FAKULTET ORGANIZACIONIH NAUKA

Teorija odlučivanja

For dummies

L.

Sadržaj

Predgovor prvom izdanju

Ova Skripta je napravljena kao pomoć u razumevanju knjige „Odlučivanje“ dr. Milutina E. Čupića i dr. Milije M. Sukanovića. Sva prava autora su zadržana.

Skripta prati poglavlja u knjizi, ali numerisanja unutar jednog poglavlja nisu identična sa onim iz knjige. Iz prostog razloga što je nešto skraćeno, a nešto „preuređeno“.

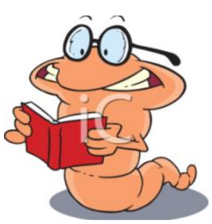
U Skripti je obrađeno prvih pet poglavlja knjige. Šesto poglavlje se odnosi na **Višekriterijumsko odlučivanje** i na metode rešavanja zadataka koje smo obradili na vežbama. Ukoliko znate da rešavate zadatke ovo poglavlje vam ni ne treba. Možete ga pročitati ukoliko želite. Sedmo poglavlje se odnosi na **Grupno odlučivanje** koje smo takođe obradili na vežbama kroz zadatke. Međutim, za razliku od šestog poglavlja, sadrži i teorijski deo koji ranije nismo spominjali na vežbama. Razlog zbog kojeg ta teorija nije ubačena u Skriptu je taj što se ovaj deo najčešće ne javlja na ispitu, a i zato što se autor smorio. Ukoliko baš insistirate, naučite ovaj deo iz knjige. Lagan je i lako se čita. U drugom izdanju možda i on bude ubačen.

Kroz sopstveno i tuđe iskustvo tvrdim da je ova skripta **dovoljna**. Čak i za 10.

Kao što ćete uskoro videti, Skripta je vrlo slikovita. Pre nego što počnete trebalo bi da znate značenje određenih simbola koji se nalaze u Skripti:

- Definica koja sledi je u potpunosti (od reči do reči) preuzeta iz knjige. Ako zvuči ne logično znate koga da krivite.

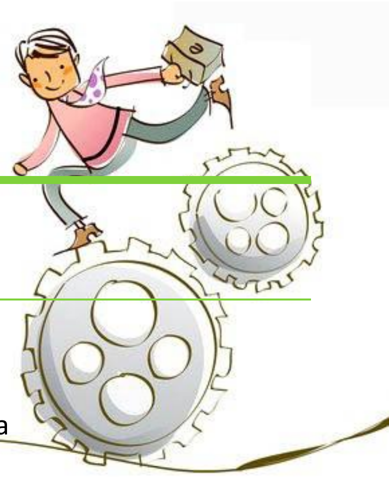
- Definicija ili objašnjenje koje sledi je izuzetno važno za razumevanje stvari koje tek dolaze. Preporučuje se da se odmah zapamti (sa razumevanjem).



- Deo lekcije namenjen za štrebere. Nije neophodan za opšte razumevanje tematike, ali može značiti ukoliko jurite desetku.

I za kraj - ukoliko naiđete na neku grešku u kucanju nemojte mi zameriti. Ipak je trebalo iskucati skoro 40 strana. Ako vam nije problem skrenite mi pažnju na grešku kako bi skripta bila lepša za sledeće generacije. Hvala.

Srećno u daljem radu,
Vaš Autor.



1. OSNOVE TEORIJE ODLUČIVANJA

1.1. Sistemski pristup odlučivanju

- **Sistem:** Celina sastavljena od skupa delova, sa određenim vezama između tih delova i njihovim atributima, koji služe za zadovoljenje neke funkcije.
- **Organizacija:** Sistem čovek-mašina (vidi sliku radi razjašnjenja), sa specijalnim osobinama zbog psihološke i sociološke prirode čoveka.

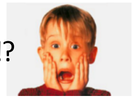
- **Teorija odlučivanja** se bavi rešavanjem složenih problema (donošenjem kompleksnih odluka) od najvećeg interesa za organizaciju koji se ne mogu rešiti konvencionalnim metodama.

- Osnova svih kvantitativnih procesa odlučivanja se sastoji iz sledećih koraka:
    1. Definisanje sistema (ili problema) i njegovih parametara
    2. Utvrđivanje kriterijuma odlučivanja, odnosno ciljeva koji se žele postići (<u>najvažniji korak</u>)
    3. Formulisanje veza između parametara i kriterijuma, tj. modela
    4. Generisanje alternativa, odnosno akcija
    5. Izbor akcije koja najviše zadovoljava postavljene kriterijume

1.2. Opšte karateristike odluka

1. Važnost odluke - utiče na način donošenja odluke i metodu koja će koristiti
2. Vreme i troškovi donošenja odluke
   - vrednost odluke ne sme biti manja od troškova nastalih pri njenom donošenju
3. Stepen složenosti - raste ako je za njeno donošenje potrebno:
    - Razmatrati veći broj promenljivih
    - Operisati sa strogo zavisnim promenljivim
    - Koristiti nekompletne ili nepouzdane podatke koji opisuju promenljive.

1.3. Priroda procesa odlučivanja

- <u>**Dilema:**</u> Da li je ODLUČIVANJE = PROCES (rešavanje problema)?!?!? 

- <u>**Nije!**</u> Između rešavanja problema i donošenja odluke ne sme se staviti znak jednakosti, iako se u praksi ova dva pojma svode na isto. Generalno posmatrano, rešavanje problema je širi proces od donošenja odluka. Odluka je samo jedna faza kompletnog procesa rešavanja problema.

- Proces rešavanja problema obuhvata sledeće faze:
    1. Postati svestan problema
    2. Definisati problem
    3. Ustanoviti kriterijume odlučivanja
    4. Razviti alternativna rešenja
    5. Analizirati podatke
    6. Izabrati najbolju akciju - **doneti odluku**

1.4. Pojmovi i definicije

Odlučivanje je izbor jedne, iz skupa mogućih akcija (alternativa), pri čemu skup mora raspolagati sa najmanje 2 akcije. Taj izbor je moguće napraviti na različite načine koristeći:

1. Tehnike odlučivanja - procedure za rešavanje problema u procesu donošenja odluka;
2. Pravila odlučivanja - prethodno definisani vodiči sa prosuđivanje;
3. Veštine odlučivanja - korišćenje nečijeg znanja u rešavanju problema.

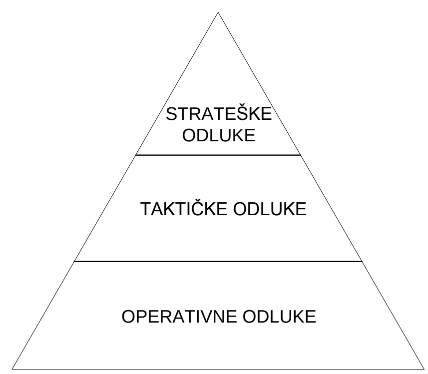
Donosilac odluke: Može biti svako ko radi u nekom delu poslovnog okruženja i ko snosi odgovornost za njega. Zbog svog predvidivog ponašanja, donosioci odluka se mogu svrstati u nekoliko kategorija:

1. Ekonomski DO (zanimaju ga samo one odluke koje su korisne i praktične),
2. Estetičari (njegove vrednost leže u harmoniji, individualnosti, pompi i moći),
3. Teoretičari (zainteresovani za otkrivanje istine),
4. Socijalni (vole ljude, pitaju za mišljenje, nesebični i simpatični),
5. Politički (zainteresovani za moć i uticaj),
6. Religiozni (spiritualnost).

- **Analitičari:** Ljudi u senci koji vrše pripremu odlučivanja (sve ono što prethodi neposrednom činu odlučivanja), koji su osposobljeni da uočavaju karakteristike problema i da potom vrše njegovo modeliranje i rešavanje .

- **Cilj:** Ono što želimo da postignemo našom odlukom (željeno stanje sistema, željeni izlaz). Ciljevi se ostvaruju uzimajući u obzir ograničenja prirode sistema, resursa, tehničkih i tehnoloških karakteristika mašine i druga. Skup ograničenja se najčešće daje u vidu jednačina/nejednačina u kojima se nalaze iste nepoznate kao i u funkciji cilja.

- **Odluke mogu biti**:
  1. Strateške - Značajnije i sa dugoročnim posledicama. Odnose se na planiranje i programiranje razvoja. Osnovni kriterijum njihovog vrednovanja je **efektivnost sistema**. Donosi ih najviše poslovno rukovodstvo.
  2. Taktičke - Obezbeđuju realizaciju strateških odluka. Osnovni kriterijum njihovog vrednovanja je **efektivnost sistema.** Donosi ih srednje rukovodstvo.
  3. Operativne - Svakodnevne odluke, kojie donosi operativno rukovodstvo. Njima se obezbeđuje osnova za realizaciju obaveza i promena iniciranih na višim nivoima odlučivanja.



- **Akcija (alternativa):** Ono što donosiocu odluke stoji na raspolaganju kao mogućnost izbora prilikom odlučivanja. Skup takvih odluka se naziva *strategijom*.

- **Uslovni izlaz jedne akcije**: rezultat koji donosilac odluke očekuje od izabrane akcije. U literaturi se često nazivaju plaćanjima. Bitno je napomenuti da donosilac odluke predviđa različite rezultate u zavisnosti od stanja koje mogu nastupiti u budućnosti. Matrica koja prikazuje zavisnost uslovnih izlaza od stanja prirode naziva se **tabelom plaćanja**.

Plaćanja: Posledice koje nastaju izborom pojedinih akcija (alternativa) pri odigravanju svih mogućih stanja. Najčešće se iskazuju tabelarno, u vidu tabele plaćanja.

Žaljenje: Apsolutna vrednost razlike plaćanja jedne akcije, koja se posmatra za izabrano stanje, i plaćanja koje se dobije za najbolju akciju pri istom stanju. Drugim rečima, žaljenje je propušteni profit zbog neizbora najbolje akcije u slučaju odigravanja pojedinog stanja.

Postoje tri vrste odlučivnja u klasičnoj teoriji odlučivanja:

1. **PRI IZVESNOSTI** - slučaj kada znamo sa sigurnošću koje će se stanje prirode odigrati.
2. **PRI RIZIKU** - slučaj kada je stanje prirode (ne)poznato ali postoji objektivna ili empirijska evidencija koja donosiocu odluke omogućuje da različitim stanjima prirode dodeli odgovarajuće verovatnoće nastupanja.
3. **PRI NEIZVESNOSTI** - stanje prirode nepoznato i nepoznate sve informacije na osnovu kojih bi se mogle dodeliti verovatnoće nastupanja pojedinih stanja.

1.5. Tipologija odluka

- **SIMON:**
  1. Programirane – rutinske odluke koje se stalno ponavljaju i može se definisati procedura koju treba koristiti za njihovo donošenje.
  2. Neprogramirane – su nove (nesvakodnevne) nestruktuirane i značajne odluke. Ne postoje metode za koje se unapred zna da mogu biti korišćene, jer su i odluke nove.

