1\right), t \in \left[t_0, t_1\right[$ су парови улаз-излаз за $\mathcal{A}$. Уочимо да сваком улазу $u_{[t_0,t_1[}$ одгова-ра мноштво излаза $\left\{y_{[t_0,t_1[}\right\}$ који се добијају решавањем једначине улаз-излаз за A, са константом α као параметром који и образује то мноштво. ○

4

Овако дефинисан апстрактни модел објекта је прегломазан јер је било који одсечак произвољног пара улаз-излаз који припада $\mathcal{A}$, сам са своје стране пар улаз-излаз; док у општем случају обратно не важи јер се може наћи пар улаз-излаз који није одсечак неког другог пара улаз-излаз. То показује прост пример модела $\mathcal{A}$ који је до тренутка $t = 0$ описан једначином

$$y = u$$

а после $t \geq 0$ једначином

$$\frac{dy}{dt} = \frac{du}{dt} 12$$

За интервал посматрања који почиње у $t_0 < 0$, не постоји пар улаз-излаз чији би одсечак за $t \geq 0$ био пар $(u(t), u(t))$ за $t \geq t_0$, $t_0 < 0$.

Због тога $\mathcal{A}$ мора да се дефинише као мноштво скупова парова улаз-излаз, а не као један скуп парова улаз-излаз. Ипак, ради лакшег излагања посматраћемо апстрактне системе $\mathcal{A}$ који су окарактерисани једним скупом парова улаз-излаз, који су одређени на целом скупу T и које ћемо звати *једнородни айсшракшни сисшеми* или *једнородни модели*.

<u>Дефиниција 2</u>: Оријентисани апстрактни систем $\mathcal{A}$ је *једнородан* ако је сваки пар улаз-излаз $\left(u_{[t_0,t_1[}, y_{[t_0,t_1[}\right)$ који припадају $\mathcal{A}$, одсечак неког пара (u_T, y_T) одређеном на целом скупу T. ◇

Из ове дефиниције непосредно следи да једнородни оријентисани апстрактни систем може да се окарактерише јединственим скупом парова улаз-излаз $\{(u_T, y_T)\}$. На пример, ако је $T = [0, \infty[$, тада $\mathcal{A}$ може да се опише скупом парова улаз-излаз $\left\{\left(u_{[0,\infty[}, y_{[0,\infty[}\right)\right\}$, који су одређени на интервалу $[0, \infty[$.

Од сада ћемо претпостављати, ако није посебно речено, да је $\mathcal{A}$ једнородан оријентисан апстрактни систем (модел система) у смислу следеће дефиниције:

<u>Дефиниција 3</u>: *Једнородни оријентисани айсшракшни сисшем* (*једнородни модел*) је скуп $\mathcal{A} = \{(u_T, y_T)\}$ уређених парова функција времена (u_T, y_T), тако дефинисан на скупу времена $T =]-\infty, +\infty[$ да су у тренутку t вредности тих функција $u(t)$ и $y(t)$

$$u_T \triangleq \{(t, u(t)) \mid t \in T\}$$

$$y_T \triangleq \{(t, y(t)) \mid t \in T\}$$

Скуп свих u_T који су први елеменат пара који припада скупу $\mathcal{A}$ за различите y_T је *йросшор улазних функција модела* $\mathcal{A}$ (*обласш дефинисаносши модела* $\mathcal{A}$)

$$R[u_T] = \{u_T \mid (u_T, y_T) \in \mathcal{A}\}$$

а *йросшор излазних функција модела* $\mathcal{A}$ (*обласш вредносши модела* $\mathcal{A}$) за различите u_T је

$$R[y_T] = \{y_T \mid (u_T, y_T) \in \mathcal{A}\}$$

Одсечак функција u_T

$$u \triangleq u_{[t_0,t_1[} \triangleq \{t, u(t) \mid t_0 \leq t < t_1\}$$

назива се *одсечак улазне функције* или *улаз на иншервалу йосмашрања* $[t_0, t_1[$, а

$$y \triangleq y_{[t_0,t_1[} \triangleq \{t, y(t) \mid t_0 \leq t < t_1\}$$

одсечак излазне функције или *излаз на интервалу посматрања* $[t_0, t_1[$.

Пар (u, y) код кога су u и y дефинисани на истом интервалу $[t_0,\, t_1[$ зваћемо *пар улаз-излаз који припада* $\mathcal{A}$ или једноставно *пар улаз-излаз*.

Мноштво свих u (на изабраном интервалу посматрања $[t_0,\, t_1[$) тако да пар $(u, y) \in \mathcal{A}$, образује *простор одсечака улазних функција* модела $\mathcal{A}$

$$R[u] = \{u \mid (u, y) \in \mathcal{A}\}$$

док је

$$R[y] = \{y \mid (u, y) \in \mathcal{A}\}$$

простор одсечака излазних функција модела $\mathcal{A}$.

Скупове

$$U = R[u(t)] \triangleq \{u(t) \mid u_T \in R[u_T]\}$$

и

$$Y = R[y(t)] \triangleq \{y(t) \mid y_T \in R[y_T]\}$$

зваћемо *скуп* (*простор*) *улаза* и *скуп* (*простор*) *излаза* модела система $\mathcal{A}$. ◇

Уочимо да је $R[u_T]$ скуп свих функција које су дефинисане на $T = [-\infty, +\infty[$, док је $R[u]$ скуп одсечака тих функција на изабраном интервалу посматрања $[t_0, t_1[$. Још је важније да приметимо да према дефиницији 3 датоме улазу u не одговара у општем случају јединствени излаз y већ мноштво различитих излаза y (слика 1-11) који су одређени различитим "почетним условима" или "почетним стањима" модела $\mathcal{A}$. Ускоро ћемо видети да је "стање модела $\mathcal{A}$ " тако повезано са сваким паром улаз-излаз система $\mathcal{A}$ да улаз $u \triangleq u_{[t_0, t_1[}$ и стање система $\mathcal{A}$ у тренутку t_0 једнозначно одређују излаз $y \triangleq y_{[t_0, t_1[}$.

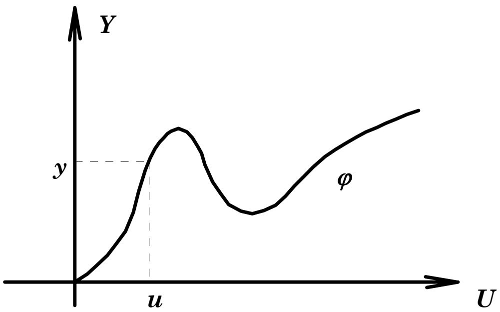
У математичком смислу, овако дефинисан апстрактни систем је више релација него оператор. Релација је мноштво уређених парова (u, y), док је оператор релација у којој свакој вредности u одговара јединствена вредност y. Зато систем можемо да дефинишемо и на следећи начин:

<u>Дефиниција 4</u>: *Систем улаз - излаз* (У/И) одређен је скупом *улаза* U, скупом *излаза* Y и *релацијом* (или правилом понашања) *система* $\mathcal{R} \subset U \times Y$. За било који пар (u, y) тако да је $u \in U$, $y \in Y$ и $(u, y) \in \mathcal{R}$ кажемо да је *улазно - излазни пар* система, где је u *улаз* и y одговарајући *излаз*. ◇

Већ смо приметили да за задати улаз u у општем случају постоји цео скуп $Y_U = \{y \in Y \mid (u, y) \in \mathcal{R}\}$ могућих излаза који одговарају улазу u. Ако за сваки улаз u постоји један одговарајући излаз y, тада такав систем зовемо *систем са улазно - излазним пресликавањем* (УИП).

<u>Дефиниција 5</u>: Нека су U и Y скупови улаза и излаза неког улазно-излазног система $\mathcal{R} \subset U \times Y$. Ако за сваки улаз u из чињенице да је $(u, y_1) \in \mathcal{R}$ и $(u, y_2) \in \mathcal{R}$ проистиче да је $y_1 = y_2$, тада такав У/И систем називамо *систем са улазно-излазним пресликавањем* (УИП). Пресликавање $\varphi : U \to Y$ које додељује јединствен излаз $y \in Y$ сваком улазу $u \in U$ називамо *пресликавање улаз - излаз* система. ◇

Релација улаз-излаз неког система са улазно-излазним пресликавањем приказана је на слици:



Слика 1-12 : Систем са улазно - излазним пресликавањем: за сваки улаз u постоји јединствен излаз $y = \varphi(u)$

Пример 5: (*Кутија са куглицама*) Посматрајмо кутију са куглицама у коју могу да се убацују нове куглице. Овом систему могу да се придруже следеће променљиве: u-број убачених куглица и y-број куглица које се налазе у кутији. Усвајајући u за улаз и y за излаз, скуп улаза U и скуп излаза Y састоји се од скупа ненегативних целих бројева $\mathbf{Z}_+$. Понашање система описује правило (или релација) $y \geq u$, тако да је

$$\mathcal{R} = \left\{ (u, y) \in \mathbf{Z}_+ \times \mathbf{Z}_+ \;\middle|\; y \geq u \right\}$$

Очигледно је (5,6) пар улаз-излаз, али (6,5) није. Описани систем је систем улаз-излаз, али није систем са улазно-излазним пресликавањем јер сваком u одговара много, уствари бесконачно много, могућих излаза y.

Међутим, ако се зна да кутија садржи, рецимо y_0 куглица пре убацивања додатних куглица, тада је посматрани систем систем са улазно-излазним пресликавањем (УИП), јер улаз u јединствено одређује излаз као

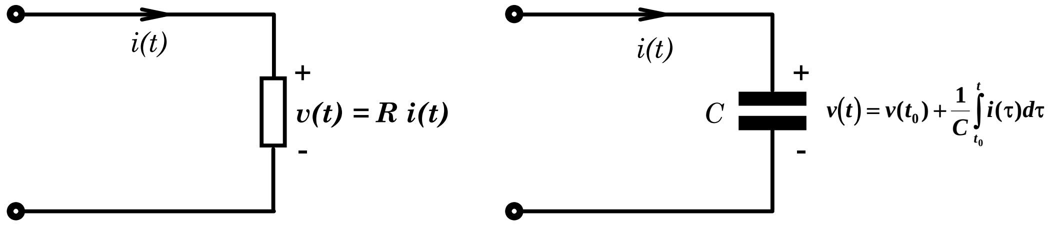
$$y = y_0 + u$$

Ова једначина задаје улазно-излазно пресликавање система. ○

ПАРАМЕТРИЗАЦИЈА ПРОСТОРА ПАРОВА УЛАЗ-ИЗЛАЗ: Када на физички систем у тренутку t_0 делујемо одабраним улазом u до тренутка t_1 и посматрамо одговарајуће излазе система у току истог времена, да ли можемо да очекујемо да ће излази бити једнозначно одређени улазима? У општем случају одговор је одречан. На пример, излази које добијамо из рачунара у току неког периода од тренутка t_0 до t_1 зависиће не само од улазних података, већ и од тога какав је програм и какви су подаци већ у оперативној меморији и регистрима рачунара у тренутку t_0. Другачије речено, да би одредили како улази одређују излазе морамо додати и опис неких ”унутрашњих стања“ система, који би одговарали програму и подацима који су већ у рачунару у тренутку t_0 када почињемо да га користимо. Према томе, скуповима времена T, улаза U и излаза Y, морамо да додамо скуп X унутрашњих стања или ”изгледа меморије“, као што је приказано на слици 1-13.3

Слика 1-13 Неопходан је унутрашњи опис

Пример 6: Посматрајмо неки отпорник и кондензатор као системе са струјом као улазом и напоном као излазом. Та два система су описана једначинама на слици 1-14:



4567Слика 1-14(а) Систем без меморије (б) Систем са меморијом.

Отпорник на слици 1-13а је ”без памћења“ пошто је излаз у неком тренутку одређен једино улазом у том тренутку. Међутим, код кондензатора није довољан улаз $i(t)$ од t_0 до t; такође морамо да знамо и почетни напон $v(t_0)$ да би могли да одредимо на-пон $v(t)$ у тренутку $t > t_0$. Према томе, опис кондензатора очигледно захтева додатне информације - променљиву стања, а непосредно се види да $v(t_0)$ пружа неопходан унутрашњи опис или стање у тренутку t_0. Ако претпоставимо да вредност почетног напона може да буде било који реални број, можемо усвојити за скуп стања $X = \mathbf{R}$. ○

Дефиниција 6: (*Системи без меморије*) Неки систем са улазно-излазним пресликавањем (УИП) на скупу времена *T*, са скупом *улаза U*, скупом *излаза Y* је без *меморије* ако постоји пресликавање $\psi : T \times U \to Y$, тако да ако је (u, y) неки пар улаз-излаз тада је

$$y(t) = \psi(t, u(t)), \quad t \in T$$ ◇

Већ смо видели да је отпорник из претходног примера систем без меморије јер је текућа вредност излаза (напона на његовим крајевима) у потпуности одређена текућом вредности улаза (струје). У општијем случају, ако је напонско-струјна карактеристика отпорника $g(i(t)), t \in T$, излазни напон $v(t)$ је јединствено одређен улазном струјом $i(t)$ као $y(t) = g(i(t)), t \in T$ те је то систем без меморије. Чак и када се напонско-струјна карактеристика отпорника мења током времена, рецимо због старења, систем је још увек без меморије, са улазно-излазним пресликавањем облика $y(t) = g(t, i(t)), t \in T$.

Примери рачунара и електричног кола наводе нас да будемо нешто одређенији око појма стања: стање *је сажета представа претходних понашања система, довољно потпуна да нам омогући да на основу улазних дејстава тачно предвидимо какви ће бити излазна дејства и промене самог стања.*

Тако за кондензатор из примера 6, из

$$i = C\frac{dv}{dt} 8$$

има се

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau \; 9$$

ако претпоставимо да је кондензатор у почетку био неоптерећен или је испражњен у $t = -\infty$. Пошто је

$$10\, v(t_0) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i(\tau)d\tau \; 11$$

то је

$$v(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i(\tau)d\tau+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau=v(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau$$

тако да се види да је одређивање $v(t_0)$ много погодније од бележења свих промена улазне струје од тренутка $t=-\infty$ до $t=t_0$.

Карактеристична особина апстрактног система $\mathcal{A}$ (који је модел неког физичког система) је такође неједнозначност излаза, јер сваком улазу $u \triangleq u_{[t_0,t_1[}$ одговара у општем случају мноштво излаза $y_{[t_0,t_1[}$, тако да су u и свако y из тог скупа неки пар улаз-излаз који припада $\mathcal{A}$. Аналогно, сваком излазу y одговараће у општем случају скуп улаза u.

Један начин јединственог повезивања вредности y са сваком вредношћу u је да се сваком пару улаз-излаз (u,y) придружи неки параметар $x(t_0)\in X$ тако да y буде једнозначно одређено вредностима u и $x(t_0)$. Тај процес ћемо схватити као *параметризацију простора парова улаз-излаз*, а $x(t_0)$ ћемо назвати *стање* $\mathcal{A}$ у тренутку t_0.

Пример 7: Да би јасно показали суштину тог процеса претпоставимо да је $\mathcal{A}$ неки каталог чија свака страница садржи вредност улаза "$\boldsymbol{u}$" и одговарајући излаз "$\boldsymbol{y}$". (Ако се каталог састоји од једне странице, то се апстрактни систем -модел своди на оператор или табелу веза.) Сам каталог у овом случају представља простор парова улаз-излаз, а један од могућих начина параметризације тог простора је нумерација страница каталога на којима се јавља једна иста вредност улаза "$\boldsymbol{u}$". На пример, претпоставимо ради једноставности да је број улаза коначан и да се нека вредност $\boldsymbol{u}$, рецимо u^i, $i=1,\ldots,k$ јавља на страницама $1,2,\ldots,N_i$. Тада, задавањем броја странице и вредности u^i једнозначно одређујемо одговарајућу вредност "$\boldsymbol{y}$". У овом случају простор X се састоји од бројева страница $1,2,\ldots,N$ где је $N=\max(N_1,\ldots,N_k)$. ○

Дакле, када располажемо моделом $\mathcal{A}$ који је одређен мноштвом $\{R_{[t_0,t_1[}\}$ скупова улазно излазних парова (u,y), односно релацијом улаз-излаз $\mathcal{A}(u,y)=0$, поставља се питање како изабрати стање $x(t)$ модела (апстрактног система) $\mathcal{A}$? Другачије речено, како да уредимо простор парова улаз-излаз система $\mathcal{A}$ да $y_{[t_0,t_1[}$ буде једнозначно одређено помоћу $x(t_0)$ и $u_{[t_0,t_1[}$ за $\forall u_{[t_0,t_1[}\in R[u]$ и $\forall x(t_0)\in X$.

После досадашњих нестрогих разматрања увешћемо формалну дефиницију стања, проучити његове особине и начин избора стања.

1-4 ПОЈАМ СТАЊА

Пошто смо се одлучили за одговарајуће скупове **улаза** и **излаза** U и Y код посматраног модела, (у току анализе, можда ћемо морати да преиспитамо ту одлуку), морамо да одредимо у ком ћемо **времену** и у којој **временској представи** анализирати систем. Када посматрамо једноставно електрично коло, код кога је улаз одређени напон у неким тренутку, а излаз је струја очитана на амперметру у неком тренутку, тада можемо да помислимо да се променљиве улаза и излаза мењају континуално, тако да је наш модел **временски непрекидан систем** код кога је скуп времена **T** скуп **R** свих реалних бројева. Са друге стране, временски непрекидан опис дигиталног компјутера (цифарског рачунара) је неодговарајући, те је погодније да га моделујемо као **временски дискретан систем** код кога је скуп времена **T** скуп **Z** свих целих бројева, где узастопни цели бројеви означавају тренутке у којима се извршавају узастопне инструкције или се ”речи“ учитавају или изчитавају.