- **DELBECQ:**
  1. Rutinske
  2. Kreativne
  3. Pregovaračke

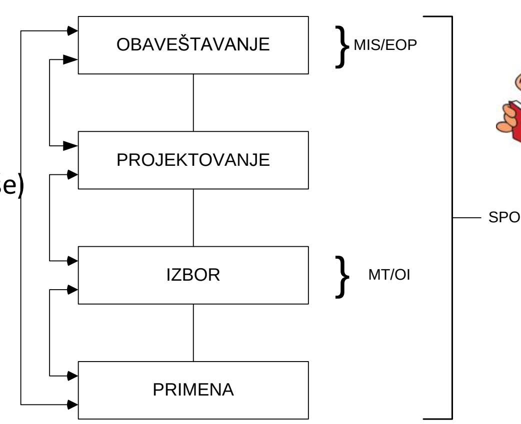
- **MINTZBERG:**
  1. Preduzimačke
  2. Aditivne
  3. Odluke planiranja

- **HARRISON:**
  1. Proračunske
  2. Strategije na bazi procena
  3. Kompromisne
  4. Inspiracione startegije

1.6. Faze procesa odlučivanja

Faze procesa odlučivanja po SIMON-u:

1. **Obaveštavanje** - o problemu za koji se donosi odluka (istraživanje okruženja, prikupljanje i obrada podataka, ostala potrebna istraživanja radi identifikacije problema);
2. **Projektovanje** - u smislu određivanja, razvoja i analize mogućih alternativa ili akcija (proces razumevanja problema, generisanja rešenja i testiranje dozvoljivosti rešenja);
3. **Izbor** - određene akcije iz skupa raspoloživih.
4. Nakon Simona je izdvojena **Primena** kao 4. faza.



Faze procesa odlučivanja po autorima knjige:

1. Evidentiranje problema (predpostavlja se da ih ima više)
2. Rangiranje problema (prema važnosti)
3. Definicija problema (nivo detaljisanja, kriterijumi..)
4. Sakupljanje činjenica (formiranje baze podataka)
5. Predviđanje budućnosti
6. Formiranje modela
7. Rešavanje problema (modela)
8. Vrednovanje rezultata (da li se razultati modela poklapaju sa očekivanim rezultatima relanog sistema)
9. Donošenje odluke
10. Kontrola izvršenja odluke
11. Analiza posledica tog izvršenja.

→ Druge discipline uključene u pojedine faze odlučivanja:
MIS – Menadžment informacioni sistemi
EOP – Elektronska obrada podataka
MT – Menadžment teorija
OI – Operaciona istraživanja
SPO – Sistemi za podršku u odlučivanju

1.7. Modeli i modeliranje

- Jedna od faza u procesu donošenja odluke pripada i formiranju modela za probleme koji se rešavaju.
- **Modeli:** Sintetska apstrakcija realnosti tj. uprošćena slika objektivne stvarnosti iz razloga što modeli treba da obuhvataju samo relevantne karakteristike pojave koju predstavljaju.

- Prednosti korišćenja modela:
  1. Omogućavaju analizu i eksperimentisanje sa složenim problemima
  2. Obezbeđuju efikasno upravljanje resursima koji se koriste za analizu date pojave
  3. Vreme za analizu date pojave se značajno smanjuje
  4. Naglažavaju se bitne karakteristike pojave.

- Faza modeliranja je jedna od najkritičnijih u procesu odlučivanja, jer ukoliko se ispusti neka od bitnih karakteristika pojave koja se tim modelom opisuje, dobijamo njegovu iskrivljenu sliku. Zbog toga *RIVET* ide korak dalje u definisanju modela i kaže da su modeli „skup logičkih relacija koje će zajedno povezati relevantne karakteristike stvarnosti bitne za problem koji se rešava.“ Ta logička relacije se simbolički može iskazati kao:

$$f(x_1,x_2,\dots,x_m; y_1,y_2,\dots,y_n)$$

Vrste modela prema karakteristikama:

	KARAKTERISTIKE MODELA	MODELI
1.	FUNKCIJE	a) Deskriptivni b) Prediktivni c) Normativni
2.	STRUKTURA	a) Ikonički b) Analogni c) Simbolički
3.	STEPEN SLUČAJNOSTI	a) Deterministički b) Rizik c) Neizvesnost d) Konflikt
4.	VREMENSKA ZAVISNOST	a) Statički b) Dinamički
5.	OPŠTOST	a) Specijalizovani b) Opšti
6.	STEPEN KVALIFIKACIJE	a) Kvalitativni b) Kvantitativni - statistički - optimizacioni - heuristički - simulacioni
7.	DIMENZIONALNOST	a) Dvodimenzionalni b) Višedimenzionalni
8.	ZATVORENOST	a) Zatvoreni b) Otvoreni

1.8. Modeli odlučivanja

- U teoriji odlučivanja, modeli se najčešće prikazuju kao skup vektora:
  a) alternativa (akcija ili strategija)
  b) mogućih okolnosti (stanja prirode)
- Tako definisan model se najčešće prikazuje tzv. matricom efikasnosti:

ALTERNATIVE	MOGUĆE OKOLNOSTI (STANJA PRIRODE)			
	s_1	s_2	...	s_n
a_1	e_{11}	e_{12}	...	e_{1n}
a_2	e_{21}	e_{22}	...	e_{2n}
...	...	...		...
...	...	...		...
a_m	e_{m1}	e_{m2}	...	e_{mn}

- Izbor određenje akcije $\mathbf{a}_i$ (i = 1,2,...,m), u datim okolnostima $\mathbf{s}_j$ (j=1,2,...,n) rezultira efektom $\mathbf{e}_{ij}$.

1.9. Izbor metoda i tehnika

Kao što je u prethodnim poglavljima već rečeno, rešavanje formulisanih problema se najčešće vrši uz pomoć odgovarajućih metoda i tehnika. U literaturi se pojmovi metoda i tehnika najčešće koriste kao sinonimi, iako se međusobno razlikuju:

- Metoda je skup pravila u izvođenju ili obavljanju nekog posla čija primena omogućava ostvarenje nekog cilja.
- Tehnika je skup pravila u izvođenju ili obavljanju nekog posla, naročito s obzirom na upotrebu tehničkih sredstava.

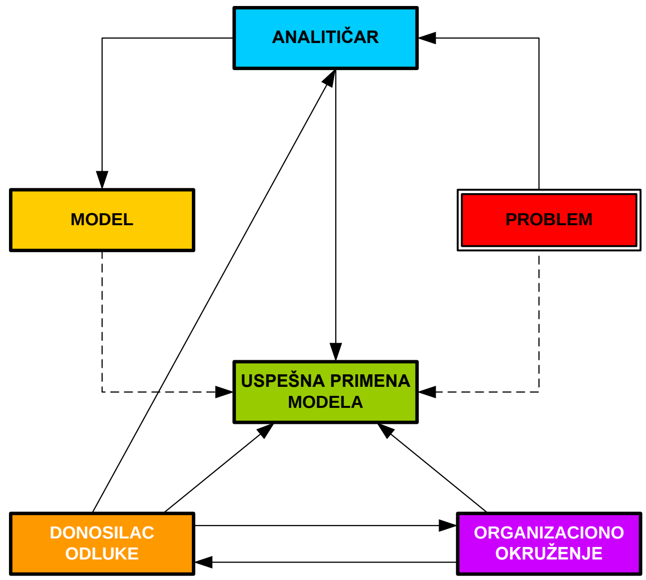
Koraci u izboru metoda i tehnika su sledeći:

1. Identifikovanje ključnog donosioca odluke
2. Određivanje kriterijuma za rešenja problema
3. Specificiranje problema
4. Ispitivanje korisnosti dostupnih podataka
5. Izbor kataloga primenljivih metoda ili tehnika
6. Poređenje primenljivih metoda ili tehnika sa kriterijumima izbora
7. Predstavljanje inicijalnog modela upravljaču
8. Prikupljanje primarnih podataka
9. Razvoj modela za testiranje
10. Predstavljanje rezultata upravljaču
11. Provera, i ako je potrebno ispravka modela.

1.10. Primena modela odlučivanja

- Primena modela je uspešna ako donosilac odluke koristi model pri odlučivanju i ako mu model daje korisne informacije, odnosno ukoliko model povećava efikasnost odlučivanja.

- Da li će jedan model biti uspešno primenjen zavisi od većeg broja elemenata, koji se ***nazivaju elementima sistema primene***. Ako bilo koji element nije u skladu sa ciljem, primena modela neće dati optimalno rešenje.
- Elementi sistema primene i njihove međusobne veze su prikazani na slici:
    1. Problem,
    2. Donosilac odluke,
    3. Organizaciono okruženje,
    4. Analitičar i
    5. Model



1.11. Područje odlučivanja

Odlučivanje se odigrava na nekoliko nivoa:

1. ***Na nivou pojedinaca - individualno odlučivanje***
   Ove odluke mogu imati neke zajedničke karakteristike, ali u zavisnosti od nivoa obrazovanja, iskustva i stečenih veština, različiti donosioci odluka će se u istim situacijama ponašati različito.

2. ***Grupno odlučivanje***
   Prednosti:
   (1) lakše sagledavanje problema
   (2) lakša mogućnost dolaska do alternativa
   (3) odluka će pogodovati više društvu ili organizaciji nego pojedincu.

   Nedostaci:
   (1) sporost u odlučivanju
   (2) prirodna nesklonost grupe ka inicijativi
   (3) teškoće oko definisanja strategija.

3. ***Organizaciono odlučivanje***
   Odlučivanje koje se sprovodi na nivou organizacije i koje ima slične karakteristike kao individualno odlučivanje.

4. ***Globalno ili metaorganizaciono odlučivanje***
   Posmatra se ukupnost svih organizacija (jedne zemlje) kao sistem preduzeća. Odluke koje se donose na tom nivou, orjentisane su ka opštoj dobrobiti potrošača, optimalnoj alokaciji resursa i proizvodnji i distribuciji dobara i usluga. Odluke se donose na nivou celokupnog društva, a cilj je zadovoljenje socijalnog blagostanja građana.

2. ANALIZA ODLUČIVANJA

Okruženje u kome donosilac odluke odlučuje, po pravilu je izuzetno kompleksno i dinamičko, i donosiocu odluke je izuzetno teško da sagleda sve činioce koji utiču na alternative odlučivanja za posmatrani problem. U tim situacijama on koristi **analizu odlučivanja** koja daje okvir za rešavanje problema odlučivanja sistematskim logičkim uravnoteženjem svih činilaca koji utiču na odluku. Analiza takođe obezbeđuje i praktičan metod za prikupljanje dodatnih informaciju u cilju smanjivanja neizvesnosti vezanih za problem i nalaženje optimalne strategije u svetlu tih novih informacija.

Najvažniji koraci procesa analize odlučivanja su sistematsko strukturiranja, graničenje problema, određivanje neizvesnosti i rizika i izbor optimalne akcije:

- **Struktuiranje problema** predstavlja određivanje svih mogućih alternativa, kao i stanja budućnosti i njihovo prikazivanje u vidu drveta odlučivanja. Pod drvetom odlučivanja se podrazumeva skup povezanih grana, gde svaka grana predstavlja ili alternativu odlučivanja ili stanje. Po uobičajenoj konvenciji čvor iskazan kvadratom predstavlja alternativu odlučivanja (čvor odlučivanja) a kružić predstavlja stanje (čvor mogućnosti).
- **Graničenje problema** je način analize gde se kreće od jednostavnog problema odlučivanja (sa malim brojem stanja i alternativa), a potom se uvode nove pretpostavke (alternative i stanja) i ispituje njihov uticaja na optimalnu odluku.
- **Analiza neizvesnosti** predstavlja dodeljivanje verovatnoća svim stanjima koja se odnose na posmatrani problem. Verovatnoće moraju da odražavaju verovanja, informacije i ocene donosioca odluke (zato su subjektivne).
- **Izborom pojedine akcije** nastaju posledice koje se nazivaju **plaćanjima** koje opisuju uticaj od strane donosioca odluke pri različitim stanjima, a koje se odnose na problem.