Понекад није погодно да се разматра цео цео скуп **R** или цео скуп **Z**, те можемо да сузимо нашу пажњу на све тренутке касније или једнаке 0, ако је 0 тренутак у коме почињемо да изучавамо систем. При томе не треба да мислимо да су узастопни тренуци временски дискретног система појављују правилно у односу на неко стварно време, они могу одговарати периодичном интервалу одабирања, или они могу да одговарају узастопном очитавању података са уређаја или машине сваке милисекунде, док неки други подаци могу да се узимају једанпут дневно.

Већ смо уочили да стање апстрактног система $\mathcal{A}$ у тренутку t_0 можемо да посматрамо као параметар $x(t_0)$ који је тако повезан са сваким паром улаз-излаз $\left(u_{[t_0,t[},y_{[t_0,t[}\right)$ да је $y_{[t_0,t[}$ јединствено одређено задатим $u_{[t_0,t[}$ и $x(t_0)$. У том смислу стање модела $\mathcal{A}$ у тренутку t_0 треба да омогући такву параметризацију простора парова улаз-излаз $R_{[t_0,t[}$ да $\boldsymbol{y}$ постане функција од $\boldsymbol{u}$ и $x(t_0)$. Нека смо пару улаз-излаз $\left(u_{[t_0,\infty[},y_{[t_0,\infty[}\right)$ придружили неки параметар $x(t_0)$ и уочимо део тог пара $\left(u_{[\tau,\infty[},y_{[\tau,\infty[}\right)$, $t_0<\tau<\infty$. Тада ће параметар $x(t)$, који је повезан са паром улаз-излаз $\left(u_{[\tau,\infty[},y_{[\tau,\infty[}\right)$, бити јединствено одређен помоћу $x(t_0)$ и улаза $u_{[t_0,\tau[}$. Ову особину стања апстракт-ног система $\mathcal{A}$ детаљније ћемо проучити у облику услова сагласности функције прелаза стања. Сада се природно поставља питање како посматраном систему, који је описан мноштвом скупова улаз-излаз или релацијом улаз-излаз $\mathcal{A}(u,y)=0$, придру-жити стање $x(t)$; односно како уредити простор парова улаз-излаз $R_{[t_0,t[}$ система $\mathcal{A}$ тако да $y_{[t_0,t[}$ буде једнозначно одређено помоћу $x(t_0)$ и $u_{[t_0,t[}$ за $\forall u_{[t_0,t_1[}\in R[u]$ и $\forall x(t_0)\in X$. Видећемо да у многим случајевима тај проблем може да се реши ако се утврди шта треба да се зна о прошлости система $\mathcal{A}$ до тренутка t_0 да би $y_{[t_0,t[}$ могло једнозначно да се одреди за дато $u_{[t_0,t[}$. Подсетимо се да чињеница да је $y_{[t_0,t[}$ једнозначно одређено помоћу $x(t_0)$ и $u_{[t_0,t[}$, само по себи не одређује $x(t_0)$ као стање система $\mathcal{A}$ у тренутку t_0. Сада можемо да уведемо следећу дефиницију стања и скупа стања:

<u>Дефиниција 1:</u> Нека простор парова улаз-излаз модела $\mathcal{A}$ може да се параметризује у облику једначине

$$y(t)=A\left(\alpha,u_{[t_0,t[}\right),\quad \forall t>t_0,\forall t_0 \tag{1}$$

где је A функција α и $u_{[t_0,t[}$ за $t_0,t\in T$, $\alpha\in X$, а $u\in R[u]$, $y\in R[y]$ задовољавају услове узајамне и сопствене сагласности. Тада (1) зовемо *једначина улаз-стање-излаз* модела $\mathcal{A}$, X *простор стања* за $\mathcal{A}$, елементе X *стања апстрактног система - модела* $\mathcal{A}$, а α *стање* $\mathcal{A}$ *у тренутку* t_0.

Када су ти услови испуњени тада је:

а) $\mathcal{A}$ систем који је *потпуно одређен* својом једначином улаз-стање-излаз (1);

б) одсечак $y_{[t_0,t[}$ је *одсечак одзива система* $\mathcal{A}$ на улаз $u_{[t_0,t[}$ који почиње да делује у стању α, и

в) $u_{[t_0,t[}$ и $y_{[t_0,t[}$ образују *пар улаз-излаз у односу на* неко $\alpha \in X$, тј.

$$y_{[t_0,t[} = \overline{A}\left(\alpha, u_{[t_0,t[}\right) \tag{2}$$

Казаћемо да пар $u_{[t_0,t[}, y_{[t_0,t[}$ *задовољава* једначину улаз-излаз-стање (2), односно (1), ако $u_{[t_0,t[}$ и $y_{[t_0,t[}$ образују пар улаз-излаз у односу на неко $\alpha \in X$. ◇

Ознаку $\overline{A}$ користимо да би разликовали $y(t)$ и $y_{[t_0,t[}$ пошто је $\overline{A}$ функција дефинисана на $X \times R[u]$ са вредностима у $R[y]$, док је A функција на $X \times R[u]$ са вредностима $R[y(t)]$. С друге стране, према (2) је

$$R[y] = \left\{\overline{A}\left(\alpha, u_{[t_0,t[}\right) \mid \alpha \in X \wedge u \in R[u]\right\}$$

Услов узајамне сагласности: *Сваки пар улаз-излаз система* $\mathcal{A}$ *задовољава једначину улаз-излаз-стање* (2) и *обратно*; односно детаљније

(*i*) ако је $\left(u_{[t_0,t[}, y_{[t_0,t[}\right)$ или краће написано (u, y), где је $u \in R[u]$ и $y \in R[y]$, произвољан пар функција времена који задовољава релацију улаз-излаз $\mathcal{A}(u, y) = 0$, тада (u, y) задовољава и (2) у смислу да постоји $\alpha \in X$, рецимо α_0, тако да је

$$y_{[t_0,t[} = \overline{A}\left(\alpha_0, u_{[t_0,t[}\right) \tag{3}$$

(*ii*) произвољан пар функција времена (u, y) који задовољава (2) за неко $\alpha \in X$ на интервалу посматрања $[t_0, t[$, образује пар улаз-излаз за $\mathcal{A}$ за $\forall t_0, t \in T$ и $\forall u \in R[u]$. ◇

Суштина услова узајамне сагласности је да једначина улаз-излаз $\mathcal{A}(u, y) = 0$ и једначина улаз-излаз-стање (1), односно (2), представљају један исти систем $\mathcal{A}$.

<u>Пример 1</u>: Нека је $\mathcal{A}$ описано једначином улаз-излаз

$$\frac{dy}{dt} = u \tag{4а}$$

где су u и y реалне функције времена. Размотримо израз

$$y(t) = \alpha + \int_{t_0}^{t} u(\xi) d\xi \tag{4б}$$

где је $\alpha \in X = \mathbf{R}^1 \triangleq \left]-\infty, +\infty\right[$. Сваки улазно-излазни пар система $\mathcal{A}$ облика

$$\left(u(t), y(t)\right) = \left(u(t), c + \int_{t_0}^{t} u(\xi) d\xi\right), \quad t > t_0$$

где је $c \in \mathbf{R}^1$ задовољава 4(б) за $\alpha = c$. Из непосредне замене 4(б) у 4(а) следи да сваки пар (u, y) који задовољава 4(б) такође задовољава и 4(а). Према томе сваки пар улаз-излаз система $\mathcal{A}$ задовољава једначину улаз-стање-излаз и обратно. Приметимо да услов узајамне сагласности не би био задовољен ако би α било задато на $X = [0, \infty[$, јер тада не постоји $\alpha \in [0, \infty[$ за које би пар $\left(t, -1 + t^2/2\right)$, који је улазно-излазни пар система $\mathcal{A}$, задовољавао 4(б) на $[0, \infty[$. ○

Први услов сопствене сагласности: *За све* t_0 *одзив* $y(t)$ *у произвољном тренутку времена* $t > t_0$ *једнозначно одређују* α *и* $u_{[t_0,t[}$. ◇

Другачије речено, да би скуп X био простор стања система $\mathcal{A}$ он треба да има следеће својство: ако су задати произвољно стање $\alpha \in X$ система $\mathcal{A}$ у тренутку t и произвољан улаз $u_{[t_0,t[}$ у простору улаза система $\mathcal{A}$, тада је излаз система у тренутку t једнозначно одређен вредностима α и $u_{[t_0,t[}$ и не зависи од вредности u и y у тренуцима времена пре тренутка t_0. Основна особина стања система $\mathcal{A}$ у тренутку t_0 је "раздвајање" будућег ($t > t_0$) од прошлог ($t < t_0$), у смислу да оно садржи све информације о прошлости система $\mathcal{A}$ које су неопходне за одређивање одзива система $\mathcal{A}$ на произвољан улаз који почиње да делује у тренутку t_0.

Пример 2: Релација улаз-излаз-стање 4(б) из примера 1 очигледно задовољава први услов сопствене сагласности. Уочимо да то важи без обзира на област промене α. ○

Пример 3: Једноставан пример релације улаз-излаз-стање која не задовољава први услов сопствене сагласности због неједнозначности је једначина $y^2 = \alpha u, \alpha \in \mathbf{R}^1$, где су u и y реалне функције времена. Други пример је

$$y(t) = \alpha + \int_{t_0}^{t+1} u(\xi)d\xi, \quad \alpha \in \mathbf{R}^1, t > t_0$$

Овде услов није испуњен пошто излаз у тренутку t не може да се одреди ако су непознате вредности улаза између t и $t+1$. ○

Други услов сопствене сагласности: *Ако релацију улаз-излаз-стање задовољава пар* $\left(u_{[t_0,t_1[}, y_{[t_0,t_1[}\right)$, *тада њу задовољавају сви парови облика* $\left(u_{[\tau,t_1[}, y_{[\tau,t_1[}\right), \tau \in [t_0,t_1[$ *где су* $u_{[\tau,t_1[}$ *и* $y_{[\tau,t_1[}$ *одсечци* $u_{[t_0,t_1[}$ *и* $y_{[t_0,t_1[}$, *за све* $\alpha \in X$ *и све парове улаз-излаз који се односе на* α.. ◇

Да би проучили смисао овог услова увешћемо неке погодне ознаке:

(i) ако са u означимо улаз $u_{[t_0,\tau[}$ на интервалу посматрања $[t_0,\tau[$ и са u' улаз $u_{[\tau,t_1[}$ на интервалу посматрања $[\tau,t_1[$, тада ћемо са uu' означити улаз који чине $u_{[t_0,\tau[}$ и $u_{[\tau,t_1[}$ који га следи

$$uu'(t) = \begin{cases} u(t) & \text{ако је } t \in [t_0,\tau[\\ u'(t) & \text{ако је } t \in [\tau,t_1[\end{cases} \tag{5}$$

(ii) Одзив система $\mathcal{A}$ у тренутку τ на улаз $u_{[t_0,\tau[}$ који делује при стању α_0 означићемо са $y(\tau) \triangleq A(\alpha_0,u)$, а одговарајући одсечак излазне функције са $y_{[t_0,\tau[} \triangleq \overline{A}(\alpha_0,u)$ где цртица означава да је $\overline{A}(\alpha_0,u)$ одсечак излазне функције y а не вредност y у тренутку t. Са $\overline{A}(\alpha,u')$ означавамо излаз $y_{[\tau,t_1[}$, тј. одзив система $\mathcal{A}$ на улаз $u' = u_{[\tau,t_1[}$ при почетном стању α у тренутку τ.

Нека је (uu',yy') пар улаз-излаз који задовољава релацију улаз-излаз-стање (2) за $\alpha = \alpha_0$, тј. $yy' = \overline{A}(\alpha_0,uu')$. Тврђење да (u',y') задовољава (2) је еквивалентно тврђењу да постоји непусто мноштво Q вредности $\alpha \in X$ за које је релација

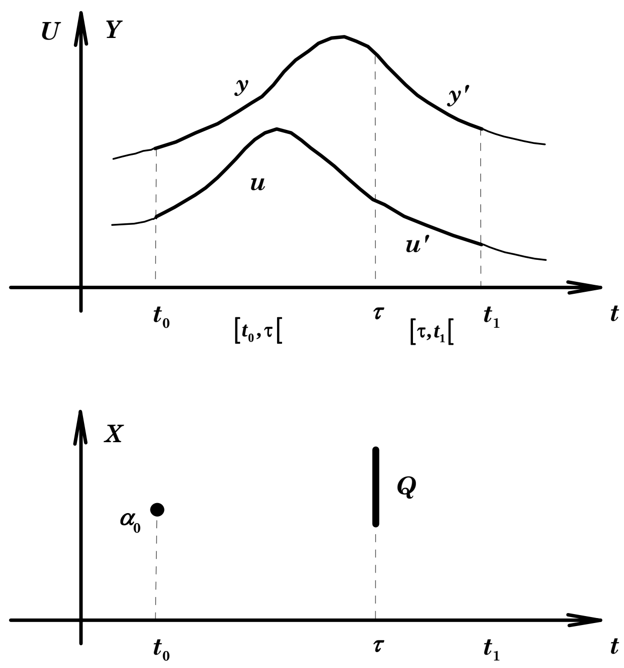
$$y' = \overline{A}(\alpha,u') \tag{6}$$

задовољена за све $\alpha \in Q$:

$$Q \triangleq \left\{\alpha \mid y' = \overline{A}(\alpha, u')\right\}, \quad \alpha \in X \tag{7}$$

тј. Q је скуп свих $\alpha \in X$ који задовољавају једначину (6). Сада други услов сопствене сагласности можемо исказати преко скупа Q на следећи начин:

Скуп Q је непуст за све u, u' и α_0; односно, *ако је (uu', yy') произвољан пар улаз-излаз који задовољава релацију улаз-излаз-стање* (2), тј. $yy' = \overline{A}(\alpha_0, uu')$, *тада и (u', y') задовољава релацију улаз-излаз-стање* (2), тј. $y' = \overline{A}(\alpha, u')$ *за неко* $\alpha \in X$ (слика 1-15). *То мора да важи за све* $\alpha \in X$, *све* $uu' \in R[u]$ *и* $\forall t_0, \tau, t_1 \in T$.



Слика 1-15 Други услов сопствене сагласности

Други услов сопствене сагласности уствари указује да је неопходно да простор стања X буде довољно богат да садржи сва могућа почетна стања и услове система $\mathcal{A}$. Да би то лакше и боље схватили посматрајмо следећи пример:

Пример 4: Нека је систем $\mathcal{A}$ описан једначином улаз-излаз-стање:

$$y(t) = \alpha^2 + \int_{t_0}^{t} u(\xi) d\xi \tag{8}$$

где су u и y реалне функције времена и $\alpha \in X = \mathbf{R}$. Претпоставимо да је интервал посматрања $[0,3]$ и да је $\alpha = 1$ у почетном тренутку $t_0 = 0$. За $u(t) = -2t$ је $y(t) = 1 - t^2$ на интервалу $[0,3]$, те је пар улаз-излаз у односу на $\alpha_0 = 1$ пар $\left(-2t, 1 - t^2\right)$ на интервалу $[0,3]$.

Нека је $\tau = 2$ међутренутак на интервалу посматрања $[0,3]$. Да би $\left(-2t, 1 - t^2\right)$ био улазно излазни пар на интервалу $[2,3]$ морала би да постоји јединствена вредност α^2 за коју тај пар задовољава релацију улаз-излаз-стање (8)

$$y(t) = 1 + \int_{0}^{2} (-2\xi) d\xi + \int_{2}^{t} u(\xi) d\xi, \quad 2 \le t < 3$$

одакле следи да треба да је

$$\alpha^2 = 1 + \int_0^2 (-2\xi) d\xi = -3$$

Међутим, ова једначина нема решење у $X = \mathbf{R}$, те је скуп Q пуст и други услов сопствене сагласности није задовољен.