Neki kriterijumi koji se koriste za izbor optimalne akcije:

- ***Kriterijum očekivanih korisnosti*** **-** predstavlja kriterijum izbora najbolje akcije, kada donosilac odluke dodeljuje svoje vrednosti koristi (preferencija) svim posledicama, računa očekivanu korisnost i bira akciju za koju je ona najveća.
- ***Kriterijum očekivane novčane vrednosti*** **-** primenjuje se kada se donosilac odluke ne izlaže rizičnom ponašanju prema posledicama. On tada može izračunati očekivane novčane vrednosti ishoda svake akcije i izabrati onu za koju je ta vrednost maksimalna.
- ***Vrednosna analiza vremenskih preferencija*** **-** predstavlja postupak kojim se utvrđuje struktura vremenskih preferencija, tako što se računa sadašnja vrednost posledica, a zatim se primenjuje kriterijum očekivanih novčanih vrednosti ili kriterijum očekivanih korisnosti za nalaženje najbolje akcije.

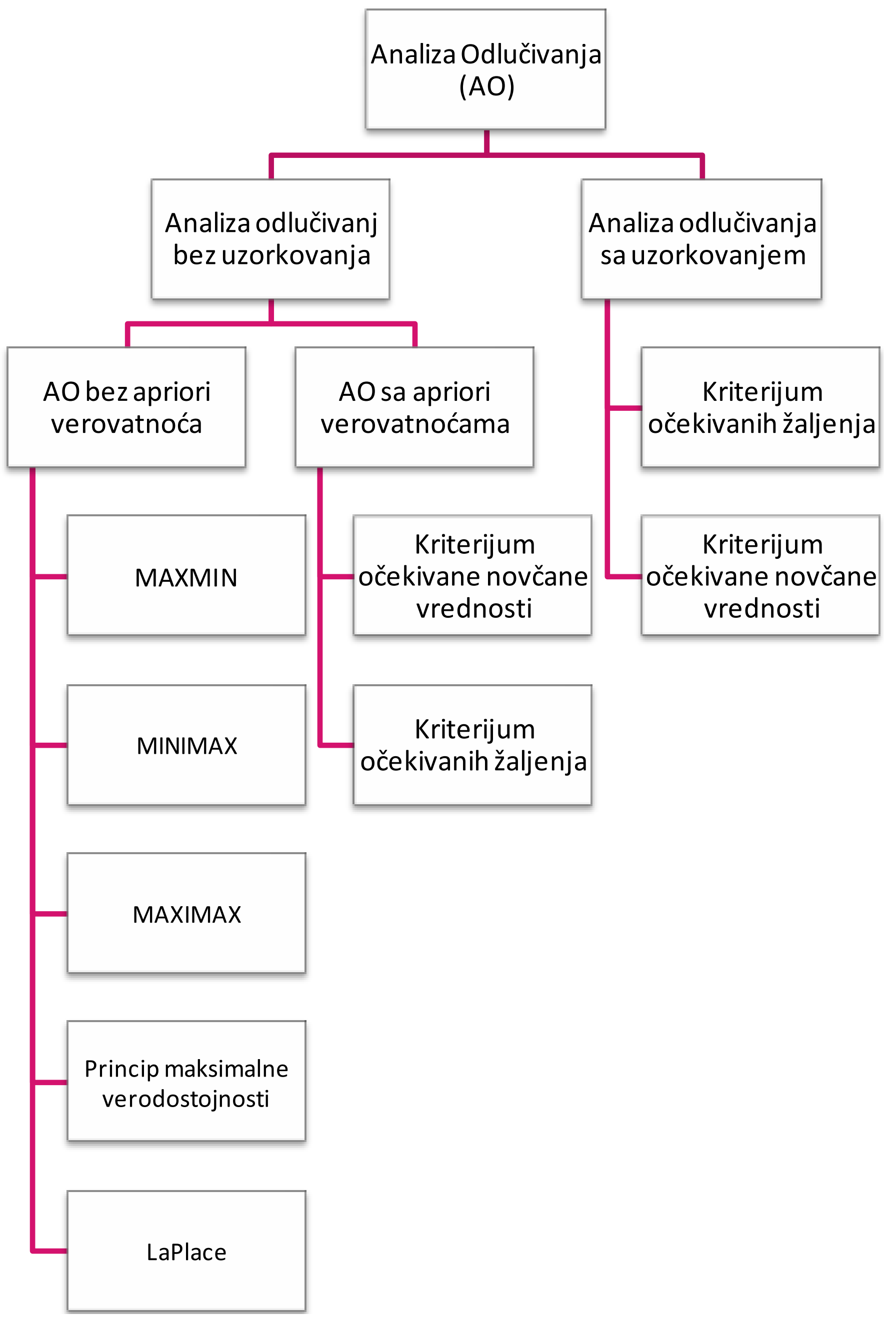
2.1. Model analize odlučivanja i njegovi koraci

1. **Struktuiranje problema** - definisanje mogućih alternativa a_i, stanja s_j i određivanje plaćanja p_{ij} .
2. **Analiza neizvesnosti** - dodeljivanje verovatnoća svim mogućim stanjima $V(s_j)$.
3. **Analiza korisnosti i preferencija** - dodeljivanje preferencija za rizične posledice.
4. **Izbor optimalne akcije** - korišćenjem odgovarajućeg kriterijuma.
5. **Prikupljanje novih informacija** - radi smanjenja neizvesnosti.

- Ukoliko se donosilac odluke ne izlaže rizičnom ponašanju prema posledicama, izbor najbolje odluke treba da sledi korake (1), (2) i (4). Taj proces se naziva **analizom odlučivanja sa apriori verovatnoćama.**

- Ako donosilac odluke nije u mogućnosti da dodeli apriori verovatnoće stanjima prirode, onda izbor optimalne akcije vrši uz pomoć nekih metoda koje mu stoje na raspolaganju. Ovaj proces se naziva **analizom odlučivanja bez apriori verovatnoća.**
- Ako se donosilac odluke izlaže rizičnom ponašanju prema posledicama, izbor najbolje odluke treba da sledi korake (1), (2), (3) i (4). Taj proces se naziva **analizom odlučivanja sa korisnostima.**
- Ukoliko se donosilac odluke upusti u proces prikupljanja novih informacija u cilju smanjenja neizvesnosti, onda treba da sledi korake (1), (2), (4) i (5). Taj proces se naziva **analizom odlučivanja sa uzorkovanjem.**
- Takođe postoji i **odlučivanje pri izvesnosti** tj. proces donošenje odluka kada su poznate sve činjenice vezane za stanja prirode problema, tj. kada postoji samo jedno stanje (ili veći broj poznatih stanja od kojih se sa punom sigurnošću zna koje će se odigrati).

- U sledećem dijagramu su prikazane sve vrste analiza odlučivanja koje će naknadno biti detaljno objašnjene.



2.1. Analiza odlučivanja bez apriori verovatnoća

- Ova analiza se koristi za izbor najbolje akcije (alternative) kada donosilac odluke nije u mogućnosti da pojedinim budućim stanjima dodeli odgovarajuće verovatnoće.

Tabela plaćanja (profita)

ALTERNATIVE	MOGUĆE OKOLNOSTI (STANJA)			
	s_1	s_2	...	s_m
a_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1m}
a_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2m}
...	...	...		...
...	...	...		...
a_n	p_{n1}	p_{n2}	...	p_{nm}

a_i - alternative
s_j - moguća stanja u budućnosti
p_{ij} - posledica (rezultat) izbora određene akcije a_i, ako se odigralo stanje s_j.

$i = 1,...,n$
$j = 1,...,m$

- Za objašnjenje svih metoda ćemo koristiti ovu tabelu.
- Ukoliko posmatramo neku proizvodnu organizaciju, pod posledicom jedne akcije se najčešće podrazumeva profit koja ona donosi, ili troškovi koji se stvaraju.

MAXIMIN kriterijum - kriterijum pesimizma

→ Izabrati akciju za koju je minimalni profit (po alternativama) maksimalan:

$$\max_{a_i} \min_{s_j} \{p(a_i, s_j)\} = \max_{a_i} \min_{s_j} \{p_{ij}\}$$

- Donosilac odluke zausima pesimistički stav i predpostavlja da će se odigrati najgore stanje budućnosti. I onda odabira onu alternativa koja pri ostvarenju najgoreg stanja budućnosti donosi najveći mogući dobitak tj. najmanji mogući gubitak.

- Konkretan postupak:
  (1) Za svaku alternativu se izabere najmanje povoljan rezultat (profit) $\boldsymbol{min\ p_{ij}}$
  (2) Zatim se odabira se ona alterniva kod koje je $min\ p_{ij}$ najveće, tj. $\boldsymbol{max\ min\ p_{ij}}$

MAXIMAX kriterijum - kriterijum optimizma, „sve ili ništa“

→ Izabrati akciju za koju je maximalni profit (po alternativama) maksimalan:

$$\max_{a_i} \max_{s_j} \{p(a_i, s_j)\} = \max_{a_i} \max_{s_j} \{p_{ij}\}$$

- Donosilac odluke zausima krajnje optimistički stav i predpostavlja da će se odigrati najbolje stanje budućnosti. Bira se ona alternativa koja daje mogućnost ostvarenja najvećeg mogućeg dobitka, bez obzira na mogući gubitak.

- Konkretan postupak:
  (1) Za svaku alternativu se izabere najpovoljniji rezultat (profit) $\boldsymbol{max\ p_{ij}}$
  (2) Zatim se odabira se ona alterniva kod koje je $max\ p_{ij}$ najveće, tj. $\boldsymbol{max\ max\ p_{ij}}$

MINIMAX kriterijum žaljenja, Savageov kriterijum

→ Izabrati akciju za koju je maksimalno žaljenje (po alternativama) minimalno: $\min_{a_i} \max_{s_j} \{ \check{z}_{ij} \}$

- Kriterijum žaljenja je definisan kao poboljšanje i dopuna u odnosu na maximin kriterijum. Ovaj kriterijum bira akciju koja nije isključivo ni pisimistička ni optimistička, što ga čini značajno uravnoteženijim u odnosu na prethodna dva kriterijuma.
- Savageov kriterijum se bazira na principu da je potrebno **svesti na minimum moguću štetu.**

- **Žaljenje** se definiše kao propušteni profit zbog neizbora najbolje akcije u slučaju odigravanja pojedinog stanja. Ukoliko donosilac odluke izabere akciju a_i, a odigra se stanje s_j tada se žaljenje računa po formuli: $\check{z}_{ij} = M_j - p_{ij}$ gde je M_j maksimalni profit sa stanje s_j.

Proširena tabela plaćanja

ALTERNATIVE	MOGUĆE OKOLNOSTI (STANJA)			
	s_1	s_2	...	s_m
a_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1m}
a_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2m}
...	...	...		...
...	...	...		...
a_n	p_{n1}	p_{n2}	...	p_{nm}
Mj: max p_{ij}	max p_{i1}	max p_{i2}		max p_{nm}

- Konkretan postupak:
  (1) Od standardne tabele plaćanja (sa prethodne stane) se kreira tabela žaljenja tako što se umesto svakog iznosa profita p_{ij} upiše iznos žaljenja $\check{z}_{ij}$.
  (2) Za svaku alternativu se izabere najveće žaljenje $\max \check{z}_{ij}$
  (3) Zatim se odabira se ona alterniva kod koje je $\max \check{z}_{ij}$ najmanje, tj. $\min \max \check{z}_{ij}$

Kriterijum maksimalne verodostojnosti

→ Izabrati akciju za koju je profit maksimalan, gde ta akcija mora da odgovara stanju koje ima maksimalnu verovatnoću odigravanja: $\max_{a_i} \{ p_{ij} * \}$

→ Pri tom je s_j* stanje koje ima najveću verovatnoću odigravanja.