Тај услов би био испуњен, ако би релација улаз-излаз-стање (8) била

$$y(t) = \alpha + \int_{t_0}^{t} u(\xi) d\xi$$

Тада би за произвољно $\alpha_0 \in X$ и било које $\tau \in [t_0, t]$ из последње једначине било

$$y(t) = \alpha_0 + \int_{t_0}^{\tau} u(\xi) d\xi + \int_{\tau}^{t} u(\xi) d\xi, \quad t_0 \le \tau < t$$

што значи да је за свако $\tau \in [t_0, t]$ пар $\left(u_{[\tau,t[}, y_{[\tau,t[}\right)$ пар улаз-излаз у односу на стање

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \int_{t_0}^{\tau} u(\xi) d\xi \qquad \bigcirc$$

Проучимо шта се дешава са скупом Q из другог услова сопствене сагласности када се улаз $u' \triangleq u_{[t,t_1[}$ мења у простору улаза $R[u]$ система $\mathcal{A}$. Посматрајмо пар улаз-излаз $\left(u_{[t_0,t_1[}, y_{[t_0,t_1[}\right)$ који задовољава релацију улаз-излаз-стање (2) за стање $\alpha_0 \in X$ и нека је t тренутак времена између t_0 и t_1. Претпостављајући да је испуњен други услов сопствене сагласности може се утврдити да је скуп Q вредности α, за које је (u', y') пар улаз-излаз, непуст скуп. Пошто се тада мењају само $\alpha_0, t, u_{[t_0,t[}$ и $y_{[t_0,t[}$, скуп Q може да зависи само од тих променљивих. Ако је испуњен и први услов сопствене сагласности, излаз $y_{[t_0,t_1[}$ је једнозначно одређен преко α_0 и $u_{[t_0,t_1[}$. Тада је Q једнозначно одређено вредностима α_0, t и $u_{[t_0,t[}$, или при задатом t вредностима α_0, u и u', јер је $u_{[t_0,t_1[} = uu'$, те ћемо писати

$$Q(\alpha_0, u, u') \triangleq \left\{\alpha \mid yy' = \overline{A}(\alpha_0, uu') \wedge y' = \overline{A}(\alpha, u')\right\}$$

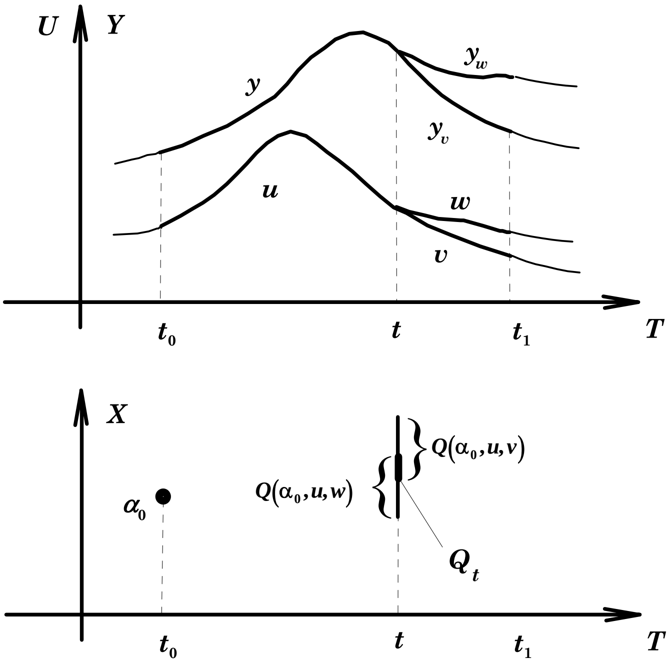
Замислимо низ опита код којих су α_0 и $u \triangleq u_{[t_0,t[}$ исти у свим опитима, а $u' \triangleq u_{[t,t_1[}$ се мења од опита до опита. При томе се не мења само вредност u' на интервалу $[t, t_1[$, већ се мења и вредност t_1. Ради једноставности претпоставићемо да су са системом $\mathcal{A}$ изведена два огледа и да је у једном од њих деловао улаз $u' = v$ (тј. $u_{[t,t_1[} = v_{[t,t_1[}$), док је у другом деловао улаз $u' = w,\ v \ne w$. То је представљено на слици 1-16, где y_v и y_w означавају одговарајуће одсечке функција излаза система $\mathcal{A}$

Код првог опита скуп Q је $Q(\alpha_0, u, v)$, а код другог опита $Q(\alpha_0, u, w)$. По дефиницији, $Q(\alpha_0, u, v)$ је скуп свих тачака из X у односу на које је (v, y_v) пар улаз-излаз који задовољава релације улаз-излаз-стање

$$\begin{aligned} y_v &= \overline{A}(\alpha, v) \\ yy_v &= \overline{A}(\alpha_0, uv) \end{aligned} \tag{9}$$

Такође је $Q(\alpha_0, u, w)$ скуп свих тачака из X у односу на које је (w, y_w) пар улаз-излаз који задовољава релације улаз-излаз-стање

$$
\begin{aligned}
y_w &= \overline{A}(\alpha, w) \\
yy_w &= \overline{A}(\alpha_0, uw)
\end{aligned}
\tag{9a}
$$



Слика 1-16 Трећи услов сопствене сагласности

Према томе, скуп Q_t свих тачака из *X*, у односу на које су и (v, y_v) и (w, y_w) парови улаз-излаз који задовољавају релације (9) и (9а), је *пресек* скупова $Q(\alpha_0, u, v)$ и $Q(\alpha_0, u, w)$ или $Q_t = Q(\alpha_0, u, v) \bigcap Q(\alpha_0, u, w)$.

У општијем случају, када посматрамо све опите код којих су α_0 и u непромењиви, а u' се мења у простору улаза $R[u]$ система $\mathcal{A}$, пресек свих скупова *Q*, који су добијени тим опитима (ако су они непусти), биће скуп свих тачака у *X* у односу на које сваки пар (u', y') који задовољава релацију улаз-излаз-стање $yy' = \overline{A}(\alpha_0, uu')$ задовољава релацију $y' = \overline{A}(\alpha, u')$ за све α који припадају том пресеку. Очигледно је да нема смисла говорити о "стању система $\mathcal{A}$ у тренутку *t* " ако је посматрани пресек пуст, јер тада не постоје тачке (стања) у *X* које би биле заједничке за све могуће парове улаз-излаз који почињу у тренутку *t*. Сада, на основу свих ових разматрања можемо да искажемо трећи услов сопствене сагласности.

Трећи услов сопствене сагласности: *Нека је* (uu', yy') *пар улаз-излаз који за неко* α (*рецимо* $\alpha_0 \in X$) *задовољава релацију улаз-излаз-стање*

$$
yy' = \overline{A}(\alpha_0, uu')
$$

где је $uu' \triangleq u_{[t_0,t_1[}$, $yy' \triangleq y_{[t_0,t_1[}$, $u \triangleq u_{[t_0,t[}$, $u' \triangleq u_{[t,t_1[}$. *Нека је* $Q(\alpha_0, u, u')$ *скуп свих* $\alpha \in X$ *за које је* (u', y') *пар улаз-излаз који задовољава релацију улаз-излаз-стање* (2)

$$
Q(\alpha_0, u, u') \triangleq \left\{ \alpha \mid y' = \overline{A}(\alpha, u') \wedge yy' = \overline{A}(\alpha_0, uu') \right\}
\tag{10}
$$

Тада пресек

$$
Q_t \triangleq \bigcap_{u'} Q(\alpha_0, u, u')
\tag{11}
$$

добијен по свим $u' \triangleq u_{[t,t_1[}$ *у простору* $R[u]$ *улазних функција система* $\mathcal{A}$ *треба да буде непуст за све* t_0, *све* $\alpha_0 \in X$ *и све одсечке улаза у у простору улаза система* $\mathcal{A}$. ◇

Пошто Q_t, одређено изразом (11), зависи само од α_0 и u означићемо га $Q_t(\alpha_0, u)$ где t означава крајњи тренутак интервала посматрања на коме је одређен улаз u. Уочимо да из дефиниције трећег услова сопствене сагласности који може да буде незадово-љен чак иако су сви скупови $Q(\alpha_0, u, u')$ непусти, непосредно следи да ако је испуњен трећи услов сопствене сагласности биће испуњен и други услов сопствене сагласно-сти. У том смислу, трећи услов сопствене сагласности *укључује* други услов сопствене сагласности, али обратно не важи.

Пример 5: Посматрајмо релацију улаз-излаз-стање

$$y(t) = \alpha + \int_{t_0}^{t} u(\xi)d\xi \tag{12}$$

где су u и y реалне функције времена и $\alpha \in X = \mathbf{R}$. Нека је $\alpha_0 = -3, t_0 = 0, t = 1, t_1 > 1$ и $u(\xi) = 2 - 2\xi$ за $0 \le \xi < t$. Вредност $u(\xi)$ за $1 \le \xi < t_1$ мења се од опита до опита.

Означивши са τ текуће време на интервалу $[1, t_1]$ и делећи интервал интеграљења у (12) на два дела, од 0 до 1 и од 1 до τ, за задате вредности α_0, t_0, t и $u_{[0,\tau[}$ биће

$$y(\tau) = -3 + \int_0^1 (2 - 2\xi)d\xi + \int_1^\tau u(\xi)d\xi, \quad 1 \le \tau < t_1$$

или

$$y(\tau) = -2 + \int_1^\tau u(\xi)d\xi, \quad 1 \le \tau < t_1 \tag{13}$$

Види се да ова једначина има исти смисао као и (12) , при чему пар $\left(u_{[1,t_1[}, y_{[1,t_1[}\right)$, где се $y_{[1,t_1[}$ одређује из (13), задовољава релацију улаз-излаз-стање (12) за $\alpha = -2$. Следи да је скуп Q, одређен изразом (10), непуст јер садржи $\alpha = -2$ као елемент. Приметимо да је $u^1 = u_{[1,t_1[}$ и $y^1 = y_{[1,t_1[}$ и да за било какву функцију $u_{[1,t_1[}$ пар $\left(u_{[1,t_1[}, y_{[1,t_1[}\right)$ задовољава (12) за $\alpha = -2$. Пошто сви скупови Q, који се добијају за различите $u_{[1,t_1[}$, садрже тачку $\alpha = -2$, то она припада њиховом пресеку Q_1 (одређеном изразом (11)). То значи да је Q_1 непуст скуп за $t = 1$ и $u(\xi) = 2 - 2\xi$ за $0 \le \xi < t$. Очигледно се исти резултат добија за произвољно t између t_0 и t_1, као и за било који улаз $u_{[t_0,t[}$. Према томе, једначина (12) задовољава трећи услов сопствене сагласности. ○

Претпоставимо да смо утврдили да релација улаз-излаз-стање $y = A(\alpha, u)$, за $\alpha \in X$ задовољава четири услова сагласности. Када је променљива $\alpha' = \mu(\alpha)$ узајамно једнозначно повезана са α, где је μ узајамно једнозначно пресликавање скупа X у скуп X, тада је очигледно да ће релација улаз-излаз-стање $y = A'(\alpha', u)$ такође задовољавати четири услова сагласности и α' можемо разматрати као стање систе-ма $\mathcal{A}$. Приметимо да такво узајамно једнозначно пресликавање у простору стања уствари преозначавање елемената из X које се не одражава на испуњење услова сагласности или вид релације улаз-излаз-стање. Међутим, то преозначавање мењаће у општем случају вид једначине прелаза стања система $\mathcal{A}$, те је често погодно ко-ристити узајамно једнозначно пресликавање X у X за упрошћавање облика једначине прелаза стања. Споменута трансформација је најчешће линеарна и у суштини значи прелаз на нови координатни систем у простору стања X.

Када је систем $\mathcal{A}$ описан релацијом улаз-излаз $\mathcal{A}(u,y)=0$, одговарајући вектор стања $x(t)$ одређује се помоћу $u_{[t_0,t[}$ и $y_{[t_0,t[}$, а затим се проверавају услови узајамне и сопствене сагласности.

<u>Пример 6</u>: Веома једноставан систем, електрични кондензатор, описан је релацијом улаз-излаз

$$i = C\frac{dv}{dt}$$

ако је улаз струја i кроз кондензатор, излаз напон v на кондензатору и C капацитивност кондензатора (константан параметар). Већ смо показали да ако знамо $v(t_0)$, вредност напона v у тренутку t_0, можемо одредити вредност v у било ком наредном тренутку $t > t_0$ за познате вредности улаза $i_{[t_0,t[}$ из релације

$$v(t) = v(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)\,d\tau \tag{14}$$

што значи да је (14) уствари релација улаз-излаз-стање, при чему је $v(t_0)$ почетно стање $x(t_0)$. Простор стања је $X = \mathbf{R}^1 =]-\infty,+\infty[$, а простори улаза и излаза су $U = R[i(t)] = \mathbf{R}^1$ и $Y = R[v(t)] = \mathbf{R}^1$. У примерима 2 и 5 смо проверили да једначина (14) задовољава услове сагласности ако је $v(t)$ стање система $\mathcal{A}$ у тренутку t. Приметимо да ако улази садрже и делта функцију $\delta(t-t_0)$ у тренутку t_0, израз (14) мора да буде

$$v(t) = v(t_0-) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)\,d\tau, \quad t \ge t_0$$

и да се $\delta(t-t_0)$ садржи у интервалу интеграљења $[t_0,t]$. На пример, за $i(t)=\delta(t)$ и $t_0 < 0 < t$ је

$$v(t) = v(t_0-) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} \delta(\tau)\,d\tau = v(t_0-) + \frac{1}{C}, \quad t > 0$$

и значи да у тренутку $t=0$ постоји скок напона једнак $1/C$. ○

<u>Пример 7</u>: Посматрајмо часовник који има само једну казаљку која показује часове. Нека положај казаљке одређује промењива x која добија вредности $0,1,\ldots,11$, при чему време између 0 и 1, искључујући 1, посматрамо као први сат (x=1), време између 1 и 2, искључујући 2, посматрамо као други сат (x=2), итд. Претпоставимо да пре истека сваког интервала бацамо коцку и ручно померамо малу казаљку за онолико сати колико показује коцка. На пример, ако је у тренутку $t=3\,(t=0,1,2,3,\ldots)$, $x(3)=$ 4 и на коцки је испао број 6, тада се казаљка поставља на $x=4+6=10$, тј. $x(4)=10$.

Број добијен бацањем коцке у тренутку t сматраћемо за улаз који делује на часовник. Сматраћемо да је излаз у тренутку t једнак 0 ако је $x(t)$ парно и 1 ако је $x(t)$ непарно. Да би разјаснили шта да изаберемо за стање посматраног система треба да одговоримо на питање шта је неопходно да знамо у тренутку t_0 да би могли да одредимо одзив на било који улаз који делује у тренутку t_0. Уствари, треба да одредимо релацију улаз-излаз-стање посматраног система и проверимо да ли она задовољава услове сопствене сагласности. (Пошто при описивању система не користимо релацију улаз-излаз не треба проверавати услов узајамне сагласности. У овом примеру неопходно је да буду задовољени само услови сопствене сагласности).

Означимо са $n \bmod p$ најмањи ненегативни остатак целог броја n, који се доби-ја при сабирању или одузимању од броја n бројева који су дељиви са p. На пример, $5 \bmod 3 = 2, 2 \bmod 3 = 2, 10 \bmod 5 = 0, 7 \bmod 2 = 1$. Означивши са $x(t_0)$ почетни поло-жај казаљке у $t = t_0$, а бројеве који се појављују на коцки са $u(t_0), u(t_0+1), \ldots,$ биће

$$x(t) = \left[x(t_0) + u(t_0) + u(t_0+1) + \cdots + u(t-1)\right] \bmod 12$$

и како је излаз повезан са $x(t)$ релацијом

$$y(t) = x(t) \bmod 2$$

тражена релација улаз-излаз-стање је

$$y(t) = \left\{\left[x(t_0) + u(t_0) + u(t_0+1) + \cdots + u(t-1)\right] \bmod 12\right\} \bmod 2$$

или сажетије

$$y(t) = \left[x(t_0) + u(t_0) + u(t_0+1) + \cdots + u(t-1)\right] \bmod 2 \tag{15}$$

пошто се 2 садржи у 12.

У овом примеру простор стања је коначан скуп $X = \{0,1,\ldots,11\}$, простор улаза $U = R[u(t)] = \{1,2,\ldots,6\}$ и простор излаза $Y = R[y(t)] = \{0,1\}$ је такође коначан скуп.

Да би показали да (15) задовољава услове сопствене сагласности, написаћемо га у облику

$$y(t) = \left[x(t_0) + u(t_0) + \cdots + u(t'-1) + u(t') + \cdots + u(t-1)\right] \bmod 2$$

где је t' произвољан тренутак између t_0 и $(t-1)$. Посматрајући $u(t'), \ldots, u(t-1)$ као низ улаза која делује од тренутка t', може се написати

$$y(t) = \left[x(t') + u(t') + \cdots + u(t-1)\right] \bmod 2, \quad t' > t_0 \tag{16}$$

ако је

$$x(t') = x(t_0) + u(t_0) + \cdots + u(t'-1) \tag{17}$$

Како је израз (16) истог облика као (15) и $x(t')$ не зависи од $u(t'), \ldots, u(t-1)$ то је задовољен трећи услов сопствене сагласности, те је $x(t')$ стање система $\mathscr{A}$ у тренутку t'. Први услов сопствене сагласности је тривијално задовољен, а други услов сопствене сагласности је садржан у трећем услову.

Лако се проверава да други услов сопствене сагласности није испуњен ако је простор стања $\{1,3,5,7\}$ јер стање $x(t')$, задато изразом (17), не би увек било елемент тог скупа, те би за неке улазе u скуп $Q_{t'}$ био пуст. На пример, нека су за $t_0 = 0$ и $t' = 4$ $x(t_0) = 7, u(t_0+1) = u(1) = 1, u(t_0+2) = u(2) = 4, u(t'-1) = u(3) = 2$. Како је тада $x(t') = (7+1+4+2) \bmod 2 = 0$ то $x(t')$ није елемент простора стања $\{1,3,5,7\}$. ○

Проучимо следећи важан проблем: ако је систем $\mathscr{A}$ описан релацијом улаз-излаз-стање $y = \overline{A}(\alpha, u)$, где је $\alpha = x(t_0) \in X$ (стање система $\mathscr{A}$ у тренутку t_0), како можемо наћи скуп свих стања у X која су *еквивалентна* неком стању α_0 у смислу да је (i) одзив система $\mathscr{A}$ на u' исти за сва почетна стања из Q_t и (ii) то важи за све $u' \in R[u]$. Тада би било који елемент $\alpha \in Q_t$ могли да посматрамо као елемент који представља цео скуп Q_t.

Претпоставимо да незнајући да је α_0 почетно стање система $\mathcal{A}$, делујемо на $\mathcal{A}$ неким улазом u^1 и посматрамо одговарајући излаз y^1. Пошто располажемо релацијом улаз-излаз-стање, можемо (у принципу) одредити сва могућа почетна стања α за које је (u^1, y^1) пар улаз-излаз. Означимо тај скуп стања са

$$Q(\alpha_0, u^1) = \{\alpha \mid \overline{A}(\alpha_0, u^1) = \overline{A}(\alpha, u^1)\}$$

Затим узимамо други примерак система $\mathcal{A}$ (у том истом почетном стању), делујемо на њега улазом u^2 и сагледавамо излаз y^2. Нека је $Q(\alpha_0, u^2)$ скуп стања у односу на која је (u^2, y^2) пар улаз-излаз. Сада можемо тврдити да α_0 мора да припада пресеку скупова $Q(\alpha_0, u^1)$ и $Q(\alpha_0, u^2)$.

Понављајући тај оглед (ако је неопходно и бесконачно пута) долазимо до закључка да α_0 мора да припада пресеку скупова $Q(\alpha_0, u^1), Q(\alpha_0, u^2), Q(\alpha_0, u^3), \ldots$. Тај пресек није пуст јер је $\alpha_0 \in Q(\alpha_0, u^i), \forall i$. Означимо тај пресек са

$$Q(\alpha_0) = \bigcap_u Q(\alpha_0, u) = \bigcap_u \{\alpha \mid \overline{A}(\alpha_0, u) = \overline{A}(\alpha, u)\} \tag{18}$$

где је пресек узет по свим u у простору улазних функција $R[u]$ система $\mathcal{A}$. На тај начин, после свих опита можемо само утврдити да почетно стање припада $Q(\alpha_0)$ и никакав нови опит не може нам дати додатне информације о почетном стању система $\mathcal{A}$.

Нека је описани опит изведен на систему $\mathcal{A}$ са простором стања X, који је у почетном тренутку t_0 био у стању $\alpha_i \in X$, а деловао је улаз $u = u_{[t_0, t[}$ и добијен одзив $\overline{A}(\alpha_i, u)$ на интервалу посматрања $[t_0, t_1[$. Посматрајмо сада оглед код кога је почетно стање $\alpha_j \in X$. Може се десити да су одзиви $\overline{A}(\alpha_i, u)$ и $\overline{A}(\alpha_j, u)$ истоветни при деловању неког улаза u или чак при деловању било ког улаза $u \in R[u]$. Тада кажемо да су α_i и α_j **еквивалентна стања**, пошто је понашање система $\mathcal{A}$ из почетног стања α_i истоветно са понашањем система из почетног стања α_j, у смислу следеће дефиниције:

<u>Дефиниција 2:</u> Стање α_i је *еквивалентно са стањем* α_j ако и само ако је за било који улаз u одзив система $\mathcal{A}$ из почетног стања α_i истоветан са одзивом система $\mathcal{A}$ из почетног стања α_j

$$\{\alpha_i \backsim \alpha_j\} \Leftrightarrow \{\overline{A}(\alpha_i, u) = \overline{A}(\alpha_j, u)\} \; \forall u_{[t_0, t[} \in R[u], t_0, t_1 \in T \qquad \diamond$$

<u>Пример 8</u>: Посматрајмо систем из примера 7 са простором стања $\{0,1,2,\ldots,11\}$ простором улаза $\{1,2,\ldots,6\}$ и простором излаза $\{0,1\}$, док t узима вредности из скупа $\{0,1,2,\ldots\}$ и релација улаз-излаз-стање је

$$y(t) = [x(t_0) + u(t_0) + u(t_0+1) + \cdots + u(t-1)] \bmod 2, \quad t > t_0$$

где је t_0 почетни тренутак, $u(t)$ вредност улаза у тренутку t, $y(t)$ вредност излаза у тренутку t, а $n \bmod 2$ најмањи ненегативни остатак целог броја n, који се добија при сабирању или одузимању од броја n бројева који су дељиви са 2. Како је

$$(a+b) \bmod 2 = (a \bmod 2 + b) \bmod 2$$

за произвољне a и b, једначину улаз-излаз-стање можемо написати као

$$y(t) = \left[x(t_0) \bmod 2 + u(t_0) + u(t_0+1) + \cdots + u(t-1)\right] \bmod 2, \quad t > t_0$$

Из те релације се види да ако су и стање α_i и стање α_j парни или непарни бројеви, на пример $\alpha_i = 2$ и $\alpha_j = 4$ или $\alpha_i = 3$ и $\alpha_j = 7$, тада су α_i и α_j еквивалентна стања пошто је у том случају $\alpha_i \bmod 2 = \alpha_j \bmod 2$. Према томе, стања 0,2,4,6,8,10, као и стања 1,3,5,7,9,11 су међусобно еквивалентна. Парно и непарно стање не могу да буду еквивалентна. На пример, 3 није еквивалентно 4, јер улаз $u(t_0) = 0$ даје излаз 1 ако је почетно стање 3 и излаз 0 када је почетно стање једнако 4. ○

С обзиром на дефиницију еквивалентних стања, скуп $Q(\alpha_0)$ одређен релацијом (18), представља *скуп свих стања из X која су еквивалентна* α_0. То непосредно следи из следећег односа између $\bigcap_u$ и $\forall u$:

Став 1: Нека је $R \triangleq \{(v,w)\}$ скуп уређених парова у области дефинисаности D. Област дефинисаности R је скуп свих v за које је $(v,w) \in R$ за неко w. Дефинишимо скупове $Q(v)$ и Q као

$$Q(v) \triangleq \{w \,|\, (v,w) \in R\} \tag{19a}$$

и

$$Q \triangleq \bigcap_{v \in D} Q(v) \tag{19б}$$

Тада Q може да се представи у облику

$$Q = \{w \mid \forall v[(v,w) \in R]\}, \quad v \in D \tag{20}$$

јер неки елемент припада пресеку $\bigcap_v Q(v)$ ако и само ако припада сваком скупу из мноштва $\{Q(v)\}, v \in D$. ◆

Пошто је у посматраном случају R повезано са релацијом $\bar{A}(\alpha_0,u) = \bar{A}(\alpha,u)$, из дефиниције "мноштво свих стања која су еквивалентна α_0 је $\{\alpha \mid \forall u[\bar{A}(\alpha_0,u) = \bar{A}(\alpha,u)]\}$" проистиче следеће тврђење:

Став 2: Скуп свих стања из простора стања X која су еквивалентна α_0 је

$$Q(\alpha_0) = \bigcap_u \{\alpha \mid \bar{A}(\alpha_0,u) = \bar{A}(\alpha,u)\}$$ ◆

Користећи ова тврђења моћи ћемо да испитамо еквивалентност стања из скупа Q_t који смо увели у исказу трећег услова сопствене сагласности. Сетимо се да смо скуп Q_t дефинисали као пресек (види релацију (11))

$$Q_t(\alpha_0,u) = \bigcap_{u'} Q(\alpha_0,u,u') \tag{21}$$

где је

$$Q(\alpha_0,u,u') = \{\alpha \mid y' = \bar{A}(\alpha,u')\} \tag{22}$$

и где је y' одређено релацијом

$$yy' = \bar{A}(\alpha_0,uu') \tag{23}$$

у којој uu' означава функцију улаза састављену од одсечака u и u', а yy' одговарајућу функцију излаза система $\mathscr{A}$ са почетним стањем α_0.

Нека је α' произвољан елемент скупа $Q_t(\alpha_0,u)$. Тада из (21) и (22) произилази да је $y'=\overline{A}(\alpha',u')$, те (21) можемо написати као

$$Q_t(\alpha_0,u)=\bigcap_{u'}\left\{\alpha \mid \overline{A}(\alpha',u')=\overline{A}(\alpha,u')\right\} \tag{24}$$

На основу става 1 је

$$Q_t(\alpha_0,u)=\left\{\alpha \mid \forall u'\left[\overline{A}(\alpha',u')=\overline{A}(\alpha,u')\right]\right\}$$

што значи да је да је $Q_t(\alpha_0,u)$ скуп свих стања која су еквивалентна α'. Због тога су сва стања из $Q_t(\alpha_0,u)$ међусобно еквивалентна, што је требало и да се докаже.

Већ смо показали да $Q_t(\alpha_0,u)$ може да се представи у облику (24), где y' задовољава (23). Тврђење "за све u'

$$y'=\overline{A}(\alpha,u')$$

и

$$yy'=\overline{A}(\alpha_0,uu')\text{“}$$

може се замењујући прву релацију у другу написати сажетије као

$$\forall u'\left[y\overline{A}(\alpha,u')=\overline{A}(\alpha_0,uu')\right]$$

Како је $y=\overline{A}(\alpha_0,u)$, последња релација постаје

$$\forall u'\left[\overline{A}(\alpha_0,u)\overline{A}(\alpha,u')=\overline{A}(\alpha_0,uu')\right]$$

те се израз (21), имајући на уму став 1 и став 2, може написати у облику

$$Q_t(\alpha_0,u)=\left\{\alpha \mid \forall u'\left[\overline{A}(\alpha_0,u)\overline{A}(\alpha,u')=\overline{A}(\alpha_0,uu')\right]\right\}$$

Сада можемо да дефинишемо "стање система $\mathcal{A}$ у тренутку t" као:

<u>Дефиниција 3:</u> Нека је систем $\mathcal{A}$ описан релацијом улаз-излаз-стање

$$y(t)=A\left(\alpha_0,u_{[t_0,t[}\right),\quad \alpha_0\in X$$

или

$$y=\overline{A}(\alpha_0,u)$$

где је α_0 стање система $\mathcal{A}$ у тренутку t_0.

Тада је *стање* $x(t)$ *система* $\mathcal{A}$ у тренутку $t, t>t_0$, било који елемент скупа

$$Q_t(\alpha_0,u)=\left\{\alpha \mid \forall u'\left[\overline{A}(\alpha_0,u)\overline{A}(\alpha,u')=\overline{A}(\alpha_0,uu')\right]\right\} \tag{25}$$

где је $\alpha\in X$ и $u\triangleq u_{[t_0,t[}$, $u'\triangleq u_{[t,t_1[}$, $uu'\triangleq u_{[t_0,t_1[}$, $\overline{A}(\alpha_0,u)=y_{[t_0,t[}\triangleq y$, $\overline{A}(\alpha,u')=y_{[t,t_1[}\triangleq y'$, $\overline{A}(\alpha_0,u)\overline{A}(\alpha,u')=yy'$. ◇

Стање система $\mathcal{A}$ у тренутку t означило смо са $x(t)$ да би нагласили да је неки елемент скупа $Q_t(\alpha_0,u)$, рецимо α, стање система $\mathcal{A}$ у тренутку t. Зато и почетно стање система $\mathcal{A}$ у тренутку t_0 означавамо са $x(t_0)$. Уочимо да се $x(t_0)$ и у општијем случају $x(t)$ мењају у простору стања X, тј. за сваку вредност t је $R[x(t)]=X$. Компоненте стања $x(t)$ зваћемо *променљиве стања* система $\mathcal{A}$.

Посматрајмо систем $\mathcal{A}$ који је у почетном стању $x(t_0)$ и који је изложен улазном дејству $u_{[t_0,t_1[}$. Стање $x(t_1)$ система $\mathcal{A}$ у тренутку t_1 зваћемо *коначно стање* система $\mathcal{A}$ у односу на улаз $u_{[t_0,t_1[}$. Међутим, када одсечак улазне функције $u_{[t_0,t_1[}$ претходи другом одсечку улазне функције $u_{[t_1,t_2[}$, очигледно је да $x(t_1)$ представља коначно стање за $u_{[t_0,t_1[}$ али и почетно стање за $u_{[t_1,t_2[}$. Приметимо да стање система $\mathcal{A}$ у тренутку t можемо посматрати као коначно стање у односу на улаз $u_{[t_0,t[}$.

Написавши релацију улаз-стање-излаз (1) преко скупова можемо да уведемо следећу дефиницију:

Дефиниција 4: (*систем улаз - излаз - стање*) Нека је T скуп тренутака времена и $\mathcal{U}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{X}$ скупови функција времена одређених на T. Елементи скупа $\mathcal{U}$ су улази, елементи скупа $\mathcal{Y}$ излази и елементи скупа $\mathcal{X}$ су стања. Тада је неки систем **улаз -излаз - стање** одређен подскупом $\mathcal{R} \subset \mathcal{U} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ који се назива *релација* (или правило понашања) *система*, који има следећу особину :

Претпоставимо да $(u', x', y') \in \mathcal{R}$ и $(u'', x'', y'') \in \mathcal{R}$ тако да је

$$x'(t_0) = x''(t_0) \tag{26}$$

за неко $t_0 \in T$. Тада је задовољено следеће:

а) *Сагласност стања* : Нека су улази, излази и стања

$$u(\tau) = \begin{cases} u'(\tau) & \tau < t_0 \\ u''(\tau) & \tau \geq t_0 \end{cases} \qquad y(\tau) = \begin{cases} y'(\tau) & \tau < t_0 \\ y''(\tau) & \tau \geq t_0 \end{cases}$$

$$x(\tau) = \begin{cases} x'(\tau) & \tau < t_0 \\ x''(\tau) & \tau \geq t_0 \end{cases}$$

за $\tau, t_0 \in T$. Тада ако важи (26), (u, y, x) образују тројку улаз-излаз-стање, тј. $(u, y, x) \in \mathcal{R}$.

б) *Каузалност* : Ако је $u'(\tau) = u''(\tau)$ за $t_0 \leq \tau < t,\ t_0, \tau, t \in T$ тада ако је задовољено (26) биће

$$x'(\tau) = x''(\tau) \quad t_0 \leq \tau < t$$

$$y'(\tau) = y''(\tau) \quad t_0 \leq \tau < t$$

за $t_0, \tau, t \in T$. ◇

Из услова сагласности проистиче да ако два различита ”претходна“ улаза, излаза и стања доводе до истог стања у неком датом тренутку, обе ”будућности“ успостављају одговарајуће продужење. Каузалност значи да ако су почетна стања иста и улази се поклапају на неком интервалу посматрања, излази и стања ће се такође поклапати на том интервалу времена. Област X промене стања x назива се *простор стања система*.

Услов (26) одговара особини ”раздвајања“ из првог услова сопствене сагласности стања у дефиницији 1. Услов сагласности у дефиницији 4 је уствари трећи услов сопствене сагласности стања из дефиниције 1 који укључује други услов сопствене сагласности. Он је проистекао из услова сагласности у дефиницији улазно-излазног описа система који захтева да је сваки део неког улазно-излазног пара и сам пар улаз-излаз. Услов каузалности исказује услов узајамне сагласности из дефиниције 1.

Подсетимо се да је одсечак улаза $u_{[t_0,t[}$ одређен као скуп парова $(\tau, u(\tau))$ за

$\tau \in [t_0, t[$, те једначина улаз излаз стање $y(t) = A(x(t_0), u_{[t_0,t[})$ указује да излаз $y(t)$ не зависи само од почетног стања $x(t_0)$ и вредности улаза $u(\tau)$ за $\tau \in [t_0, t[$, већ и од граничних тачака t_0 и t. Када $y(t)$ зависи само од почетног стања $x(t_0)$ и вредности улаза $u(\tau)$, $\tau \in [t_0, t[$, тада је модел система система $\mathcal{A}$ **временски непроменљив** или **стационаран**. Појам временске непроменљивости и формалну дефиницију детаљно ћемо проучити у наредним поглављима.

У проученим примерима смо одредили изразе за стање система $\mathcal{A}$ у тренутку t у зависности од његовог стања у тренутку t_0 и улазних дејстава на интервалу од t_0 до t. У општем случају, ако су испуњени услови сагласности стање $x(t)$ је једнозначно одређено стањем $x(t_0)$ и улазом $u_{[t_0,t[}$, а функционална зависност $x(t)$ од $x(t_0)$ и $u_{[t_0,t[}$ може се одредити, бар у принципу, из релације улаз-излаз-стање

$$y(t) = A(x(t_0), u_{[t_0,t[}) \tag{27}$$

Ово тврђење је непосредна последица дефиниције стања $x(t)$, јер смо $x(t)$ одредили као произвољан елемент скупа $Q_t(\alpha_0, u_{[t_0,t[})$, где је $\alpha_0 = x(t_0)$. Пошто Q_t зависи само од α_0 и $u_{[t_0,t[}$, то мора да важи и за $x(t)$. Из израза (11) произлази да ако је позната релација улаз-излаз-стање (27) и вредности α_0 и $u_{[t_0,t[}$, тада за различите улазе $u' \in R[u]$ система $\mathcal{A}$ можемо одредити скупове $Q(\alpha_0, u, u')$ и затим наћи њихов пресек који је уствари Q_t. На тај начин, бар у принципу, могу се одредити Q_t и $x(t)$ помоћу датих $\alpha_0, u_{[t_0,t[}$ и познате релације улаз-излаз-стање (27). Из примера 6 и 7 се види да је то лако урадити у случајевима када се може непосредно показати да постоји стање, рецимо α, које припада свим скуповима $Q(\alpha_0, u, u')$ те се налази у пресеку Q_t.

Према томе, стање $x(t)$ у тренутку t у зависности од почетног стања $x(t_0)$ у тренутку t_0 и улаза $u_{[t_0,t[}$ одређује **једначина прелаза стања** система $\mathcal{A}$

$$x(t) = \phi(t, t_0, x(t_0), u_{[t_0,t[}) \tag{28}$$

где је функција ϕ **пресликавање прелаза (преображаја)** стања

$$\phi \, : T \times T \times X \times R[u] \to X$$

Да би подвукли да је једначина (28) образована на основу једначине (27) казаћемо да је једначина прелаза стања (28) *изведена* из релације улаз-излаз-стање (27). Ако функција прелаза стања ϕ и улаз u задовољавају услове регуларности, које ћемо детаљније проучити у наредним поглављима, када t_0 тежи t са леве стране тада једначине (27) и (28) прелазе у једначине облика

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \tag{29}$$

$$y(t) = g(t, x(t), u(t)) \tag{30}$$

где је $f : T \times X \times U \to X$ и $g : T \times X \times U \to Y$. Диференцијалну једначину (29) зваћемо **основна једначина прелаза стања** а једначину (30) **једначина излаза**. Када је систем описан основном једначином (29) његова једначина прелаза стања (28) може се у принципу добити решавањем векторске диференцијалне једначине (29). Добијено $x(t)$

биће функција $u_{[t_0,t[}$ и $x(t_0)$. Када је систем описан једначинама (28) и (30) не може се увек (27) превести у основни облик (29). У следећем одељку проучићемо својства стања $x(t)$ и једначине прелаза стања (28) система $\mathscr{A}$ у тренутку *t*.