- Konkretan postupak:
  (1) Donosilac odluke dodeljuje verovatnoće nastupanja svim stanjima;
  (2) Zatim nalazi stanje sa maksimalnom verovatnoćom pojavljivanja;
  (3) Na kraju, DO odabira onu alternativu koja pri datom stanju donosi najveći profit.

LaPLACE-ov kriterijum

→ Izabrati akciju za koju je očekivani profit maksimalan $\max_{a_i}\{\overline{p_i}\}$

- LaPlace-ov kriterijum polazi od pretpostavke da ako donosilac odluke ne vodi računa o verovatnoćama odigravanja pojedinih stanja može prema njima ponašati kao da će se odigrati sa podjednakom verovatnoćom.
- Kada bacamo kockicu, veorvatnoća da će nam pasti neki od brojeva (1,2,3,4,5,6) iznosi 1/6, pa tako i verovatnoća da će se odigrati jedno od $\boldsymbol{m}$ mogućih stanja $\boldsymbol{s_j}$ iznosi:

$$\boldsymbol{V(s_j) = {}^{1}\!/_{m}}$$

- Sada računamo za svaku alternativu računamo njen očekivan profit (u statistici bi ovo bilo matematičko očekivanje, tj. očekivana vrednost) po sledećoj formuli:

$$\boldsymbol{\overline{p_i} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \cdot V(s_j) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} p_{ij}}$$

- Konkretan postupak:
  (1) Za svaku alternativu računamo njen očekivan profit $\overline{p_i}$
  (2) Zatim biramo alternativu čiji je očekivani profit najveći $max\{\overline{p_i}\}$

- Ovaj postupak u stvari predstavlja primenu kriterijuma očekivane novčane vrednosti koji će biti objašnjen u sledećem delu.

2.2. Analiza odlučivanja sa apriori verovatnoća

- Ova analiza se koristi za izbor najbolje akcije (alternative) kada su donosiocu odluke poznate verovatnoće pojedinih stanja budućnosti.

Tabela plaćanja (profita)

ALTERNATIVE (AKCIJE)	MOGUĆE OKOLNOSTI (STANJA)			
	s_1	s_2	...	s_m
	$V(s_1)$	$V(s_2)$	...	$V(s_m)$
a_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1m}
a_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2m}
...	...	...		...
...	...	...		...
a_n	p_{n1}	p_{n2}	...	p_{nm}

$\boldsymbol{a_i}$ - alternative
$\boldsymbol{s_j}$ - moguća stanja u budućnosti
$\boldsymbol{V(s_j)}$ - verovatnoće pojavljivanja stanja $\boldsymbol{s_j}$
$\boldsymbol{p_{ij}}$ - posledica (rezultat) izbora određene akcije $\boldsymbol{a_i}$, ako se odigralo stanje $\boldsymbol{s_j}$.

i = 1,...,n
j = 1,...,m

- U analizi odlučivanja sa apriori verovatnoćama predpostavljamo da je donosilac odluke neutralan u odnosu na rizik.

Kriterijum očekivane novčane vrednosti (ONV)

→ Ako je promenljiva stanja s diskretna i ako uzima vrednosti $s_1, s_2, \ldots, s_m$ sa raspodelom apriori verovatnoća $V(s_1)$, $V(s_2), \ldots, V(s_m)$, tada se očekivana novčana vrednost akcije a_i obeležena sa $ONV(a_i)$ može definisati kao:

$$ONV(a_i) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \cdot V(s_j)$$

Na osnovu ove definicije donosilac odluke bira onu akciju za koju je očekivana novčana vrednost optimalna. Ukoliko su nam u tabeli plaćanja dati profiti, onda biramo akciju za koju je *ONV(a_i)* maksimalno, a ukoliko su nam dati troškovi biramo onu akciju za koju je *ONV(a_i)* minimalno.

→ **Primena ONV kriterijuma:**

1. Određivanje alternativa odlučivanja a_i i svih mogućih stanja s_j.
2. Određivanje plaćanja (profita/troškova) p_{ij}.
3. Dodeljivanje apriori verovatnoća $V(s_j)$ svim stanjima.
4. Računanje očekivanih novčanih vrednosti za svaku alternativu $ONV(a_i)$.
5. Primena **ONV** kriterijuma i izbor optimalne akcije.

Kriterijum očekivanih žaljenja/očekivanih gubitaka prilike

→ Ako je promenljiva stanja s diskretna i ako uzima vrednosti $s_1, s_2, \ldots, s_m$ sa raspodelom apriori verovatnoća $V(s_1)$, $V(s_2), \ldots, V(s_m)$, respektivno i ako $ž_{ij}$ predstavlja žaljenje ako se izabere akcija a_i a desi se stanje s_j, tada se očekivano žaljenje akcije a_i obeleženo sa $OŽ(a_i)$ može definisati kao:

$$OŽ(a_i) = \sum_{j=1}^{m} ž_{ij} \cdot V(s_j)$$

Na osnovu ove definicije donosilac odluke bira onu akciju a_i* za koju je očekivano žaljenje minimalno: $OŽ(a_i^*) = \min_{a_i} \{OŽ(a_i)\}$

- Kriterijum OŽ daje iste rezultate kao i kriterijum ONV, ali prednost njegove primene leži u činjenici da nam on omogućava da izračunamo tačan iznos koji je potreban radi prikupljanja dodatnih informacija u cilju smanjenja neizvesnosti u posmatranom problemu. Izračunavanje tog iznosa se vrši uz pomoć promenljive koja se zove *Očekivana vrednost perfektne informacije*.
- Tabela žaljenja, sa vrednostima željenja za svaku akciju se kreira isto kao kod MINIMAX kriterijuma žaljenja.

Očekivana vrednost perfektne informacije (OVPI)

→ **OVPI** = Očekivano žaljenje najbolje akcije $OŽ(a_i^*)$

→ OVPI predstavlja iznos koji uprava može potrošiti u cilju pribavljanja najbolje informacije radi smanjenja neizvesnosti. Često se naziva i ***cena neizvesnosti***.

→ **Primena OŽ kriterijuma, i izračunavanje OVPI:**

1. Određivanje alternativa odlučivanja a_i i svih mogućih stanja s_j.
2. Određivanje žaljenja (gubitka prilike) $ž_{ij}$. za svaku akciju a_i i stanje s_j.
3. Dodeljivanje apriori verovatnoća $V(s_j)$ svim stanjima.
4. Računanje $OŽ(a_i)$ za svaku akciju a_i.
5. Izabrati *OŽ* koje je minimalno u odnosu na sva žaljenja dobijena u koraku 4.
6. Izračunati *OVPI*.

2.3. Analiza odlučivanja sa uzorkovanjem

- Kao što je prikazano u prethodnom delu, *Očekivana vrednost perfektne informacije* nam ukazuje na iznos koji možemo iskoristiti radi pribavljanja novih podataka (putem marketinških istraživanja, anketa, panel grupa). Uz pomoć tih novih podatak možemo da izvršimo reviziju apriori verovatnoća koje su do sada korišćenje, i izračunamo aposteriori verovatnoće koje imaju veću verodostojnost tj. daju donosiocu odluke bolji uvid u buduća stanja i mogućnost donošenja ispravne odluke.
- Celokupna analiza izbora optimalne odluke u svetlu novih informacija se naziva analizom odlučivanja sa uzorkovanjem.

2.3.1. Prikupljanje informacija i izračunavanje aposteriori verovatnoća

- **Napomena:** radi lakšeg razumevanja postupka određivanja aposteriori verovatnoća i donošenja odluka na osnovu njih, koristiću se primerom iz knjige, koji naravno ne morate da znate napamet.

- Predpostavimo da jedna kompanija treba da se odluči da li da lansira novi proizvod ili ne. Ukoliko koristimo analizu odlučivanja bez uzorkovanja (tj. sa apriori verovatnoćama) tabela plaćanja će izgledati ovako:

Tabela plaćanja sa apriori verovatnoćama

ALTERNATIVE (AKCIJE)	MOGUĆE OKOLNOSTI (STANJA)		
	s_1	s_2	s_3
	$V(s_1)$	$V(s_2)$	$V(s_3)$
a_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}
a_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}

a_1 - lansiranje novog proizvoda
a_s - nelansiranje novog proizvoda

s_1 - niska potražnja za proizvodom
s_2 - srednja (najverovatnija) potražnja za proizvodom
s_3 - visoka potražnja za proizvodom

$V(s_j)$ - apriori verovatnoće pojavljivanja stanja s_j
p_{ij} - posledica (rezultat) izbora određene akcije a_i, ako se odigralo stanje s_j.

i = 1,2
j = 1,2,3

- Ukoliko donosilac odluke reši da želi da smanji rizik koji sa sobom nosi odluka donešena na osnovu apriori verovatnoća on može pristupi prikupljanu novih informacija, što se najčešće čini odgovarajućim marketinškim istraživanjem ili ispitivanjem panel grupe (koja predstavlja slučajan uzorak potencijalnih kupaca).

- Za naš primer o lansiranju novog proizvoda, do informacija možemo da dođemo tako što bi panel grupi dali nov proizvod na korišćenje i tražili od njih da nam kažu da li bi oni taj proizvod kupili ili ne. Na osnovu tih podataka možemo bolje da procenimo kakva će biti prodaja tog proizvoda i samim tim doneti kvalitetniju odluku.

- Označimo sa X_k ($k = 1,...,r$) informacije koje smo dobili ispitivanjem panel grupe, i to:
  X_1 - niska prodaja novog proizvoda, X_2 - srednja, X_3 - visoka.

- Logički posmatrano, X_1 (niska prodaja) ukazuje da je verovatnije realizovanje stanja s_1 (niska potražnja za proizvodom) u odnosu na s_2 ili s_3. To znači da će $V(X_1|s_1)$ biti veće od $V(X_1|s_2)$ i $V(X_1|s_3)$, gde je $V(X_1|s_1)$ je **uslovna verovatnoća** slabe prodaje (X_1) za dato stanje slabe potražnje s_1, itd.
- Sve uslovne verovatnoće su date u sledećoj tabeli:

Tabela uslovnih verovatnoća

Informacija uzorka	Moguća stanja		
	s_1	s_2	s_3
X_1	$V(X_1\|s_1)$	$V(X_1\|s_2)$	$V(X_1\|s_3)$
X_2	$V(X_2\|s_1)$	$V(X_2\|s_2)$	$V(X_1\|s_3)$
X_3	$V(X_3\|s_1)$	$V(X_3\|s_2)$	$V(X_3\|s_3)$
E $V(X_k\|s_j)$	1	1	1

- Sada kada su poznate sve uslovne verovatnoće, donosilac odluke mora da primeni **Bayes-ovu** teoremu u cilju određivanja aposteriornih verovatnoća koje se obeležavaju sa $V(s_j|X_k)$. One se nazivaju i revidiranim verovatnoćama. **Bayes-ova** teorema za opšti slučaj glasi:

$$V(s_j|X) = \frac{V(s_j) \cdot V(X|s_j)}{V(X)} = \frac{V(s_j) \cdot V(X|s_j)}{\sum_{j=1}^{m}[V(s_j) \cdot V(X|s_j)]}$$

2.3.2. Određivanje optimalne akcije za datu veličinu uzorka

- Određivanje optimalne akcije (alternative) kod analize odlučivanja sa uzorkovanjem je isto kao i kod analize odlučivanja bez uzorkovanja tj. primenjujemo metode ONV i OŽ. Jedina razlika je u tome što se ovde koriste aposteriorne verovatnoće za dato X_k, umesto apriori verovatnoća.