1-5 ОСОБИНЕ СТАЊА И ЈЕДНАЧИНЕ ПРЕЛАЗА СТАЊА

Према дефиницији 3 из претходног поглавља стање $x(t)$ је елемент скупа $Q_t\left(x(t_0),u\right)$ који се састоји од свих x који задовољавају релацију

$$\forall u' \left[\overline{A}\left(x(t_0),u\right)\overline{A}\left(x(\tau),u'\right)=\overline{A}\left(x(t_0),uu'\right)\right]$$

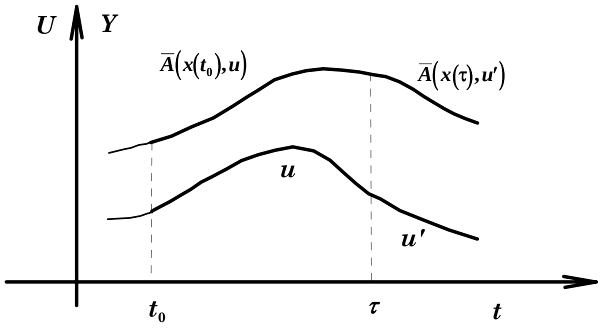
коју можемо да напишемо као

$$\overline{A}\left(x(t_0),uu'\right)=\overline{A}\left(x(t_0),u\right)\overline{A}\left(x(\tau),u'\right) \quad \forall x(t_0)\forall u\forall u' \tag{1}$$

и да искажемо као основно својство стања:

Особина раздвајања: За сваки улаз uu' који чине одсечци u и u', одзив система $\mathcal{A}$ са почетним стањем $x(t_0)$ састоји се од одсечка излаза $\overline{A}\left(x(t_0),u\right)$ и одсечка који га следи $\overline{A}\left(x(\tau),u'\right)$, где је $x(\tau)$ стање система $\mathcal{A}$ у тренутку τ. ◇

Тврђење зовемо *особина раздвајања* јер стање $x(\tau)$ "раздваја" одсечке излаза $\overline{A}\left(x(t_0),u\right)$ и $\overline{A}\left(x(\tau),u'\right)$, а приказана је на слици:



Слика 1-17 Особина раздвајања одзива

Како се најчешће користи релација улаз-излаз-стање у облику $y(t)=A\left(x(t_0),u_{[t_0,t[}\right)$, погодно је у релацији (1) прећи са $\overline{A}$ на A за свако $\tau\in\left[t_0,t\right[$, те (1) постаје

$$A\left(x(t_0),u_{[t_0,t[}\right)=A\left(x(\tau),u_{[\tau,t[}\right),\quad t_0\le\tau<t \tag{2}$$

за сва $x(t_0)\in X$, све улазе u, где је $A\left(x(\tau),u_{[\tau,t[}\right)$ одзив система у тренутку t на $u_{[\tau,t[}$ из почетног стања $x(\tau)$.

<u>Пример 1</u>: Посматрајмо систем из примера 7 у поглављу 1-4. Нека је $t_0=0, t=3, t_1=7$ $u_{[t_0,t_1[}=3122154$ [1] и $x(t_0)=x(0)=3$. Тада из релације улаз-излаз-стање (15) у поглављу 1-4 добијамо

$$\overline{A}(3,3122154)=0111011$$

Стање система $\mathcal{A}$ у тренутку $t=3$ је

$$x(3)=(3+3+1+2)\bmod 12=9$$

[1] Строго говорећи, $u_{[t_0,t_1[}=\left\{(t,u(t))\,\middle|\,t_0\le t<t_1\right\}$ је скуп парова $(0,3),(1,1),(2,2),(3,2),(4,1),(5,5),(6,4)$. Уочимо да се одговарајућа функција излаза такође посматра на интервалу $\left[t_0,t_1\right[$.

и за $u = 312$ и $u' = 2154$ је

$$\overline{A}(3, 312) = 011$$
$$\overline{A}(9, 2154) = 1011$$

тако да је

$$\overline{A}(3, 312\,2154) = \overline{A}(3, 312)\,\overline{A}(9, 2154)$$ ○

Пример 2: Нека је систем $\mathcal{A}$ описан релацијом улаз-излаз-стање

$$y(t) = x(t_0)\,e^{-(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{-(t-\xi)}u(\xi)d\xi \tag{3}$$

где u не садржи делта функције, а $x(t_0) \in X = \mathbf{R}^1, u(t) \in U = \mathbf{R}^1$. Лако се проверава да ако за стање усвојимо

$$x(t) = x(t_0)\,e^{-(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{-(t-\xi)}u(\xi)d\xi \tag{4}$$

тада релација улаз-излаз-стање (3) има особину раздвајања (2). За неко $\tau \in [t_0, t]$, релација улаз-излаз-стање (3) може да се напише као

$$y(t) = x(t_0)\,e^{-(t-t_0)} + \int_{t_0}^{\tau} e^{-(t-\xi)}u(\xi)d\xi + \int_{\tau}^{t} e^{-(t-\xi)}u(\xi)d\xi$$

Из релације (4) добијамо

$$x(\tau) = x(t_0)\,e^{-(\tau-t_0)} + \int_{t_0}^{\tau} e^{-(\tau-\xi)}u(\xi)d\xi$$

одакле следи да је

$$y(t) = x(\tau)\,e^{-(t-\tau)} + \int_{\tau}^{t} e^{-(t-\xi)}u(\xi)d\xi$$

Добијена релација разликује се од (3) само по томе што је $x(t_0)$ замењено са $x(\tau)$, као што је и требало да се покаже. ○

Постоји непосредна веза између особине раздвајања и услова сопствене сагласности из дефиниције стања, које смо проучили у претходном поглављу:

Теорема 1: Ако релација облика

$$y(t) = A\left(x, u_{[t_0,t[}\right), \quad x \in X, u \in R[u] \tag{5}$$

где функција A одређена на $X \times R[u]$ задовољава *особину раздвајања*

$$A\left(x, u_{[t_0,t[}\right) = A\left(x^*, u_{[\tau,t[}\right), \quad t_0 \le \tau < t \tag{6}$$

за све x и u, где је $x^* \in X$ и зависи само од x и $u_{[t_0,\tau[}$, тада релација (5) задовољава три услова сопствене сагласности и x^* је стање система $\mathcal{A}$ у тренутку τ ако је x стање система $\mathcal{A}$ у тренутку t_0. При томе је релација (5) релација улаз-излаз-стање.[2]

Доказ: Први услов сопствене сагласности је задовољен пошто према (5) $y(t)$ једнозначно одређују вредности x и $u_{[t_0,t[}$. Особина раздвајања (6) без исказа "x^* зависи

[2] Приметимо да при описивању система $\mathcal{A}$ нисмо користили релацију улаз-излаз те није неопходно разматрати услов узајамне сагласности.

само од x и $u_{[t_0,\tau[}$" није ништа друго него други услов сопствене сагласности. Коначно, узимајући у обзир и тај исказ, сваки скуп $Q(x,u,u')$ а због тога и пресек $Q_\tau(x,u)$ садрже x^*, те скуп $Q_\tau(x,u)$ није пуст. Према томе, задовољена су сва три услова сопствене сагласности, при чему према дефиницији 1 из поглавља 4 x^* представља стање система $\mathcal{A}$ у тренутку τ, а релација (5) је релација улаз-излаз-стање што је и требало доказати. ◆

Доказано тврђење указује да уместо проверавања услова сопствене сагласности за дату релацију (5) треба само проверити да ли постоји особине раздвајања (6), где x^* зависи само од x и $u_{[t_0,\tau[}$. Уствари, ово тврђење у имплицитном облику користили смо приликом проучавања примера 6 и 7 у претходном поглављу.

Теорема 2: Ако је

$$y(t) = A\left(x(t_0), u_{[t_0,t[}\right) \tag{7}$$

релација улаз-излаз-стање система $\mathcal{A}$, тада одговарајућа једначина прелаза стања

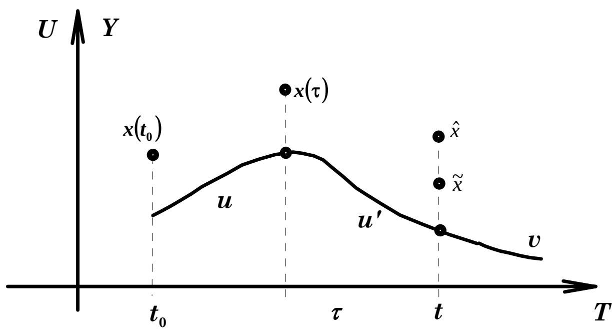
$$x(t) = \phi\left(t, t_0, x(t_0), u_{[t_0,t[}\right) \tag{8}$$

има *особину раздвајања*

$$\phi\left(t, t_0, x(t_0), u_{[t_0,t[}\right) = \phi\left(t, \tau, x(\tau), u_{[\tau,t[}\right) \quad t_0 \le \tau < t \tag{9}$$

за сва $x(t_0)$ и све u.

<u>Доказ:</u> Тврђење ћемо доказати користећи методу супротне претпоставке, полазећи од претпоставке која је приказана на слици:



Слика 1-18 Особина раздвајања стања

Према ознакама са слике је

$$\phi\left(t, t_0, x(t_0), u_{[t_0,t[}\right) = \hat{x} \tag{10}$$

$$\phi\left(t, \tau, x(\tau), u_{[\tau,t[}\right) = \tilde{x} \tag{11}$$

и нека је $\hat{x} \not\sim \tilde{x}$, тј. стање у тренутку t одређено релацијом (10) није еквивалентно стању одређеном релацијом (11) у том истом тренутку. Тада постоји улаз $v_{[t,t_1[}$ да је

$$\overline{A}(\hat{x}, v) \ne \overline{A}(\tilde{x}, v) \tag{12}$$

Посматрајмо одзив система $\mathcal{A}$ из почетног стања $x(t_0)$ на улазно дејство $uu'v$. Користећи особину раздвајања одзива система (1), тај одзив можемо двојако раставити на одсечке

$$\overline{A}\left(x(t_0), uu'v\right) = \overline{A}\left(x(t_0), u\right)\overline{A}\left(x(\tau), u'v\right) \tag{13a}$$

$$\overline{A}\left(x(t_0), uu'v\right) = \overline{A}\left(x(t_0), uu'\right)\overline{A}\left(\hat{x}, v\right) \tag{13б}$$

Примењујући поново особину раздвајања, добија се

$$\overline{A}\left(x(\tau), u'v\right) = \overline{A}\left(x(\tau), u'\right)\overline{A}\left(\tilde{x}, v\right) \tag{14}$$

$$\overline{A}\left(x(t_0), uu'\right) = \overline{A}\left(x(t_0), u\right)\overline{A}\left(x(\tau), u'\right) \tag{15}$$

Замењујући (14) и (15) у (13а) и (13б) и узимајући у обзир (12) добијамо неједнакост

$$\overline{A}\left(x(t_0), uu'v\right) \neq \overline{A}\left(x(t_0), uu'v\right)$$

која противуречи првом услову сопствене сагласности. Према томе, $\hat{x} \backsim \tilde{x}$ и теорема је доказана. ◆

Особина раздвајања једначине промене стања (8) је једно од најважнијих њених својстава. У претходним примерима смо већ користили неке његове посебне одлике, а општије ћемо га проучити у наредним поглављима.

Пример 3: У примеру 2 смо за систем $\mathcal{A}$ описан описан релацијом улаз-излаз-стање (3) нашли да је одговарајућа једначина прелаза стања

$$x(t) = x(t_0)\, e^{-(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{-(t-\xi)} u(\xi) d\xi = \phi\left(t, t_0, x(t_0), u_{[t_0,t[}\right), \quad t \geq t_0$$

Како се за $t = \tau$ из ове релације добија

$$x(\tau) = x(t_0)\, e^{-(\tau-t_0)} + \int_{t_0}^{\tau} e^{-(\tau-\xi)} u(\xi) d\xi$$

једначина прелаза стања може да се напише као

$$x(t) = x(\tau)\, e^{-(t-\tau)} + \int_{\tau}^{t} e^{-(t-\xi)} u(\xi) d\xi = \phi\left(t, \tau, x(\tau), u_{[\tau,t[}\right)$$

То показује да једначина прелаза стања (4) има особину раздвајања описану изразом (9) из теореме 2. ○

Теорема 3: Ако систем $\mathcal{A}$ може да се опише релацијама

$$x(t) = \phi\left(t, t_0, x(t_0), u_{[t_0,t[}\right), \ t > t_0 \tag{16}$$

$$y(t) = \eta\left(x(t), u(t), t\right) \tag{17}$$

где је $x(t_0), x(t) \in X$ а функције ϕ и η су задате на $T \times T \times X \times U$ и $T \times X \times U$, и ако (16) има *особину раздвајања*

$$\phi\left(t, t_0, x(t_0), u_{[t_0,t[}\right) = \phi\left(t, \tau, \phi\left(\tau, t_0, x(t_0), u_{[t_0,\tau[}\right), u_{[\tau,t[}\right) \quad t_0 \leq \tau < t \tag{18}$$

за сва $x(t_0) \in X$ и $u \in U$, *тада* је $x(t)$ стање система $\mathcal{A}$ у тренутку *t*, а (16) је једначина прелаза стања и (17) једначина излаза система $\mathcal{A}$.

Доказ: Замењујући (16) у (17) добијамо релацију

$$y(t) = \eta\left(\phi\left(t, t_0, x(t_0), u_{[t_0,t[}\right), u(t), t\right) \tag{19}$$

која може да се напише у облику

$$y(t) = \mathcal{S}\left(t, t_0, x(t_0), u_{[t_0,t[}\right) \tag{20}$$

Пошто (16) има особину раздвајања (18), замењујући (18) у (19) добијамо

$$y(t) = \eta\Big(\phi\Big(t, \tau, \phi\Big(\tau, t_0, x(t_0), u_{[t_0,\tau[}\Big), u_{[\tau,t[}\Big), u(t), t\Big) \tag{21}$$

Исто тако, (21) може да се добије из (19) ако ако се t_0 замени са τ. Следи да је

$$y(t) = S\big(t, \tau, x(\tau), u_{[\tau,t[}\big)$$

и

$$S\big(t, t_0, x(t_0), u_{[t_0,t[}\big) = S\big(t, \tau, x(\tau), u_{[\tau,t[}\big), \quad t_0 \le \tau < t$$

а то није ништа друго него особина раздвајања релације улаз-излаз-стање. Осим тога, пошто $x(\tau)$ према (16) једнозначно одређују $x(t_0), u_{[t_0,\tau[}$ то (20) на основу теореме 1 представља релацију улаз-излаз-стање система $\mathcal{A}$, при чему је $x(t)$ стање система $\mathcal{A}$ у тренутку t , а (16) и (17) су једначине прелаза стања и излаза система. ◆

Доказана теорема још једном наглашава важност услова сагласности једначине прелаза стања и његову тесну везу са условима сагласности стања које смо проучили у претходном поглављу. Уочимо да доказ теореме важи и у случају када израз (17) за излаз $y(t)$ зависи не само од $u(t)$ већ и од извода улаза $u(t)$ у тренутку *t*. Теорема важи и за још слабија ограничења за $y(t)$. Теорема 3 и њена Последица 4 дају веома погодан, иако посредан, начин за проверу испуњености услова сагласности:

Последица 4: Ако систем $\mathcal{A}$ може да се опише основном једначином прелаза стања и излаза

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\big(x(t), u(t), t\big) \tag{22}$$

$$y(t) = \eta\big(x(t), u(t), t\big) \tag{23}$$

где су функције f и η тако одређене на $T \times X \times U$ да (22) има јединствено решење по $x(t)$, тада је $x(t)$ стање система $\mathcal{A}$ тренутку *t*.

<u>Доказ:</u> Интегралећи (22) од t_0 до *t* добијамо једначину

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f\big(x(\xi), u(\xi), \xi\big)d\xi, \quad t \ge t_0 \tag{24}$$

која може да се посматра као имплицитни облик једначине прелаза стања

$$x(t) = \phi\big(t, t_0, x(t_0), u_{[t_0,t[}\big)$$

при чему је према претпоставци, $x(t)$ једнозначно одређено ако су задати $x(t_0), u_{[t_0,t[}$. Лако се проверава да (24) задовољава услов сагласности. За $t_0 \le \tau < t$, (24) може да се напише у облику

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{\tau} f\big(x(\xi), u(\xi), \xi\big)d\xi + \int_{\tau}^{t} f\big(x(\xi), u(\xi), \xi\big)d\xi$$

или

$$x(t) = x(\tau) + \int_{\tau}^{t} f\big(x(\xi), u(\xi), \xi\big)d\xi$$

пошто је према (24)

$$x(\tau) = x(t_0) + \int_{t_0}^{\tau} f\big(x(\xi), u(\xi), \xi\big)d\xi$$

Сада доказ тврђења непосредно следи из претходне теореме. ◆

Из теорије обичних диференцијалних једначина је познато да је довољан услов да (22) има јединствено решење (при задатом u) које задовољава дати почетни услов $x(t_0) = x_0$, *Липшицов услов* који захтева да постоји коначна константа L, која зависи од u, тако да је за сва $x(t), x'(t) \in X$

$$\left\| f\left(x(t), u(t)\right) - f\left(x'(t), u(t)\right) \right\| \le L \left\| x(t) - x'(t) \right\| \quad t \in T \tag{25}$$

где $\|\cdot\|$ означава норму вектора. За линеарне системе, на основу последице 4 и услова (25), непосредно може да се искаже следеће тврђење:

Последица 5: Ако је систем $\mathcal{A}$ описан линеарном диференцијалном једначином прелаза стања и излаза

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= F(t)x(t) + G(t)u(t) \\ y(t) &= H(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned} \tag{26}$$

где су $F(t), G(t), H(t), D(t)$ матрице које су у општем случају непрекидне функције времена, тада је услов (25) испуњен за

$$L = \sum_{i,j} \sup_{t \in T} \left| a_{ij}(t) \right| \tag{27}$$

где је $a_{ij}(t)$ ij-ти члан матрице $A(t)$, а $x(t)$ је стање система $\mathcal{A}$ тренутку t. ◆

Услове постојања решења диференцијалне једначине (22) и линеарне диференцијалне једначине (26), као и поступке налажења решења проучићемо у наредним поглављима пошто изучимо неопходне математичке структуре и теорему о непокрет-ној тачци.