  - Rezultati uzorkovanja X_1, X_2 i X_3 su nezavisni. Svaki od ovih rezultata donosilac odluke posmatra posebno i računa najbolju akciju u svetlu samo jednog rezultata uzorkovanja. Na primer, ako računa najbolju akciju u svetlu rezultata uzorkovanja X_1, onda ćemo umesto apriori verovatnoća $V(s_1)$, $V(s_2)$ i $V(s_3)$, koristiti aposteriori verovatnoće $V(s_1|X_1)$, $V(s_2|X_1)$ i $V(s_3|X_1)$. Nakon što je DO odredio optimalne akcije za svaki rezulat uzorkovanja, on može da definiše strategiju koja se naziva optimalnom strategijom ili optimalnim pravilom odlučivanja.

Tabela plaćanja sa aposteriori verovatnoćama

ALTERNATIVE (AKCIJE)	Moguća stanja		
	s_1	s_2	s_3
	$V(s_1\|X_k)$	$V(s_2\|X_k)$	$V(s_3\|X_k)$
a_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}
a_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}

- ***V(s_j|X_k)*** - aposteriori verovatnoće pojavljivanja stanja s_j ako je rezultat uzorkovanja X_k.

Primena kriterijuma očekivanog žaljenja kod slučaja sa aposteriori verovatnoćama

- Odabir najbolje akcije u svetlu rezultata uzorkovanja X_k, se može dobiti primenjujući i OŽ i ONV kriterijum, međutim prednost se daje OŽ kriterijumu jer njegovim korišćenjem možemo da nađemo i vrednost informacije uzorka, što je značajna prednost. Iz tog razloga će biti detaljnije opisana samo njegova primena.

- Ako je promenljiva stanja $\boldsymbol{s}$ diskretna i ako uzima vrednosti $\boldsymbol{s_1, s_2, \ldots, s_m}$ sa raspodelom aposteriori verovatnoća $V(s_1|X_k)$, $V(s_2|X_k)$,…,$V(s_m|X_k)$, respektivno i ako $\boldsymbol{\check{z}_{ij}}$ predstavlja žaljenje ako se izabere akcija $\boldsymbol{a_i}$ a desi se stanje $\boldsymbol{s_j}$, tada se očekivano žaljenje akcije $\boldsymbol{a_i}$ posle dobijenog X_k obeleženo sa $O\check{Z}(a_i|X_k)$ može definisati kao:

$$\boldsymbol{O\check{Z}(a_i|X_k) = \sum_{j=1}^{m} \check{z}_{ij} \cdot V(s_j|X_k)}$$

Na osnovu ove definicije donosilac odluke bira onu akciju $\boldsymbol{a_i}$* za koju je očekivano žaljenje minimalno:

$$\boldsymbol{O\check{Z}(a_i{}^*|X_k) = \min_{a_i} \left\{O\check{Z}\,(a_i|X_k)\right\}}$$

2.3.3. Optimalna strategija ili optimalni plan odlučivanja

- U našem primeru preduzeća koje treba da odluči da li da lansira novi proizvod ili ne, možemo zaključiti da ukoliko se kao rezultat uzorkovanja dobiju X_2 (srednja prodaja proizvoda) ili X_3 (visoka prodaja proizvoda), preduzeće će odabrati alternativu a_1 tj. lansiranje novog proizvoda. Suprotno, ukoliko se ostvari X_1 (niska prodaja proizvoda), preduzeće će odabrati alternativu a_2. Ovaj zaključak možemo prikazati u obliku funkcije koja se naziva optimalnim pravilom odlučivanja (PO) ili optimalnom strategijom:

$$PO^*(x) = \begin{cases} a_2 & za\ X = X_1 \\ a_1 & za\ X = X_2 \\ a_1 & za\ X = X_3 \end{cases}$$

Očekivani rizik optimalne strategije

$$OR(PO^*, n) = O\check{Z}(PO^*, n) = \sum_{k=1}^{r} O\check{Z}(a_i^*|X_k) \cdot V(X_k)$$

$$V(X_k) = \sum_{j=1}^{m} \left[V(s_j) \cdot V(X_k|s_j)\right]$$

OR(PO*, n) - očekivani rizik optimalne strategije.
OŽ(PO*, n) - očekivano žaljenje optimalne strategije.
OŽ $\boldsymbol{(a_i{}^*/X_k)}$ - očekivano žaljenje najbolje akcije a_i, ako se prethodno dogodi X_k
$\boldsymbol{V(X_k)}$ – verovatnoća pojavljivanja X_k
n – obim uzoraka

- Očekivani rizik optimalne strategije $OR(PO^*,n)$ je moguće učiniti manjim ako se obim uzorka [n] poveća.

Očekivana vrednost informacije uzorka

- Očekivana vrednost informacije uzorka je veličina koja nam ukazuje na prednost pri odlučivanju koju DO ima ako se odluči da pristupi prikupljanju dodatnih informacija.
- Predstavlja razliku između očekovanog žaljenja pre i posle uzorkovanja. Logično je da će očekivano žaljenje posle uzorkovanja biti manje, jer zahvaljujući novim informacijama koje smo prikupili možemo da donesemo kvalitetniju odluku, sa manjim žaljenjem. Dakle, očekivana vrednost informacije uzorka indicira da li postoji bilo kakva korist (dobit) prilikom sticanja informacija iz uzorkovanja. Takođe. obezbeđuje meru koliko tačno treba platiti troškove uzorkovanja.

$$\boldsymbol{OVIU(n) = OVPI - OR(PO^*, n) = OVPI - OŽ(PO^*, n)}$$

***OVIU(n)* -** Očekivana vrednost informacije uzorka
OVPI= OŽ(a_i*) - Očekivano žaljenje najbolje akcije, sa <u>apriori</u> verovatnoćama
OŽ(PO*, n) - Očekivano žaljenje optimalne strategije sa <u>aposteriori</u> verovatnoćama

Očekivana čista dobit od uzorkovanja

- **Očekivana čista dobit od uzorkovanja** predstavlja rezultat dodatne analize u cilju sagledavanja da li će uzorkovanje obezbediti čistu dobit.
- OVIU u svoju veličinu ne uključuje troškove uzorkovanja tj. troškove prikupljanja i analiziranja novih podataka. Zbog toga je logično očekivati da razlika između OVIU i troškova uzorkovanja treba da ukaže da li iz informacije uzorkovanja možemo očekivati čistu dobit.

$$\boldsymbol{OČDU(n) = OVIU(n) - T(n)}$$

OČDU(n) - očekivana čista dobit od uzorkovanja
T(n) - troškovi uzorkovanja sa (n) opservacija

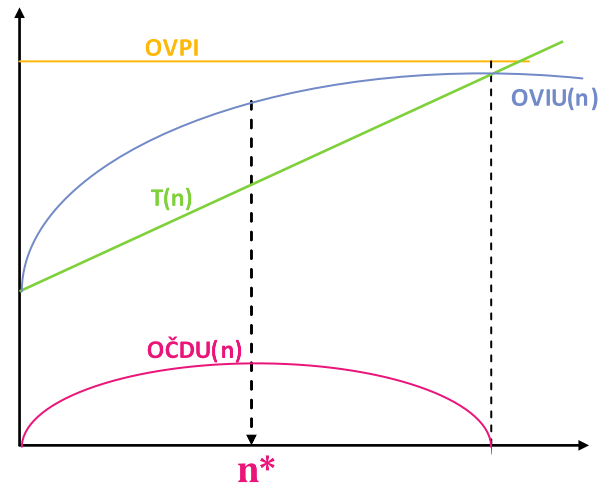
Odluka o preduzimanju uzorkovanja

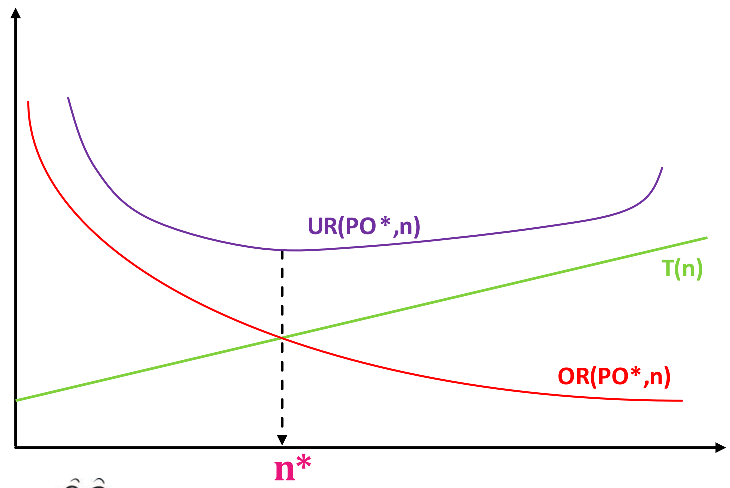
Sada kada imamo sve potrebne podatke možemo da odlučimo da li ćemo uopšte preduzeti uzorkovanje radi dobijanja novih informacija:

- Ako je $\boldsymbol{OČDU(n) \geq 0}$ uzorkovanje je opravdano i poželjno;
- Ako je $\boldsymbol{OČDU(n) < 0}$ uzorkovanje ne treba sprovoditi.

Optimalni plan uzorkovanja

- Optimalni plan uzorkovanja se odnosi na određivanje optimalne veličine uzorka (n).
- Određivanje optimalne veličine uzorka zavisi od OČDU(n). Kao što je već rečeno, uzorkovanje je opravdano kada je OČDU(n) ≥ 0. I sa povećanjem uzorka (n) može se primetiti da OČDU(n) najpre raste, a zatim počinje da opada. **Optimalna veličina uzorak n* se nalazi upravo u tački gde je OČDU(n) maksimalno**, što je i prikazano na sledeće dve slike.





Zašto OČDU(n) prvo raste pa onda opada:

- Kao što znamo *OČDU(n) = OVIU(n) - T(n)*
- S druge strane OVIU(n) = OVPI - OR(OP*,n)

$$\Longrightarrow OČDU(n) = OVPI - OR(OP^{*}, n) - T(n)$$

- Kako je OVPI konstanta (ne zavisi od n), iz dobijene jednačine vidimo da ponašanje krive OČDU(n) zavisi samo od OR(PO*, n) i T(n), čije ponašanje možemo da vidimo na drugoj slici:
  - Kao što možemo videti, OR(PO*,n) opada ako se (n) povećava - što je veći uzorak, tj. što više informacija posedujemo to je očekivani rizik optimalne strategije manji.
  - S druge strane T(n) raste sa porastom (n) - što je veći uzorak, to su naravno veći i troškovi uzorkovanja tj. prikupljanja i obrade informacija.

→ Da bi odredili optimalnu veličinu uzorka moramo naći ravnotežnu tačku između ova dva konfliktna cilja:

- Dodajući OR(PO*,n) na T(n) dobija se ukupni rizik za PO* za datu veličinu uzorka n. Ako se taj ukupni rizik od PO* obeleži sa UR(PO*,n) tada imamo ***UR(PO*,n) = OR(PO*,n) + T(n).***
- Kada n raste, očekivani rizik OR(PO*,n) će opadati, a troškovi uzorkovanja T(n) će rasti. To ukazuje da ukupni rizik UR(PO*,n) u početku opada, a posle izvesne vrednosti (**n***) počinje da raste. U toj tački (**n***), ukupni rizik je minimalan i zbog toga se ta vrednost bira kao *optimalna veličina uzorka*.

3. ANALIZA RIZIKA

Napomena: Analiza rizika će biti objašnjena na problemu evaluacije projekta.

→ Rizik predstavlja mogućnost realizacije neželjene posledice nekog događaja.
→ Rizik podrazumeva dve osnovne komponente:

1. Neželjenji gubitak ili posledicu;
2. Neizvesnost u odigravanju neželjenih posledica.

→ Analiza rizika se bavi neizvenošću koja postoji u posmatranom problemu. Ona obezbeđuje logičku kvantitativnu proceduru u proceni neizvesnosti i evaluaciji projekata.