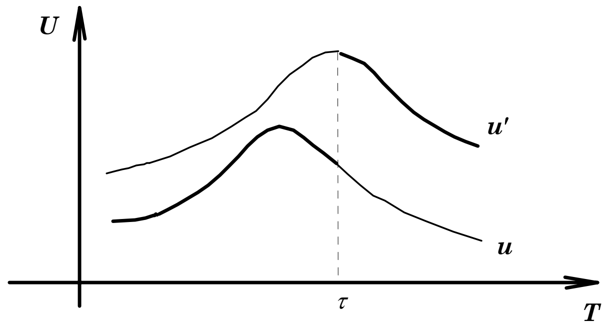
При разматрању могућих функција улаза које могу да делују на систем, у случају дискретног времена можемо очекивати да ће сви могући низови улазних дејстава бити допустиви - одговарајући рад рачунара не зависи од неких посебних зависности између улазних података који се учитавају један за другим, све док они одговарају текућем програму. Међутим, при проучавању временски непрекидних система анализа може поприлично да зависи од непрекидности или чак и од диференцијабилности функције улаза. Када желимо да искључимо превелике промене улаза, обично се за временски непрекидне системе не одређује само скуп U тренутних вредности улаза, већ и **скуп Ω допустивих функција улаза** из T у U. Дакле, ако је $u \in \Omega$, тада је u *функција* и свака њена *вредност* лежи у U, тј. $u(t) \in U$.

Често се за дате функције улаза u и u', захтева да се функција u користи до неког тренутка τ и u' после тог тренутка, те је неопходно да у том случају класа Ω буде **затворена у односу на спајање функција**, тј. ако су u и u' допустиве, таква ће бити и функција

$$u u' : t \mapsto \begin{cases} u(t), & t \le \tau \\ u'(t), & t > \tau \end{cases}$$

која је једнака u до тренутка τ, а после тога u', као што је приказано на слици 1-19, на којој је uu' представљена подебљаним делом криве. Пошто смо дефинисали да $uu'(t)$ буде $u(t)$ до тренутка τ, укључујући $t = \tau$ понекад се та операција назива и *спајање са лева* уместо само *спајање*.

Уобичајени избор мноштва допустивих функција улаза укључује део по део непрекидне функције и део по део диференцијабилне функције - функције које могу да се раставе на непрекидне или диференцијабилне функције на сваком од коначног броја подинтервала реалне осе.



Слика 1-19 Спајање две функције у тренутку τ

Функција uu' на слици 1-19 је очигледно део по део диференцијабилна због прекида у тачки τ. У случају кондензатора у примеру 6 из поглавља 1-4, било која интеграбилна функција i била би допустива, тако да

$$\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau$$

има смисла, те очигледно интеграбилне функције задовољавају услов спајања.

Када добијемо рачунар у ”*нултом стању*“ са свим регистрима постављеним на 0 и не делујемо никаквим улазом, тада смо уствари применили улазно дејство ”неделовања“ на систем! Због тога је погодно да се у скуп U вредности улазних дејстава укључи посебан елемент који одговара ”*нултом улазу*“.

Пошто смо одредили скуп Ω допустивих функција улаза, можемо да опишемо како нека допустива функција улаза система утиче на стање система и излаз система. У претходном поглављу смо утврдили да ново, промењено стање $x(t_1)$ у тренутку t_1, у зависности од почетног стања $x(t_0)$ у тренутку t_0 и деловања улаза u на интервалу времена $[t_0, t_1[$, може да се одреди помоћу **једначине прелаза стања** система као

$$x(t_1) = \phi(t_1, t_0, x(t_0), u) \tag{28}$$

Функција ϕ, коју смо назвали **пресликавање прелаза (преображаја) стања**

$$\phi : T \times T \times X \times \Omega \to X \tag{29}$$

нам каже да ако одредимо два тренутка t_0 и t_1, стање $x(t_0)$ и допустиву функцију улаза u, тада ако је систем у стању $x(t_0)$ у почетном тренутку t_0 и делује функција улаза u, систем ће прећи у ново стање $\phi(t_1, t_0, x(t_0), u)$ у тренутку t_1.

<u>Пример 4</u>: За кондензатор из примера 6 у претходном поглављу, функција ϕ је

$$v(t_1) = \phi(t_1, t_0, V, i) = V + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t_1} i(\tau)d\tau$$

док је за отпорник

$$v(t_1) = \phi(t_1, t_0, V, i) = Ri(t_1)$$

јер смо за стање усвојили напон v, за улаз струју i и V за почетну вредност напона $v(t_0) = V$. ○

Једначину прелаза стања и пресликавање ϕ прелаза стања одређујемо из релације улаз-излаз-стање система, те према теоремама 3, 2 и 1 функција ϕ не може да буде потпуно произвољна, већ такође мора да задовољава **услове сагласности**:

(*i*) *Постојаност:* ако је систем у тренутку t у стању $x(t)$, без обзира какав улаз делује после тога, стање у тренутку t мора да буде

$$\phi(t, t, x(t), u) = x(t) \tag{30}$$

за све тренутке $t \in T$, сва стања $x(t) \in X$ и све допустиве функције улаза $u \in \Omega$.

Постојаност показује да систем остаје у истом стању када време не протиче. Очигледно је да у примеру 4 једначина прелаза стања кондензатора испуњава овај услов јер је за $t = t_0$ интеграл једнак нули.

(*ii*) *Својство полугрупе:* Нека су t_0, t_1 и t_2 три тренутка из скупа времена T тако да је $t_0 < t_1 < t_2$. Тада је

$$\phi\left(t_2, t_1, \phi\left(t_1, t_0, x(t_0), u_{[t_0,t_1[}\right), u_{[t_1,t_2[}\right) = \phi\left(t_2, t_0, x(t_0), u_{[t_0,t_2[}\right) \tag{31}$$

за сва стања $x(t_0) \in X$ и сва допустива управљања $u \in \Omega$.

Овај услов указује да систем прелази из почетног стања $x(t_0)$ у тренутку t_0 у исто крајње стање у тренутку t_2, било да делује улаз $u_{[t_0,t_2[}$ од почетног тренутка t_0 до крајњег тренутка t_2 и који непосредно преводи почетно стање $x(t_0)$ у крајње стање $\phi\left(t_2, t_0, x(t_0), u_{[t_0,t_2[}\right)$, било да систем пређе у стање $\phi\left(t_1, t_0, x(t_0), u_{[t_0,t_1[}\right)$ у међутренутку t_1 под дејством улаза $u_{[t_0,t_1[}$ од t_0 до t_1 и затим из тог стања под дејством улаза $u_{[t_1,t_2[}$ од t_1 до t_2 у крајње стање $\phi\left(t_2, t_1, \phi(t_1, t_0, x(t_0), u_{[t_0,t_1[}), u_{[t_1,t_2[}\right)$. Ова особина, уствари показује да стање у тренутку t_2 не може да зависи од начина на који га израчунавамо, већ да зависи само од система.

<u>Пример 5:</u> За кондензатор из примера 4, стање $v(t)$ и функцију прелаза стања ϕ

$$v(t) = \phi(t, t_0, V, i) = V + \frac{1}{C}\int_{t_o}^{t} i(\tau)d\tau$$

је

$$v(t_2) = \phi\left(t_2, t_1, \phi\left(t_1, t_0, V, i_{[t_0,t_1[}\right), i_{[t_1,t_2[}\right) = \phi\left(t_2, t_0, V, i_{[t_1,t_2[}\right)$$

јер је

$$\left[V + \frac{1}{C}\int_{t_o}^{t_1} i(\tau)d\tau\right] + \frac{1}{C}\int_{t_1}^{t_2} i(\tau)d\tau = V + \frac{1}{C}\int_{t_o}^{t_2} i(\tau)d\tau \qquad \bigcirc$$

Приметимо да је особина полугрупе само други назив за особину раздвајања једначине прелаза стања из теорема 2 и 3, јер се функција улаза $u_{[t_0,t_2[}$ добија спајањем одсечака функције улаза $u_{[t_0,t_1[}$ и $u_{[t_1,t_2[}$.

(*iii*) *Услов каузалности:* Када су две функције улаза u и u' једнаке током времена од t_0 до t_1, тј. ако је $u(t) = u'(t)$, $t_0 \le t < t_1$ тада за било $x(t_0) \in X$ оне морају да доведу до исте промене стања у току тог времена:

$$\phi\left(t_1, t_0, x(t_0), u_{[t_0,t_1[}\right) = \phi\left(t_1, t_0, x(t_0), u'_{[t_0,t_1[}\right) \tag{32}$$

Другачије речено, услов каузалности захтева да прелаз из стања $x(t_0)$ у тренутку t_0 у стање $\phi\left(t_1, t_0, x(t_0), u_{[t_0,t_1[}\right)$ у тренутку t_1, зависи само од вредности улаза $u_{[t_0,t_1[}$ од тренутка t_0 до тренутка t_1.

<u>Пример 6</u>: Посматрајмо поново кондензатор из примера 4. Ако је $i(t) = i'(t), t_0 \le t < t_1$ тада је

$$V + \frac{1}{C}\int_{t_o}^{t_1} i(\tau)d\tau = V + \frac{1}{C}\int_{t_o}^{t_1} i'(\tau)d\tau$$

тако да је ова ϕ каузална. ○

Услов каузалности говори о две ствари. Прво, улаз пре t_0 не утиче на ново стање $\phi(t_1, t_0, x(t_0), u)$ - што показује да променљива стања садржи довољно информација, пошто су потоње информације о улазу пре добијања тог стања без значаја. Друго, улазна дејства после t_1, не утичу на $\phi(t_1, t_0, x(t_0), u)$ - што говори да систем не може да предвиђа будућност већ једино може да одговара на улазна дејства која је већ примио. То *не пориче* да систем не може да предсказује - он може добро да користи претходна улазна дејства за *процену* будућих улазних дејстава и одговарајућих одзива, а може да се понаша веома неодговарајуће ако буде неочекиваних одступања и промена на улазу.

<u>Пример 7</u>: Ако применимо трећи услов на отпорник из примера 4, где је $v(t) = R\, i(t)$ добићемо бољи увид у потребу ограничавања анализе система да укључује одзив само на неке допустиве функције улаза. Услов каузалности захтева да $\phi(t_1, t_0, v(t_0), i)$ зависи само од вредности улаза $i(t)$ за $t_0 \le t < t_1$, док према једначини $v(t_1) = R\, i(t_1)$ зависи само од вредности $i(t)$ у тренутку $t = t_1$ (који није дозвољен према услову каузалности)! Међутим, решење је једноставно - казаћемо да је функција $i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ допустив улаз за отпорник само када је i непрекидно са лева, тј. за сваки тренутак t је $i(t-) = i(t)$, где је $i(t-)$ **лева гранична вредност**

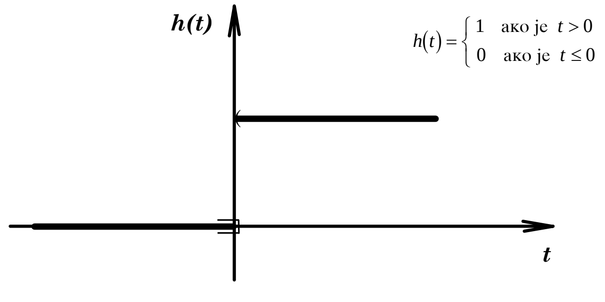
$$i(t-) = \lim_{\tau \uparrow t} i(\tau)$$

при чему симбол $\tau \uparrow t$ значи да $\tau \to t$ узимајући вредност $\tau < t$, као у $u_{[t_0,t[}$.

Другачије речено, очекујемо да модел $v(t) = R\, i(t)$ на одговарајући начин описује одзив отпорника само за благе промене струје и не обезбеђује да једначина опише систем "тренутно" после скока вредности струје. ○

Приметимо да мноштво свих функција које су непрекидне са лева задовољава услов спајања са лева.

<u>Пример 8</u>: Вероватно је најпознатија функција непрекидна са лева, која није непрекидна, **Хевисајдова функција** $h(t)$ (јединична одскочна функција) која је део по део константна, са јединичним скоком у $t = 0$ као што је показано на слици:



Слика 1-20 Јединична одскочна функција $h(t)$

Запазимо да другачије дефинисана јединична одскочна функција која има вредност 1 за $t \geq 0$ и 0 другде, није непрекидна са лева већ је непрекидна са десна. ○

Уобичајено је да се о излазу система размишља као о неком опажању и посматрању одређених видова стања система. За тако дато стање сматра се да испољава целокупну динамику и све битне особине система, а излаз је управо тренутно "очитавање" тих обележја и особина система које сматрамо да су значајне за одређену намену система. Према томе, улаз делује на излаз једино посредно преко својих утицаја у промени стања.

Пресликавање излаза

$$\eta : T \times X \to Y \tag{33}$$

одређује да ако је систем у стању $x(t_1)$ у тренутку t_1, да ће тада излаз у истом том тренутку бити $y(t_1) = \eta(t_1, x(t_1))$.

Пример 9: Пресликавање излаза за кондензатор из примера 4 одређује израз $\eta(t_1, v(t_1)) = v(t_1)$, а за отпорник $\eta\,(t_1, v(t_1)) = v(t_1)$, будући да су оба очитавања стања v у тренутку t_1. ○

При састављању модела система за постојећи динамички систем, када одредимо скупове T, U, Ω и Y покушавамо да изаберемо скуп стања X тако да се измењена промењљива стања добије помоћу функције прелаза стања ϕ у сагласности са условима (30),(31),(32) и да може да се тренутно очита помоћу одговарајуће функције излаза η. Када размишљамо о стању као унутрашњем (можда замишљеном) опису система чије нас улазно-излазне понашање интересује, можемо да видимо да избор промењљиве стања и одређивање пресликавања ϕ и η иду заједно и често се одређују поступком покушаја и грешке.

Пример 10: Моделовати као детерминистички систем процес чији је излаз y квадрат интеграла улаза u:

$$y(t) = \left[\int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau\right]^2, \quad t \geq t_0$$

Први увид у модел унутрашњег стања система може да нас наведе да усвојимо вредност излаза $y(t)$ за стање у тренутку t, које је у тренутку t_0 имало вредност нула, а промене описује функција ϕ као

$$\phi(t, t_0, \tilde{x}, u) = \tilde{x} + \left[\int_{t_0}^{t} u_{[t_0,t[}(\tau)d\tau\right]^2$$

Међутим, такво ϕ *не задовољава* други део сагласности, јер је

$$\phi(t_2, t_0, \tilde{x}, u_{[t_0,t_2[}) = \tilde{x} + \left[\int_{t_0}^{t_2} u_{[t_0,t_2[}(\tau)d\tau\right]^2 = \tilde{x} + \left[\int_{t_0}^{t_2} \left[u_{[t_0,t_1[}(\tau) + u_{[t_1,t_2[}(\tau)\right]d\tau\right]^2 =$$

$$= \tilde{x} + \left[\int_{t_0}^{t_1} u_{[t_0,t_1[}(\tau)d\tau\right]^2 + \left[\int_{t_1}^{t_2} u_{[t_1,t_2[}(\tau)d\tau\right]^2 + 2\left[\int_{t_0}^{t_1} u_{[t_0,t_1[}(\tau)d\tau\right]\left[\int_{t_1}^{t_2} u_{[t_1,t_2[}(\tau)d\tau\right]$$

Како је

$$\phi\left(t_1, t_0, \tilde{x}, u_{[t_0,t_1[}\right) = \tilde{x} + \left[\int_{t_0}^{t_1} u_{[t_0,t_1[}(\tau)d\tau\right]^2$$

и

$$\phi\left(t_2, t_1, \phi\left(t_1, t_0, \tilde{x}, u_{[t_0,t_1[}\right), u_{[t_1,t_2[}\right) = \phi\left(t_1, t_0, \tilde{x}, u_{[t_0,t_1[}\right) + \left[\int_{t_1}^{t_2} u_{[t_1,t_2[}(\tau)d\tau\right]$$

добијамо

$$\begin{aligned}\phi\left(t_2, t_0, \tilde{x}, u_{[t_0,t_2[}\right) &= \phi\left(t_2, t_1, \phi\left(t_1, t_0, \tilde{x}, u_{[t_0,t_1[}\right), u_{[t_1,t_2[}\right) + 2\left[\int_{t_0}^{t_1} u_{[t_0,t_1[}(\tau)d\tau\right]\left[\int_{t_1}^{t_2} u_{[t_1,t_2[}(\tau)d\tau\right] \\ &\neq \phi\left(t_2, t_1, \phi\left(t_1, t_0, \tilde{x}, u_{[t_0,t_1[}\right), u_{[t_1,t_2[}\right)\end{aligned}$$

Још увек нам се чини да би систем могао да израчуна израз

$$\left[\int_{t_0}^{t_1} u_{[t_0,t_1[}(\tau)d\tau\right]^2$$

и измени своје стање додавањем овог израза почетној вредности $\tilde{x}$. Где смо и шта погрешили ? Видимо да нам за одређивање новог стања $\phi\left(t_2, t_0, \tilde{x}, u_{[t_0,t_2[}\right)$ за познато стање $\phi\left(t_1, t_0, \tilde{x}, u_{[t_0,t_1[}\right)$ треба поред података о том стању и вредност за

$$\int_{t_0}^{t_1} u(\tau)d\tau$$

али тиме не располажемо пошто је већ дигнут на квадрат и додат почетном стању $\tilde{x}$. Решење је да имамо вредност израза

$$\int_{t_0}^{t_1} u(\tau)d\tau$$

посебно запамћену и на располагању. У ствари, најлакши начин да одредимо детерминистички систем који израчунава

$$\left[\int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau\right]^2$$

је да изаберемо за промењљиву стања[3]

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau$$

и да за почетно стање 0 у тренутку t_0 побудимо систем описан функцијама

$$\phi\left(t, t_0, \tilde{x}, u\right) = \tilde{x} + \int_{t_0}^{t} u_{[t_0,t[}(\tau)d\tau$$

$$\eta\left(t, x(t)\right) = \left(x(t)\right)^2$$

○

У последњем примеру, одређивање η и ϕ започели смо задавањем излаза

[3] Такав избор промењљиве стања био би очигледан ако би покушали да на аналогном рачунару саставимо модел система који би генерисао полазну релацију.

$$\left[\int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau\right]^2$$

и нашли да он није садржао довољно информација да би био коришћен као променљива стања. Затим смо изабрали нову променљиву стања која може да се мења конзистентно. У том случају, не захтевамо да првобитна променљива излаза буде променљива стања, већ може да се добије као једноставна функција текуће променљиве стања. Касније ћемо видети да су код многих класа система променљиве излаза подскуп променљивих стања.