Kako se primenjuje analiza rizika?

Predpostavimo da vršimo evaluaciju nekog projekta na osnovu profita koji će nam on doneti. Sada možemo da definišemo kritičnu tačku, kao granicu između dobitka i gubitka. Iznad ove tačke projekat ostvaruje profit, a ispod nje dolazi do gubitaka. Pošto je budućnost neizvesna i pošto ne znamo koja će se od ove dve situacije ostvariti, mi određujemo verovatnoću da li će projekat ostvariti dobitak ili gubitak. **Verovatnoća da će se desiti neželjen događaj, odnosno verovatnoća da projekat neće ostvariti profit, predstavlja rizik. Na bazi te verovatnoće se vrši evaluacija projekta** (ukoliko je verovatnoća da će se ostvariti gubitak veća od verovatnoće dobitka, logično je da nećemo nastaviti sa realizacijom projekta, ali opet to zavisi i od preferenci donosioca odluke).

- Neželjeni događaj se ne mora samo definisati na osnovu profita. Neželjeni događaj može biti i prekoračenje troškova, prekoračenje vremena izgradnje, preveliko zagađenje okoline i sl.

5.1. Scenario analize rizika - postupak primene analize rizika

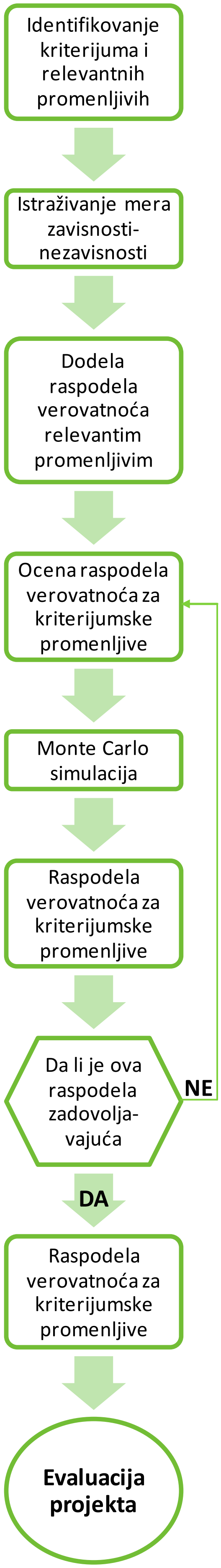
1. Identifikovanje kriterijuma i relavantnih promenljivih

- Primenjujući tehniku analize rizika najpre je potrebno definisati kriterijmsku promenljivu tj. onu na osnovu koje vršimo evaluaciju projekta (već smo napomenuli da to može biti profit, troškovi, zagađenje okoline i slično).
- Koja će se kriterijumska promenljiva koristiti zavisi od vrste projekta koji se posmatra. Ako se radi o lansiranju novog proizvoda logično je da ćemo odluku donositi na osnovu profita. S druge strane, ako se radi o projektu izgradnje saobraćajnice (projekat koji nije namenjen za generisanje profita) odluku ćemo doneti na bazi troškova.

- U većini slučajeva, veći broj faktora utiče na kriterijumsku promenljivu (na profit utiču potražnja za proizvodom, veličina prodaje, troškovi proizvodnje, cena proizvoda, porezi itd.). Zbog toga je potrebno identifikovati i izmeriti sve faktore, koji po pravilu u sebi nose neizvesnost. Zato ih treba posmatrati kao slučajne promenljive.

2. Istraživanje mera zavisnosti - nezavisnosti

- U prethodnom koraku smo ustanovili da kriterijumska promenljiva zavisi od nekoliko nazavisnih promenljivih, između kojih je moguće ustanoviti i funkcionalnu zavisnost tipa $\boldsymbol{Profit} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{potražnja}, \boldsymbol{cena}, \boldsymbol{troškovi}, \boldsymbol{itd}.)$
- Sada treba da odredimo da li su promenljive sa desne strane međusobno zavisne ili ne:
  1. Ukoliko su sve promenljive sa desne strane nezavisne medjusobno (to bi bio idealna slučaj) onda bi korišćenjem njihovih raspodela i raznih statističkih alata, jednostavno mogli da odredimo raspodelu verovatnoću same kriterijumske promenljive.



2. Ukoliko se neke od tih promenljivih međusobno zavisne, određivanje raspodela varovatnoće za kriterijumsku promenljivu je onda znatno teže i zahteva primenu Monte Carlo simulacije.

3. Dodela raspodela verovatnoća relevantnim promenljivim

- Donosilac odluke može koristiti sopstvena ubeđenja i procene prilikom ocenjivanja raspodela verovatnoća, jer je do objektivnih podataka izuzetno teško doći. Moguće je koristiti i procene i mišljenja eksperata iz pojedinih oblasti.
- Korišćenje subjektivnih ulaznih podataka, kao integralnog dela procesa evaluacije je jedna od osobina analize rizika.

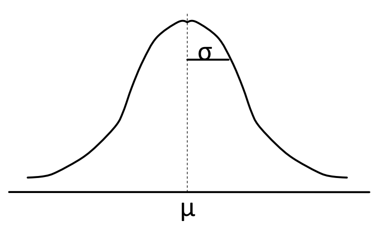
- Međutim, ukoliko raspolažemo objektivnim podacima postoji nekoliko metoda za ocenu raspodela verovatnoća:

1. Direktna metoda

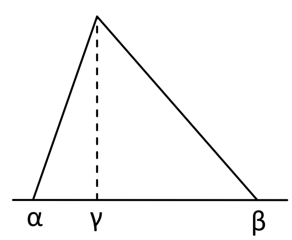
Podrazumeva ocenu pojedinačnih verovatnoća za sve moguće rezultate. Može se koristiti samo ako su raspodele verovatnoća diskretne i ako su rezultati koji se odnose na raspodele konačni.

2. Parametarska metoda

Poznato je da je svaka raspodela verovatnoća okarakterisana izvesnim parametrima. Kada znamo ili kada je moguće proceniti parametre raspodele verovatnoće, tada je i sama raspodela poznata u potpunosti. Npr, normalna raspodela ima dva parametra (srednju vrednost μ i standardnu devijaciju σ), eksponencijalna raspodela ima parametar λ, a uniformna raspodela parametre α i β.



Primer 1 - Ako poznajemo ili možemo proceniti srednju vrednost ekonomske mere povraćaja **μ** i njenu standardnu devijaciju **δ**, možemo u potpunosti opisati stohastičko ponašanje ekonomske mere povraćaja sredstava.



Primer 2 – Ako poznajemo pesimističku, najverovatniju i optimističku procenu troškova konstrukcije, može se oceniti i odgovarajuća „trouglasta" raspodela verovatnoća.

3. Metoda ocene pet tačaka

Ovom metodom se najpre ocenjuje pet vrednosti određene promenljive: najmanja, 25%, 50%, 75% i najveća a potom se određuje odgovarajuća kumulativna raspodela verovatnoća.

4. Delphi metoda

- Metoda za struktuiranje procesa grupnih komunikacija takvih da se proces smatra efektivnim ako omogućava grupi pojedinaca, kao celini da rešava složeni problem.
- Od članova grupe se na prvom sastanku traži da pojedinačno daju mišljenje i razloge za svoju procenu o vrednosti parametara raspodele. Informacija se prikuplja i obrađuje, a ako je postignut konsensus proces se nastavlja. Ako nije kopija obrade se dostavlja svakom pojedincu koji treba da izvrše reviziju svojih procena. Proces se nastavlja kroz više iteracija dok se ne dođe do konsensusa.

4. Ocena raspodela verovatnoća za kriterijumske promenljive

Poznato je da kriterijumska promenljiva zavisi od većeg broja drugih, po pravilu slučajnih promenljivih:

$$\boldsymbol{Profit = f(potražnja, cena, troškovi, itd.)}$$

Tim promenljivim je moguće dodeliti raspodele verovatnoća koristeći neku od prethodno objašnjenih metoda. Sada raspodelu kriterijumske promenljive određujemo na sledeći način:

Promenljive sa desne strane su međusobno nezavisne	1. Normalna, Binomna i Poissonova raspodela poseduju osobinu reproduktivnosti. To znači da ako sve promenljive sa desne strane imaju neku od pomenutih raspodela, onda će i kriterijumska promenljiva imati istu tu raspodelu. 2. Ako sve promenljive sa desne strane imaju eksponencijalnu raspodelu sa parametrom λ, tada će kriterijumska funkcija imati Gama raspodelu sa parametrima λ i n.
Nisu sve promenljive sa desne strane međusobno nezavisne	- Ova situacija je znatno teža za izračunavanje raspodele kriterijumske promenljive - Najčešće se koristi *Monte Carlo simulaciona tehnika* za dobijanje raspodele verovatnoće kriterijumske promenljive.

5. Monte Carlo simulacija

Monte Carlo tehnika je simulaciona tehnika koja koristi nekoliko uzoraka relevantnih promenljivih pri raznim stanjima i kombinuje rezultate radi generisanja raspodele verovatnoće za kriterijumsku promenljivu.
Raspodela koja se dobije mora da bude konzistentna sa uverenjima i procenama donosioca odluke. Kada se ona dobije, donosilac odluke može da koristi punu informaciju koju u sebi nosi raspodela kriterijumske promenljive radi evaluacije projekta.

6. Evaluacija projekta

Nakon izvršenih svih koraka dobili smo raspodelu verovatnoća kriterijumske promenljive. To znači da sada posedujemo informaciju o verovatnoći nastupanja neželjenog događaja tj. informaciju o mogućem riziku. Ukoliko smatramo da je projekat suviše rizičan nećemo nastaviti dalje sa njegovom realizacijom, i obrnuto.

5.2. Tradicionalne metode za evaluaciju projekta

- Ovde ćemo da opišemo neke tradicionalne metode za evaluaciju projekta kako bi kasnije mogli da ih uporedimo za analizom rizika.
- I ovde donosimo odluku na osnovu odabranog kriterijuma (recimo da se opet radi o profitu), koji zavisi od više promenljivih (karakteristika). Samo što ovde rukovodilac projekta procenjuje najverovatnije vrednosti spomenutih promenljivih (na osnovu svog iskustva, znanja, predpostavki..) i onda samo izračuna vrednost kriterijuma (profita) na osnovu koga donosi odluku. Ukoliko je dobijena vrednost profita pozitivna, projekat će biti prihvaćen.

1. ***Konzervativna metoda prilagođavanja***
   Kod ove metode je rukovodilac projekta zabrinut zbog rizika vezanog za sam projekat, pa ne koristi nabolje (najverovatnije) procene promenljivih, već one malo konzervativnije (rigoroznije). Rukovodilac želi da sazna da li će projekat biti prihvatlji i sa ovim konzervativnim procenama.

2. ***Pesimističko-optimistička metoda***
   Kod ove metode se koriste pesimističke, najverovatnije i optimističke procene za sve ili samo neke promenljive koje su relevantne za projekat. Pesimistička procena se odnosi na zbivanje neželjenih posledica, a optimistička se odnosi na zbivanje željenih posledica. To znači da rukovodilac projekta izračunava pesimističku, najverovatniju i optimističku vrednost kriterijuma na osnovu koga donosi konačnu odluku.

3. ***Rizik-popust metoda***
   Podrazumeva korišćenje kamatne stope koja treba da reflektuje stepen rizika koji se odnosi na posmatrani projekat. Što je rizik veći, biće veća i kamatna stopa. Ovde rukovodilac projekta u proračun ubacuje veću kamatnu stopu nego što realno jeste, i posmatra efekte ove promene na vrednost profita od projekta.

4. ***Metoda očekivane novčane vrednosti***
   Krieterijum očekivane novčane vrednosti (ONV) je ranije detaljno objašnjen. Ovde se koristi tako što se odabira projekta sa najvećom očekivanom novčanom vrednošću. Pošto ovakav odabir nije pouzdan i može dovesti do izbora projekta sa neželjenim posledicama, preporučljivo je i uključivanje standardne devijacije (ukoliko nam je ta informacija na raspolaganju) u proces evaluacije projekta.

5. ***Metoda očekivanje-varijansa***
   Procedura metode očekivanje-varijansa podrazumeva uključenje u evaluaciju projekta i očekivane vrednosti i standardne devijacije. Za svaki projekat se računa veličina **V** definisana kao: $\mathbf{V = \mu - A\delta}$ gde su:
      V – vrednost: očekivanje-varijansa,
      μ – očekivana novčana vrednost,
      δ – standardna devijacija,
      A – koeficijent averzije prema riziku, pri čemu je on jedank $A = [k(\mu)]^{½}$, gde je **k** f-ja korisnosti.

   Projekat će biti prihvaćen ako je V≥0, dok je u slučaju izbora izbeđu više projekata najbolji onaj koji ima maksimalnu vrednost za V.

5.3. Prednosti i mane analize rizika

Prednosti:
Primena analize rizika obezbeđuje:
1. Korišćenje procenjenih raspodela svih relevantnih promenjivih koje utiču na kriterijumsku promenljivu, određivanje raspodele verovatnoće te iste kriterijumske promenljive i mogućnosti primene pune informacije sadržane u raspodeli u cilju evaluacije projekta. Zbog toga je za evaluaciju projekta analiza rizka mnogo pogodnija nego metode koje evaluacioni proces baziraju samo na pojedinačnim ocenama.
2. Efektivan način uklapanja subjektivnih ulaza u proces analize.
3. Okvir za identifikovanje faktora koji utiču na projekat.
4. Efikasnu komunikaciju između više ljudi (uključenih u evaluaciju projekta) koje moraju međusobno sarađivati u procesu procenjivanja raspodela verovatnoća.

Mane: Sama evaluacija projekta se vrši na osnovu raspodele verovatnoće kriterijumske promenljive, koje smo dobili putem analize rizka. Donosilac odluke ne razmatra određene posledice projekta eksplicitno na formalan način. On može imati svoje preference za neke posledice, ali ih ne procenjuje na osnovu funkcija preferenci ili funkcija korisnosti. Zbog toga ih ne može uključiti u analizu i evaluaciju projekta.

4. TEORIJA KORISNOSTI

Oslanjanje isključivo na statistiku može biti nepogodno jer se neće uvek dobiti prihvatljivi rezultati. Donosilac odluke, bazirajući svoje odluke samo na statistici, može biti podstaknut da napravi izbore koji nisu u skladu sa njegovim psihološkim perferencama i odnosom prema riziku.

Donošenje odluke je završni čin procesa odlučivanja i njime se verifikuje sav obavljeni pripremni posao. To je posao koji izvršava sam donosilac odluke i koji je iz tog razloga opterećen dozom subjektivizma. Naime, različite ličnosti suočene sa situacijama vršenja izbora mogu različito reagovati iz više razloga, a neki od njih su:

1. Davanje prednosti nekoj alternativi može zavisiti isključivo od ukusa pojedinca;
2. Razne ličnosti mogu različito proceniti verovatnoću nastupanja događaja;
3. Ono što je za jednu osobu velika dobit ili veliki gubitak, za drugu može značiti samo malenkost.

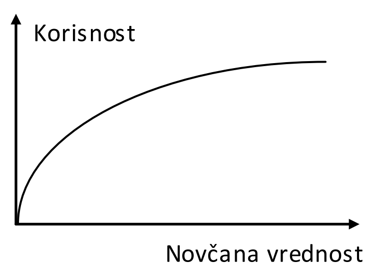
Šta je korisnost:
Predstavlja numerički iskaz ukusa ili preferenci donosioca odluke prema određenim vrednostima, koja se formira u situacijama suočavanja DO sa rizikom.

4.1. Funkcija korisnosti

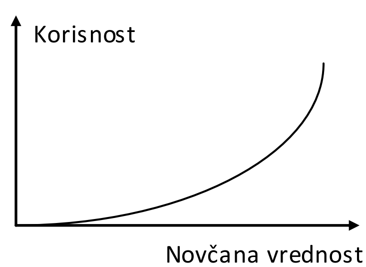
Funkcija korisnosti - karakteriše stav donosioca odluke prema problemu donošenja odluke pri riziku i neizvesnosti.

Oblici funkcije korisnosti

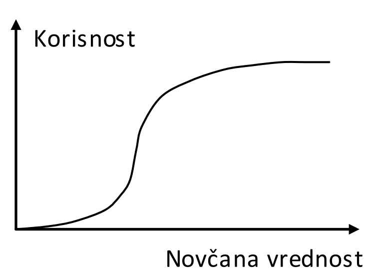
1. Kada je f-ja korisnosti donosioca odluke *konkavnog oblika*, onda je reč o osobi sa averzijom prema riziku.



2. Kada je f-ja korisnosti donosioca odluke *konveksnog oblika*, onda je reč o osobi koja rado ulazi u rizik, odnosno o osobini sklonosti ka riziku.



3. Postoji situacija kada je donosilac odluke sklon riziku pri manjim novčanim iznosima, ali se potom ponaša saglasno averziji prema riziku.



4.2. Matematičke funkcije u teoriji korisnosti

U realnim problemima odlučivanja čest je slučaj da krive koje predstavljaju funkcije korisnosti podležu nekoj matematičkoj zakonitosti, što je vrlo korisna osobina, zbog povećane preciznosti koja se tom prilikom ostvaruje. Matematičke krive, koje se najčešće javljaju u praksi, su eksponencijalna, kvadratna i naročito logaritamska funkcija.

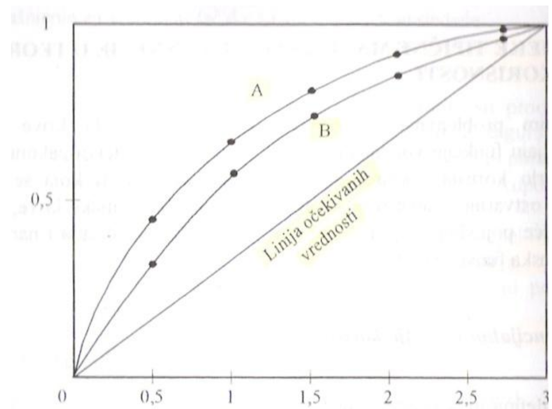
→ *Eksponencijalna funkcija korisnosti*

$$\boldsymbol{K(x) = 1 - e^{-kx}} \quad \text{ili} \quad \boldsymbol{K(x) = \frac{1}{k}(1 - e^{-kx})}$$

gde su:
x – dimenzija vrednosti
k – pozitivna const.
e = 2,71828

Averzija prema riziku: $\boldsymbol{AV = \frac{-K''(x)}{K'(x)}}$

gde su:
K'(x) i **K''(x)** - prvi i drugi izvod funkcije korisnosti

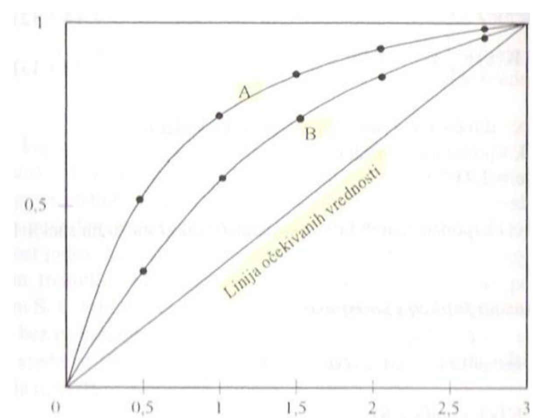


→ *Logaritamska funkcija korisnosti*

$$\boldsymbol{K(x) = \log(x + b)}$$

gde su:
x – dimenzija vrednosti
b – const.

$$AV = \frac{1}{x + b}$$

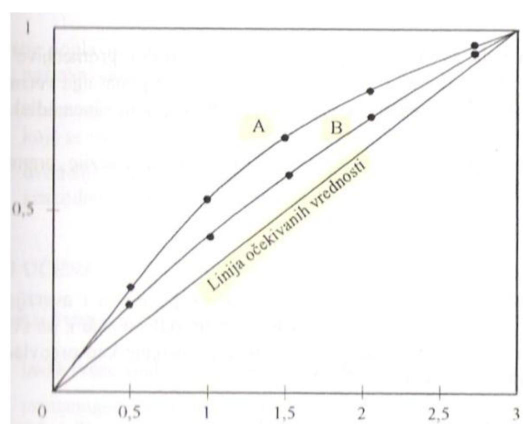


→ *Kvadratna funkcija korisnosti*

K(x) = a + bx – cx²

gde su:
x – dimenzija vrednosti
a,b,c – const. pri čemu je c>0

$$AV = \frac{2c}{b - 2cx}$$

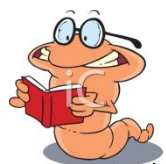


4.2. Višeatributivna teorija korisnosti

Atribut - sredstvo merenja (evaluacije) nivoa dostizanja nekog kriterijuma, odnosno cilja.

Donošenje odluka u prisustvu višestrukih, obično protivrečnih kriterijuma, podrazumeva pristup tzv. višekriterijumskog odlučivanja. Jedan specifičan deo višekriterijumskog odlučivanja čini višeatributivna teorija korisnosti koja će ovde biti objašnjena.

- S obzirom na kompleksnost višeatributivne funkcije korisnosti, cilj dosadašnjeg teorijskog rada u ovoj oblasti je usmeren ka istraživanju mogućnosti pojednostavljenja procedure za njenu procenu. Osnove ovog teorijskog istraživanja su:
    1. Modeli dekompozicije koristi
    2. Viševalentne strukture preferenci
    3. Analiza merenja indiferentnosti
    4. Mere rizika
    5. Nelinearna korisnost vremenskih preferenci grupnih odluka.



Model dekompozicije korisnosti

- Cilj ovog modela je da ustanovi aksiome nezavisnih atributa, koji bi dali izvesne funkcionalne forme.
- Postoji više modela dekompozicije.

1. Aditivna tj. zbirna dekompozicija korisnosti

$$K(A_1, \dots, A_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot K_i(A_i)$$

gde je:

$K_i(A_i)$ - marginalna funkcija korisnosti definisana za atribut A_i

c_i - koeficijent koji garantuje konzistentnost merenja preko atributa.

2. Multiplikativna dekompozicija korisnosti

$$K(A_1, \dots, A_n) = a + \prod_{i=1}^{n} c_i \cdot K_i(A_i)$$

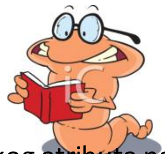
gde je:

a – const. koja zavisi od koeficijenata $c_1, c_2, \dots, c_n$.

3. Multilinearna dekompozicija korisnosti

Polazi od pretpostavke da je za svako i=1,2,...,n atribut A_i nezavisno koristan od ostalih atributa.

Viševalentne strukture preferenci



- Ovaj pristup se zasniva na podeli svakog atributa na klase, na osnovu ekvivalentnih, uslovnih nizova preferenci.

Analiza merenja indiferentnosti

- Nešto bolje rezultate od dekompozicije korisnosti i viševalentne strukture preferenci daje analiza merenja indiferentnosti, koja definiše funkcionalni prikaz celog prostora ishoda i traži procenu samo jednoatributivnih marginalnih funkcija korisnost.