Приликом описивања неких система користи се опис излаза који непосредно зависи од улаза и почетног стања, те се користи пресликавање

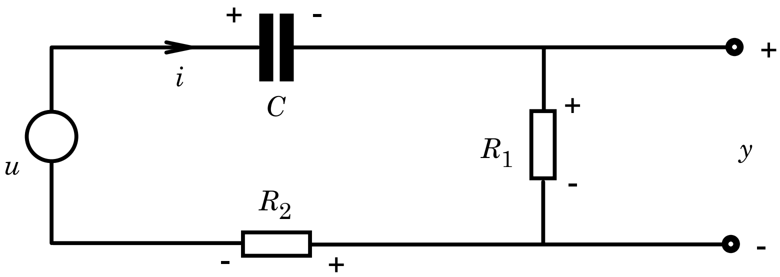
$$\overline{\eta} : T \times \overline{X} \times U \to Y$$

уместо $\eta : T \times X \to Y$. У том случају, при разматрању отпорника из примера 4, морали би да уведемо посебно стање - 0, које би звали нулто стање, као и да његов излаз зависи и од улаза i и од стања 0 (тривијално) као

$$\overline{\eta}\left(t_1, 0, i(t_1)\right) = R\, i(t_1)$$

Било који приступ који користи $\overline{\eta} : T \times \overline{X} \times U \to Y$ можемо увек да обухватимо нашом теоријом повећавајући његов простор стања $\overline{X}$ да би укључили улаз $u(t)$ као компоненту вектора стања у новом простору стања X, све док су допустиве функције u из Ω непрекидне са лева. Објаснићемо то на следећем једноставном примеру:

Пример 11: У RC колу, приказаном на слици 1-21, улаз је напон u, а излаз напон y на отпорнику R_1.



Слика 1-21 Једноставно RC коло

Према Кирхофовом правилу за напоне у сваком тренутку t спољни напон u мора да буде једнак збиру свих падова напона дуж кондензатора C и отпорника R_1 и R_2

$$u(t) = v_C(t) + u_{R_1}(t) + u_{R_2}(t)$$

Како је

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(C\, v_C(t)\right) = C\,\frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$u_{R_1}(t) = R_1 i(t) \qquad u_{R_2}(t) = R_2 i(t)$$

добија се диференцијална једначина првог реда

$$\left(R_1 + R_2\right) C\,\frac{dv_C}{dt} + v_C(t) = u(t)$$

Решење ове линеарне диференцијалне једначине првог реда је

$$v_C(t) = e^{-(t-t_0)/RC}\, v_C(t_0) + \frac{1}{RC}\int_{t_0}^{t} e^{-(t-\xi)/RC} u(\xi)d\xi$$

где је $R = R_1 + R_2$, а $v_C(t)$ је јединствено одређено за свако t ако су познати $v_C(t_0)$ и допустив улаз u. Пошто познавање $v_C(t)$ за свако t одређује i, а како је $y = R_1 i$ то се v_C појављује као природан избор стања система.

Користећи v_C за стање, решење једначине нам даје пресликавање прелаза стања $\overline{\phi}$

$$\overline{\phi}(t, t_0, \overline{x}_0, u) = e^{-(t-t_0)/RC}\overline{x}_0 + \frac{1}{RC}\int_{t_0}^{t} e^{-(t-\xi)/RC}u(\xi)d\xi$$

Међутим, са тако изабраним стањем $\overline{x} = v_C$, излаз

$$y = R_1 i = \frac{R_1}{R_1 + R_2}(u - v_C) = \frac{R_1}{R_1 + R_2}(u - \overline{x})$$

је облика $y(t) = \overline{\eta}(t, \overline{x}(t), u(t))$, док би наш облик пресликавања био $y(t) = \eta(t, x(t))$ за одговарајући избор променљиве стања x.

Решење је да проширимо $\overline{X}$ у већи простор стања $X = \overline{X} \times U$. Међутим, за одређивање промене стања од тренутка t_0 до тренутка t_1 можемо да се послужимо само са $u_{[t_0,t_1[}$, улазом *пре* t_1. Како ћемо тада добити $u(t_1)$ да би га укључили као другу компоненту проширеног вектора стања $x(t_1) = \left(\overline{x}(t_1), u(t_1)\right)^T$? Као и у примеру 7, решење је да захтевамо да улази буду непрекидни са лева, тако да је

$$u(t_1) = \lim_{t \uparrow t_1} u(t)$$

Симбол $t \uparrow t_1$ значи да $t \to t_1$ али за $t < t_1$, што проистиче из $u_{[t_0,t_1[}$. Са тако изабра-ним стањем ново пресликавање прелаза стања ϕ одређује се из

$$x(t_1) = \left(\overline{x}(t_1), u(t_1)\right)^T = \left(\overline{\phi}\left(t_1, t_0, V, u_{[t_0,t_1[}\right), u(t_1)\right)^T$$

тако да је

$$\phi\left(t_1, t_0, \left(V, u(t_0)\right)^T, u_{[t_0,t_1[}\right) = \left(e^{-(t_1-t_0)/RC}V + \frac{1}{RC}\int_{t_0}^{t_1} e^{-(t_1-\xi)/RC}u(\xi)d\xi,\ \lim_{t \uparrow t_1} u(t)\right)$$

и

$$y(t) = \eta(t, x(t)) = \eta\left(t, \left(v_C(t), u(t)\right)^T\right) = \frac{R_1}{R_1 + R_2}\left(u(t) - v_C(t)\right)$$

те је пресликавање излаза $\eta : T \times X \to Y$ као што се и захтева. ○

Општи услов каузалности се код линеарног, временски-непрекидног система, чије улазно-излазно понашање описује *суперпозициони интеграл*

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t, \xi)u(\xi)d\xi \tag{34}$$

своди на једноставан услов

$$g(t, \xi) = 0 \quad \text{за} \quad t < \xi$$

који мора да задовољава *импулсни одзив* $g(t, \xi)$ система.

Да би то доказали, ради упрошћења посматраћемо системе код којих је импул-сни одзив $g(t, \xi)$ непрекидна реална функција. Како је

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t, \xi)u(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{t_0} g(t, \xi)u_{[-\infty,t_0[}(\xi)d\xi + \int_{t_0}^{\infty} g(t, \xi)u_{[t_0,\infty[}(\xi)d\xi \tag{35}$$

ако ограничимо да је скуп Ω допустивих функција улаза система скуп функција улаза које су једнаке нули пре тренутка t_0, $u(\xi)=0$ за $\xi < t_0$, имамо

$$y(t)=\int_{t_0}^{\infty} g(t,\xi)\,u_{[t_0,\infty[}(\xi)d\xi, \quad t \geq t_0$$

И овај интеграл можемо да раставимо на

$$y(t)=\int_{t_0}^{t} g(t,\xi)\,u_{[t_0,t[}(\xi)d\xi+\int_{t}^{\infty} g(t,\xi)\,u_{[t,\infty[}(\xi)d\xi \tag{36}$$

Нека се функција u' одређена са

$$u'(\xi)=\begin{cases} u(\xi) & \text{за} \quad t_0 \leq \xi < t \\ 0 & \text{за} \quad t \leq \xi < \infty \end{cases}$$

поклапа са функцијом u на интервалу $[t_0,t[$. Због каузалности u и u' морају да дају исто стање и исти излаз на том интервалу. Замењујући u са u' у (36) добија се

$$y(t)=\int_{t_0}^{t} g(t,\xi)\,u'_{[t_0,t[}(\xi)d\xi+\int_{t}^{\infty} g(t,\xi)\,u'_{[t,\infty[}(\xi)d\xi=$$

$$=\int_{t_0}^{t} g(t,\xi)u_{[t_0,t[}(\xi)d\xi+\int_{t}^{\infty} g(t,\xi)\,0\,d\xi$$

тако да је

$$y(t)=\int_{t_0}^{t} g(t,\xi)\,u_{[t_0,t[}(\xi)d\xi \tag{37}$$

Изједначавајући (36) и (37), што мора да важи за све функције улаза u, има се

$$\int_{t_0}^{t} g(t,\xi)u_{[t_0,t[}(\xi)d\xi+\int_{t}^{\infty} g(t,\xi)\,u_{[t,\infty[}(\xi)d\xi=\int_{t_0}^{t} g(t,\xi)\,u_{[t_0,t[}(\xi)d\xi$$

одакле је

$$\int_{t}^{\infty} g(t,\xi)\,u_{[t,\infty[}(\xi)\,d\xi=0 \quad \text{за све } u \in \Omega$$

Последњи израз важи за све функције u на интервалу $[t,\infty[$, те мора да важи и за посебну функцију

$$\hat{u}(\xi) \triangleq g(t,\xi) \quad t \leq \xi < \infty$$

тако да је

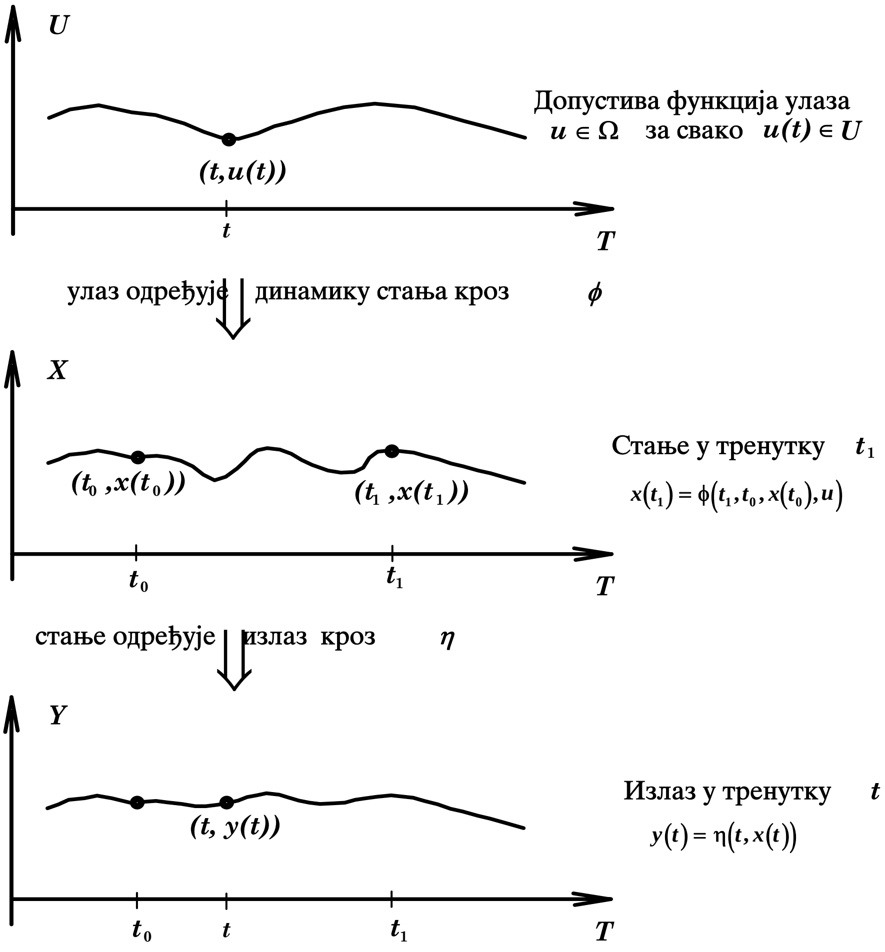
$$\int_{t}^{\infty} \left|g(t,\xi)\right|^2 d\xi=0\,.$$

Из чињенице да је интеграл ненегативне функције $\left|g(t,\xi)\right|^2$ једнак нули проистиче да подинтегрална функција мора да буде једнака нули (скоро свуда) на $[t,\infty[$, те је

$$g(t,\xi)=0 \quad \text{за} \quad t<\xi$$

Према томе, *из услова каузалности произлази да импулсни одзив* $g(t,\xi)$ *линеарног система мора да буде нула за* $\xi < t$, што је добро познат услов из теорије линеарних система.

Да би лакше замислили промене улаза, стања и излаза детерминистичког система можемо приказати њихове путање на интервалу посматрања $[t_0, t_1[$ као на слици 1-22.



Слика 1-22 Путање улаза, стања и излаза детерминистичког система

1-6 ПОМЕРАЊЕ У ВРЕМЕНУ И ВРЕМЕНСКА НЕПРОМЕЊЉИВОСТ МОДЕЛА

На крају уводног разматрања система проучићемо временску непромењљивост (стационарност, инваријантност) модела система. Већ смо уочили да једначина улаз-излаз-стање $y(t) = A\left(x(t_0), u_{[t_0,t[}\right)$ указује да излаз $y(t)$ не зависи само од почетног стања $x(t_0)$ и вредности улаза $u(\tau)$ за $\tau \in [t_0, t[$, већ и од граничних тачака t_0 и t интервала посматрања система $[t_0, t[\subset T$. При описивању промене стања, ново стање система $\phi(t, t_0, x(t_0), u)$ не зависи само од почетног стања $x(t_0)$ и улаза који делује на неком интервалу времена већ и од тренутка t_0 када почиње деловање улаза. Међутим, код многих постојећих система које користимо и проучавамо, на пример рачунара, очекујемо да ново стање не зависи од почетног тренутка, већ очекујемо да излаз из рачунара зависи само од од програма и низова података којима смо га снабдели, а не од тренутка у коме смо почели да користимо рачунар. Једноставно речено, модел система је временски непромењљив (стационаран, инваријантан) ако се особине система не мењају у времену.

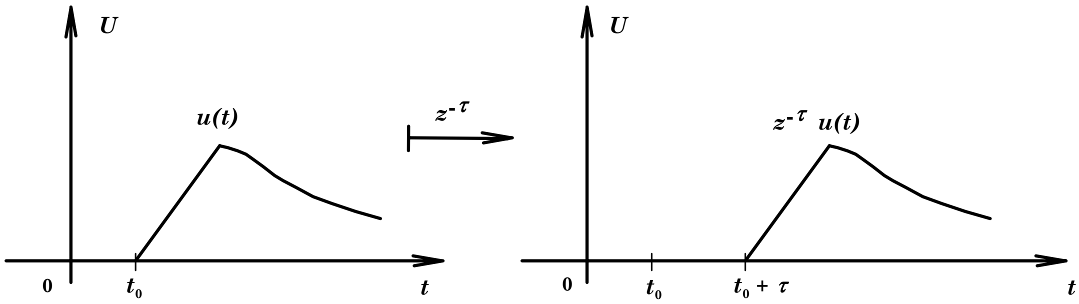
Да би утаначили уведене појмове погодно је да се уведе појам *оператора померања* z^{τ}, $\tau \in \mathbf{R}$ који помера функцију f *уназад* ако је $\tau > 0$ или *унапред* ако је $\tau < 0$:

<u>Дефиниција 1:</u> **Оператор померања** свакој функцији f придружује временски померену функцију $z^{-\tau} f$ која је дефинисана особином

$$\left(z^{-\tau} f\right)(t) \triangleq f(t-\tau) \text{ за свако } t, \tau \text{ у домену функције } f \qquad \diamond$$

Уочимо да нисмо прецизно одредили каква мора да буде функција *f* да би $z^{-\tau} f$ имало смисла. Ако је $f : V \to W$, тада домен *V* за *f* мора да има довољну математичку структуру у себи тако да је за $t \in V$ и $\tau \in V$ дефинисано одузимање и $(t-\tau) \in V$. Када је *V векторски простор*, постоји довољна математичка структура. Обично се опера-тор $z^{-\tau}$ примењује на елементе скупа допустивих улаза Ω за описивање операције **кашњења** функције улаза *u* за τ временских јединица. Елементи из Ω су функције облика $u : T \to U$, где је скуп тренутака времена $T = \mathbf{Z}$ за временски дискретан систем и $T = \mathbf{R}$ за временски непрекидан систем. Често је неопходно да сам временски померен улаз буде допустива улазна функција за систем, тако да Ω мора да буде затворен за операцију померања $z^{-\tau} : \Omega \to \Omega$.

Често се захтева да на систем делује исти улаз од тренутка $t_0 + \tau$, којим смо већ деловали на систем као улазном функцијом *u* од тренутка t_0, као што је приказано на слици 1-20.



а) Облик *u* б) Облик $z^{-\tau}u$

Слика 1-23 Оператор $z^{-\tau}$ закашњава *u* за τ временских јединица

Видимо да је $u(t_0) = z^{-\tau}u(t_0+\tau)$ и да је нова улазна функција $z^{-\tau}u$ добијена од првобитне улазне функције *u* померањем сваке вредности $u(t)$ *у десно* за τ временских јединица. Због тога z^{-1} можемо да схватимо као **оператор јединичног кашњења** који закашњава функцију за једну јединицу времена, тако да је $z^{-\tau}$ оператор који закашњава функцију за τ временских јединица. На слици 1-20б видимо да је у тренутку t вредност $u(t-\tau)$, вредност улаза коју би *u* добила τ временских јединица раније од тренутка *t*.

Као што смо већ приметили, систем је временски непромењив ако се његове особине не мењају с временом те је систем улаз-излаз временски непромењљив ако било који пар улаз-излаз (u, y) може да се произвољно помера у времену и да *остане* пар улаз-излаз система. Временски непромењљив систем нема ту особину.

<u>Дефиниција 2:</u> Посматрајмо *систем улаз-излаз* у дискретном или непрекидном времену *T*. Систем је *временски непромењљив* ако за сваки пар улаз-излаз (u, y) и временски померен пар $(z^{-\tau}u, z^{-\tau}y)$ је пар улаз-излаз система за било које допустиво кашњење $\tau \in T$. $\diamond$

Код система са улазно-излазним пресликавањем φ, временска непромењљивост се своди на инваријантност улазно-излазног пресликавања, тј.

$$\varphi\left(z^{-\tau}u\right) = z^{-\tau}\varphi(u)$$

за сваки улаз $u \in \Omega$ и свако допустиво кашњење $\tau \in T$. Инваријантност улазно-излазног пресликавања на померање у времену је еквивалентна тврђењу да су φ и $z^{-\tau}$ *комутативни* за сва τ.

Пример 1: Одредити услове временске непроменљивости система описаног релаци-јом улаз-излаз

$$\dot{y}(t) + a(t)\, y(t) = a(t)\, u(t), \quad t \in \mathbf{R} \tag{1}$$

Претпоставимо да је (u, y) улазно-излазни пар који задовољава релацију улаз-излаз (1). Систем је временски непроменљив ако покажемо да је временски померен пар (u', y'), где је $u' = z^{-\tau}u,\ y' = z^{-\tau}y$, такође улазно-излазни пар, тј. такође задовољава диференцијалну једначину (релацију улаз-излаз) за свако реално τ.

Временски померен пар $\left(z^{-\tau}u, z^{-\tau}y\right)$ је решење диференцијалне једначине ако је

$$\frac{d}{dt}y(t-\tau) + a(t)\,y(t-\tau) = a(t)u(t-\tau), \quad t \in \mathbf{R}$$

Замењујући $t-\tau$ са θ, захтевамо да је:

$$\frac{dy(\theta)}{d\theta} + a(\tau+\theta)\, y(\theta) = a(\tau+\theta)u(\theta), \quad \tau, \theta \in \mathbf{R}$$

Чак и када је (u, y) улазно-излазни пар ова једначина није задовољена ако није $a(\tau+\theta) = a(\theta)$ за сва $\theta \in \mathbf{R}$ и за неко $\tau \in \mathbf{R}$, одакле проистиче да коефицијент a треба да буде временски непроменљив, тј. константан. Дакле, ако коефицијент a није константан, временски померен пар у општем случају није пар улаз-излаз те је систем *временски променљив.* ○

Дефиниција.3: Систем са *улазно-излазним пресликавањем* и без памћења, описан пресликавањем улаз-излаз

$$y(t) = \Psi\left(t, u(t)\right), \quad t \in T$$

је *временски непроменљив* ако и само ако је $\Psi(t_1, u) = \Psi(t_2, u)$ за све тренутке $t_1, t_2 \in T$ и сва допустива управљања $u \in \Omega$. ◇

Дакле, систем без меморије је временски-инваријантан ако и само ако функција Ψ не зависи од свог првог аргумента који описује време.

Као и код система улаз-излаз, временска непроменљивост система улаз-излаз-стање се своди на инваријантност у односу на померање у времену релације $\mathcal{R}$ која описује понашање система:

Дефиниција 4: Систем *улаз-излаз-стање* описан релацијом $\mathcal{R} \subset U \times Y \times X$ одређен на скупу времена T је *временски непроменљив* ако је $\mathcal{R}$ *инваријантна* на временско померање, тј. ако је $(u, y, x) \in \mathcal{R}$ тада је $\left(z^{-\tau}u, z^{-\tau}y, z^{-\tau}x\right) \in \mathcal{R}$ за било које допустиво временско кашњење $\tau \in T$. ◇

Временска непроменљивост (инваријантност) система улаз-излаз-стање подразумева да било која тројка улаз-излаз-стање померена у времену и даље буде тројка улаз-излаз-стање. Временска непроменљивост значи да се динамичке особине модела система не мењају током времена.

Систем Σ описан једначином прелаза стања ϕ и излаза η је временски непроменљив ако не мења своју структуру током времена, према следећој дефиницији:

<u>Дефиниција 5:</u> Систем Σ је **временски непромењљив (инваријантан)** или **стационаран** ако је T затворен у односу на сабирање, Ω је затворен у односу на оператор $z^{-\tau}$ за свако $\tau \in T$ и

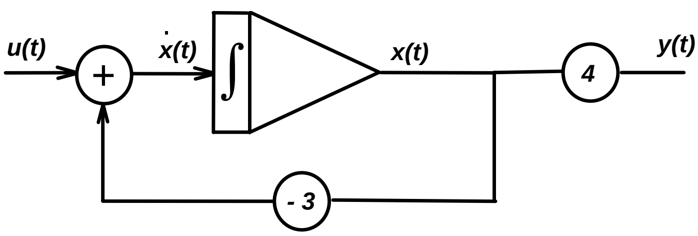
1 $\phi(t_1, t_0, \tilde{x}, u) = \phi(t_1 + \tau, t_0 + \tau, \tilde{x}, z^{-\tau}u)$ за све тренутке t_0, t_1, сва (позитивна или негативна) кашњења τ, сва стања $\tilde{x}$ и све допустиве функције улаза u. (2)

$\eta(t_0, \tilde{x}) = \eta(t_1, \tilde{x})$ за све тренутке t_0 и t_1 и сва стања $\tilde{x}$ (3)

◇

Једначина (2) каже да за било које кашњење τ, ако почнемо из стања $\tilde{x}$ и делује иста вредност улаза у одговарајућим тренуцима после почетног тренутка, тада ће одговарајућа стања бити иста, без обзира да ли је наш почетни тренутак t_0 или $t_0 + \tau$. Услов (3) нам каже да излаз система зависи само од садашњег стања $\tilde{x}$, а не од тренутка када је систем у том стању.

<u>Пример 2</u>: За систем представљен аналогним моделом на слици 1-21 одредити функцију прелаза стања, функцију излаза и проверити да ли је модел система временски непромењљив.



Слика 1-24 Једноставан систем једног интегратора са повратном спрегом

Означивши излаз из интегратора са x, тада је на улазу интегратора у тренутку t сигнал $\dot{x}(t)$ који је једнак излазу из сабирача, који сабира $-3x(t)$ и $u(t)$. Излаз $y(t)$ је непосредно 4 пута $x(t)$. Према томе, систем је описан динамичким једначинама

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -3x(t) + u(t) \\ y(t) &= 4x(t) \end{aligned} \quad 2$$

Линеарна диференцијална једначина првог реда

$$\dot{x}(t) = -3x(t) + u(t)$$

лако се решава по $x(t)$ у зависности од почетног услова $x(t_0)$ и улаза $u_{[t_0, t[}$, те је излаз из интегратора $x(t)$ добар избор за променљиву стања. Решење једначине је

$$x(t_1) = \phi(t_1, t_0, \tilde{x}, u) = e^{-3(t_1 - t_0)}\,\tilde{x} + \int_{t_0}^{t_1} e^{-3(t_1 - \xi)} u(\xi)\,d\xi$$

а из $y(t) = 4 \cdot x(t)$ имамо $\eta(t, \hat{x}) = 4\,\hat{x}$.

Испитајмо да ли је систем временски непромењљив. Како је

$$\phi(t_1 + \tau, t_0 + \tau, \tilde{x}, z^{-\tau}u) = e^{-3[(t_1+\tau) - (t_0+\tau)]}\,\tilde{x} + \int_{t_0+\tau}^{t_1+\tau} e^{-3(t_1 + \tau - \xi)} (z^{-\tau}u)(\xi)\,d\xi$$

$$= e^{-3(t_1 - t_0)}\,\tilde{x} + \int_{t_0+\tau}^{t_1+\tau} e^{-3[t_1 - (\xi - \tau)]} u(\xi - \tau)\,d\xi$$

смена променљиве $\xi - \tau = \sigma$ у последњем интегралу даје

$$\phi\left(t_1+\tau, t_0+\tau, \tilde{x}, z^{-\tau}u\right) = e^{-3(t_1-t_0)}\,\tilde{x} + \int_{t_0}^{t_1} e^{-3(t_1-\sigma)} u(\sigma)\,d\sigma$$

$$= \phi\left(t_1, t_0, \tilde{x}, u\right)$$

Како је и $\eta(t_0,\hat{x}) = \eta(t_1,\hat{x}) = 4\,\hat{x}$, закључујемо да је модел овог система временски непроменљив (инваријантан, стационаран). ○

Понекад се каже да код временски-непроменљивих система почетни тренутак t_0 *није* важан, те се често ради погодности почетни тренутак помера у нулу. Да би то показали нека су ϕ и η пресликавања промене стања и пресликавање излаза временски непроменљивог система. Из израза

$$\phi\left(t, t_0, \tilde{x}, u\right) = \phi\left(t+\tau, t_0+\tau, \tilde{x}, z^{-\tau}u\right)$$

за сваку вредност τ, ако је $\tau = -t_0$ добија се

$$\phi\left(t, t_0, \tilde{x}, u\right) = \phi\left(t-t_0, 0, \tilde{x}, z^{+t_0}u\right) \tag{4}$$

што нам указује како да померимо почетни тренутак из t_0 у 0 и обратно. Једначина (4) веома јасно открива да код временски непроменљивих (инваријантних, стацио-нарних) система функција прелаза стања ϕ зависи само од разлике $(t-t_0)$ између тренутка посматрања t и почетног тренутка t_0.

1-7 ДЕТЕРМИНИСТИЧКИ И НЕДЕТЕРМИНИСТИЧКИ СИСТЕМИ

У досадашњим разматрањима смо прећутно претпостављали да у понашању система не постоји случајност. Код *детерминистичких система* за познато стање $x(t_0)$ и будуће улазно дејство $u_{[t_0,t[}$ можемо једнозначно да одредимо будућа стања $x(t)$ и излазе $y(t)$ за све $t > t_0$. Није тешко да се замисли систем код кога, без обзира колико потпуно одредимо стање и без обзира колико тачно знамо вредности будућих улазних дејстава, није могуће да се тачно одреди каква ће бити потоња стања и излази, већ се у најбољем случају могу одредити вероватноће могућих вредности стања и излаза. Такав систем зваћемо **стохастички систем**. Стохастички системи се уместо једначине улаз-излаз-стање описују једначином улаз-излаз-расподела стања која одређује меру вероватноће случајне променљиве $y(t)$ у простору излаза $y_{[t_0,t[}$ у зависности од почетног стања $x(t_0)$ и улазних дејстава $u_{[t_0,t[}$. Функција прелаза стања $x(t) = \phi\left(t, t_0, x(t_0), u\right)$ замењује се функцијом која одређује условну расподелу вероватноћа $x(t)$ за сваки тренутак t и задате $x(t_0)$ и $u_{[t_0,t[}$

$$\phi : T \times T \times X \times \Omega \rightarrow XP$$

где је XP мноштво расподела вероватноћа на X. Често се стохастички систем описује помоћу детерминистичког модела са случајним улазним дејствима и поремећајима. Проучимо то на примеру једноставног модела залиха.

Пример 1: Брзина промена обима залиха $x(t)$ у тренутку t зависи од разлике брзине примања готових производа $u(t)$ и брзине испорука производа потрошачима $f(t)$ у јединици времена

$$\dot{x}(t) = u(t) - f(t)$$

При томе се претпоставља да су $x(t)$, $u(t)$ и $f(t)$ позитивне и део по део непрекидне функције. Када се u и f споро мењају, или су константне на интервалу $\left[k\Delta t, (k+1)\Delta t\right]$ одговарајући дискретизовани модел је

$$x\left[(k+1)\Delta t\right] = x(k\Delta t) + \Delta t\left[u(k\Delta t) - f(k\Delta t)\right]$$

односно

$$x(k+1) = x(k) + u(k) - f(k)$$

ако се периода одабирања (корак дискретизације) нормира на $\Delta t = 1$. Тачност апроксимације највише зависи од периода одабирања Δt, који се према теореми о одабирању одређује у зависности од особина функција u и f и тачности њиховог описа. Када знамо стање залиха у почетном тренутку $x(0)$, за одређивање њихових промена морамо да знамо обиме производње $u(0), u(1), \ldots, u(N-1)$ и потражњу $f(0), f(1), \ldots, f(N-1)$ на сваком интервалу $k\Delta t, 0 \le k < N-1$. Пошто потражњу предвиђамо на основу статистичких података, у тачнијем моделу залиха се $f(k)$ посматра као случајна променљива. Када се управља залихама најчешће постоји кашњење од тренутка доношења одлуке о промени обима производње и тренутка када се то стварно дешава. У том случају се променљиве са кашњењем разматрају као случајне променљиве. Дискретни модел таквог система управљања залихама је

$$x(k+1) = A\,x(k) + B\,u(k,h) + C\,f(k)$$

где су A, B и C матрице одговарајућих димензија. Величина $u(k,h)$ је текућа вредност управљачке променљиве у k-том тренутку која зависи од величина управљачких дејстава у k-том и претходним тренуцима. Свако такво управљање стиже на улаз система са случајним кашњењем:

$$u(k,h) = \sum_{m=0}^{h} \xi_m(k)\,u(k-m)$$

где су $\xi_m(k), m = 0,1,\ldots,h$ случајне величине, које добијају вредност 0 или 1 са познатим вероватноћама. Поред тога, претпоставка је да у изразу за $u(k,h)$ било које управљачко дејство $u(\cdot)$ може да се појави само за једну вредност k. ○

У размотреном примеру, да би узели у обзир неодређености увели смо случајне величине у линеарне једначине модела. Могли смо да користимо и другачији приступ, уз претпоставку да су коефицијенти модела случајне променљиве. Код свих тих приступа је основна претпоставка да су тачно познате расподеле вероватноћа и да се могу проверити на основу одговарајућих прошлих разматрања и података. Захтев да се знају тачне расподеле вредности случајних променљивих је веома строго ограничење и веома ретко се остварује код постојећих система.

У случају непотпуних информација често се допушта да вредности параметара буду интервали бројне осе уместо само једна вредност. Способност рачунања са интервалима уместо са бројевима и објашњава понашање људи у условима неодређености. Било који стваран процес не може се у принципу тачно описати, те се користи метод експертних процена параметара као најједноставнији, најопштији, а сасвим задовољавајући поступак. При томе се експерт разматра као посебна личност или група личности, који услед свог образовања или искуства поседују знатно знање из одговарајуће области. Процена параметара се тако организује да квалитативне представе експерата о различитим могућностима могу да се изразе у квантитативном облику.

Пример 2: Посматрајмо модел система производње и управљања залихама код кога је промена интензитета производње сразмерна стварном интензитету производње x_1 и жељеном интензитету производње u, а промена обима залиха зависи од стварног интензитета производње x_1 и величине тражње f

$$\dot{x}_1(t) = \alpha\left(u(t) - x_1(t)\right)$$
$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) - f(t)$$

где је α позитивни параметар. Уз различите претпоставке, увек имамо неку информацију о вредноси коефицијента α. На пример, знамо да α није веће од 1 и није мање од 0.4, али при томе не знамо његову стварну вредност из интервала $[0.4, 1]$. Све што знамо је да постоје различите могућности са одговарајућим степеном допустљивости. У управљању производњом све суштаственији постају начини моделовања неодређености, јер до сада коришћени методе анализе строго и потпуно одређених процеса дају резултате који су од незнатне помоћи. ◯

Непотпуно одређени процеси могу се моделовати помоћу **неразговетних скупова** (Задех Л.А.), који су утемељени на уопштеном појму карактеристичне функције скупа: ако је X неки скуп, његов неразговетан подскуп A описује *функција припадности*

$$\mu_A : X \to [0, 1]$$

која сваком елементу $x \in X$ придружује број $0 \le \mu(x) \le 1$ који описује степен припадности елемента x подскупу A. То значи да елементи скупа X у различитом степену припадају неразговетном скупу A. Јасно је да коефицијент α из последњег примера, чију величину представља скуп бројева $[0.4, 1]$ са различитим степенима допустивости, може да се опише неразговетним скупом реалних бројева

$$\alpha : R \to [0,1]$$

Тада динамика система може да се опише *неразговетном релацијом* (Задех Л.А. $[2]$)

$$f : X \times \Omega \times X \to [0,1]$$

која сама представља неразговетан подскуп из $X \times \Omega \times X$, где је X простор стања, а $\Omega \subset R^m$ скуп допустивих управљања. Сада се величина $f(x, u, x')$ разматра као интензитет прелаза, или тачније као степен припадности елемента x' лику пара (x, u) при пресликавању f.

Употреба неразговетних скупова омогућава да се избегну лажне асоцијације на појам вериватноће. Вероватноћа је везана за случајност, док су неразговетни скупови везани за неразговетност, неодређеност и уопштено речено за субјективност. Под субјективношћу подразумевамо лични поглед или личне осећај за проучавани проблем. Чак и субјективност даје могућност да се уведе уређеност. Објаснимо то на појму идеалне тачке. Свака тачка у простору стања система може да буде мање или више удаљена од неког идеалног стања. Степен те удаљености изражавамо преко вредности функције припадности. Када се говори о скуповима, имају се у виду елементи са неким заједничким својством. Код неразговетних скупова имају се у виду елементи који делимични поседују то својство. На пример, у простору стања можемо да одредимо неразговетни подскуп могућих стања. Називајући стање "могућим", једноставно имамо у виду да тако о њему просуђује неки појединац. Свако просуђивање одређује посебан неразговетан скуп.

Предност коришћења појма неразговетног скупа је једноставност и општост. Неразговетан систем није сложенији од детерминистичког, а омогућава решавање не само једног проблема већ целе групе проблема. Истовремено се модел усложњава, јер се допушта да неки параметар може да узима било коју вредност из неког интервала. Тако добијени систем може да се посматра више као систем за доношење одлука, него као прост опис прелаза система из стања у стање. То ћемо детаљније проучити у наредним поглављима.