4.3. Struktura funkcije korisnosti

- U analizi višeatributivnih problema, značajni problem je utvrditi da li je korisnost svakog atributa nezavisna od vrednosti ostalih atributa. Ako jeste, tada je problem procene korisnosti znatno lakši.
- Promenljiva A_1 je nezavisna u odnosu na A_2, ako relativne preference od A_1 nisu zavisne od vrednosti za A_2.
- Nezavisnost između A_1 i A_2 može biti jednosmerna ili recipročna. Jedmosmerna nezavisnost je slučaj kada je korisnost jedne promenljive nezavisna od vrednosti druge, ali je korisnost druge zavisna od prve.

4.4. Metod višeatributivne korisnosti sa aditivnom formom

$$\boldsymbol{K}_i[\boldsymbol{A}_1, \dots, \boldsymbol{A}_n] = \boldsymbol{KK}[\boldsymbol{a}_i] = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{t}_j \boldsymbol{K}_i\left[\boldsymbol{A}_j\right]_i \qquad i = 1,2,\dots,n$$

gde su:
$\boldsymbol{KK}[\boldsymbol{a}_i]$ - kompozitna(aditivna) korisnost i-te akcije;
$\boldsymbol{t}_j$ - težina (značaj) j-tog atributa;
$\boldsymbol{K}_i\left[\boldsymbol{A}_j\right]_i$ - pojedinačna korisnost kombinacije i-te akcije i j-tog atributa.

Koraci:

1. Definisanje cilja problema;
2. Definisanje skupa atributa;
3. Rangiranje atributa;
4. Dodeljivanje težina pojedinim atributima;
5. Normalizovanje težina (ako je potrebno);
6. Definisanje graničnih vrednosti (ograničenja) za sve atribute;
7. Definisanje krivih korisnosti za svaki atribut;
8. Enumeracija performansi atributa za svaku posmatranu akciju - kreiranje matrice performansi atibuta, u kojoj vidimo stepen zadovoljenja ograničenja (definisanih u koraku 6) za svaki atribut;
9. Pretvaranje vrednosti performansi atributa (iz koraka 8) u odgovarajuće korisnosti za akcije koje nisu eliminisane na osnovu narušavanja ograničenja iz koraka 6;
10. Računanje kompozitne korisnosti za svaku alternativu;
11. Biranje alternative sa maksimalnom kompozitnom sigurnošću.

5. FUZZY (ČUPAVI) SISTEMI

- Teorija Fuzzy skupova predstavlja pogodan matematički aparat za modeliranje različitih procesa u kojima dominira neizvesnost, višeznačnost, subjektivnost, neodređenost. Prvi rad posvećen fuzzy skupovima objavio je **1965.** američki profesor ***Lotfi Zadeh***.
- Teorija fuzzy skupova omogućava tretiranje onih nedovoljno preciznih, tačnih, kompletnih pojava koje se ne mogu modelirati samo teorijom verovatnoće ili intervalnom matematikom.
- Kada neodređenost potiče od nepreciznosti u komunikacij među ljudima ovakve se neodređenosti modeliraju teorijom fuzzy skupova.

5.1. Osnovni pojmovi iz teorije čupavih skupova

- Za razliku od klasične teorije skupova, koja veoma precizno definiše granicu koja razdvaja elemente koji pripadaju određenom skupu od elemenata koji mu ne pripadaju, teorija fuzzy skupova nedovoljno dobro definiše granicu razdvajnja.

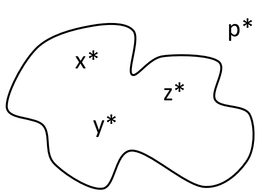
Definicija fuzzy skupa

- **Fuzzy skup A** se definiše kao skup uređenih parova **{X, μA(x)}**, gde je:
  X - konačan skup **$X=x_1+x_2+...+x_n$** (+ označava uniju elemenata, a ne sabiranje),
  μA(x) - funkcija pripadnosti (stepen pripadnosti elementa **x** skupu **A**).

- Pripadnost elemenata **x** skupu **A** se u teoriji fuzzy skupova opisuje funkcijom pripadnosti **μA(x)** na sledeći način:

$$\mu A(x) = \begin{cases} 1, \mathit{ako\ i\ samo\ ako\ x\ pripada\ } \boldsymbol{A} \\ 0, \mathit{ako\ i\ samo\ ako\ x\ ne\ pripada\ } \boldsymbol{A} \end{cases}$$

- Funkcija koja $\mu A(x)$ može uzeti bilo koju vrednost iz intervala [0,1]. Ukoliko je $\mu A(x)$ veće, utoliko ima više istine u tvrđenju da **x** pripada skupu **A**.



Skup A i elementi x, y, z i p

Na slici se može se videti da je **μA(x) = 1, μA(y) = 1, μA(z) = 1 i μA(p) = 0**

- Kada je skup X konačan skup (kao u polaznoj predpostavci), fuzzy skup A definisan na njemu se prikazuje u obliku:

$$\boldsymbol{A} = \mu A(x_1)/x_1 + \mu A(x_2)/x_2 + \ldots + \mu A(x_n)/x_n = \sum_{i=1}^{n} [\mu A(x_i)/x_i]$$

- U slučaju da X nije konačan skup, fuzzy skup se definiše kao:

$$\boldsymbol{A} = \int x\, [\mu A(x)/x]\, dx$$

Osnovne osobine fuzzy skupova

1. Jednakost fuzzy skupova
   Fuzzy skupovi A i B**,** definisani na skupu X, su jednaki (A=B) akko za svako $x \in X$ važi $\mu\boldsymbol{A}(x) = \mu B(x)$
2. Podskup fuzzy skupova
   Fuzzy skup A je podskup fuzzy skupa B $(A \subset B)$ akko za svako $x \in X$ važi $\mu\boldsymbol{A}(x) \leq \mu B(x)$
3. Visina fuzzy skupa
   Predstavlja najveću vrednost stepena pripadnosti $\mu\boldsymbol{A}(x)$.
4. Normalizovan fuzzy skup
   Ima stepen pripadnosti bar jednog svog elementa jednak 1, tj. visina tog fuzzy skupa je jednaka 1.
5. Komplementnost fuzzy skupa
   Komplement fuzzy skupa A je fuzzy skup Ā, takav da je $\mu\bar{\boldsymbol{A}}(x) = 1 - \mu\boldsymbol{A}(x)$.
6. Konveksnost fuzzy skupa
   Fuzzy skup A je konveksan akko važi $\boldsymbol{\mu A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \mu A(x_1) \wedge \mu A(x_2)}$, za svako $x_1, x_2 \in X$, i za svako $\lambda \in [0,1]$

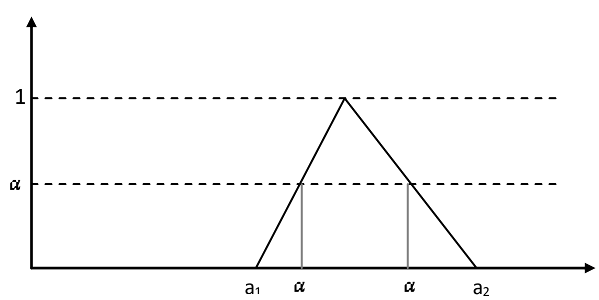
Operacije nad fuzzy skupovima

- Presek fuzzy skupova A i B je najveći fuzzy skup koji se istovremeno sadrži u A i B tj.
  $\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$
- Unija fuzzy skupova A i B je najmanji fuzzy skup koji istovremeno sadrži i A i B tj.
  $\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$
- Dekartov proizvod fuzzy skupova A_1, A_2, ..., A_i definisanih na skupovima X_1, X_2, ..., X_i respektivno, je fuzzy skup koji se označava kao A_1*A_2, ...*A_i, sa funkcijom pripadnosti:
  $\mu_{A_1^*A_2^* \ldots ^*A_n}(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \mu A_1(X_1) \wedge \mu A_2(X_2) \wedge \ldots \wedge \mu A_n(X_n)$

Fuzzy relacija: Fuzzy skup definisan na **A*B**, pri čemu uređeni parovi **(a,b)** pripadaju tom skupu sa stepenom pripadnosti koji se nalazi u intervalu od 0 do 1 pradstavlja ***fuzzy relaciju*** između skupova **A i B.**

5.2. Fuzzy broj

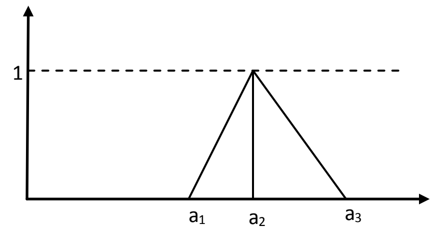
- Fuzzy broj predstavlja normalizovan i konveksan **fuzzy skup** koji karakteriše *interval poverenja* [a_1, a_2] i *stepen sigurnosti α* (*α* može biti u intervalu [0,1]).



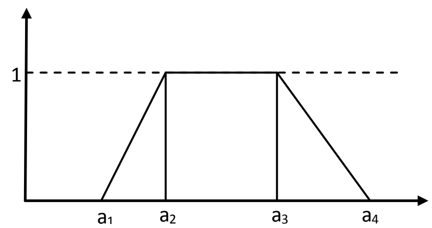
Osnovni oblici fuzzy broja

1. Trouglasti fuzzy broj je uslovljen oblikom funkcije pripadnosti i definisan je oblikom **A = (a_1, a_2, a_3)**, gde su:

a_1 – donja (leva) granica fuzzy broja.
a_2 – vrednost fuzzy broja sa najvećim stepenom pripadnosti i
a_3 – gornja (desna) granica fuzzy broja.



2. Trapezoidni fuzzy broj je definisan oblikom **A = (a_1, a_2, a_3, a_4)**, sa oblikom prikazanim na slici



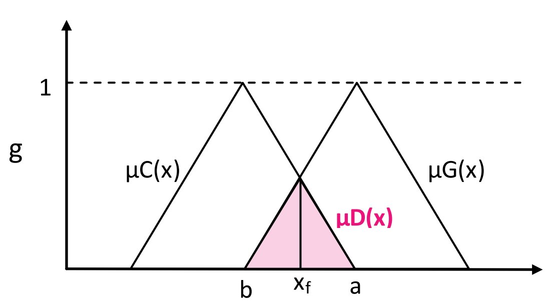
- Nad fuzzy brojevima su definisane i osnovne operacije: sabiranje, oduzimanje, množenje i deljenje, tako da za rasplinute brojeve sa stepenom sigurnosti α: $X\alpha = [x_1\alpha, x_2\alpha]$ i $Y\alpha = [y_1\alpha, y_2\alpha]$, važi:

$X\alpha(\bullet)Y\alpha = [x_1\alpha(\bullet)y_1\alpha, x_2\alpha(\bullet)y_2\alpha]$ gde je $(\bullet) \in \{+, -, \cdot, \div\}$

5.3. Fuzzy matametičko programiranje

- Predpostavimo da u nekom optimizacionom problemu postoji jedna ili više kriterijumskih funkcija.
- Označimo sa G fuzzy skup definisanosti skupa kriterijumskih funkcija, a sa C fuzzy skup definisanosti skupa ograničenja. Neka su fuzzy skupovi G i C definisani na skupu X.

- Rešenje datog problema je fuzzy skup D koji istovremeno zadovoljava i skup kriterijumskih funkcija i skup ograničenja tj. predstavlja presek skupova G i C (vidi sliku).
- Funkcija pripadnosti skupa D glasi $\mu D(x) = \min\{\mu G(x), \mu C(x)\}$.



- Neka je definisana funkcija cilja iskazana težnjom da se želi postići da „x bude znatno veće od b“. Zbog skupa ograničenja sa druge strane more da bude ispunjen uslov da „x treba da bude manje od a“. Podsetimo se da je cilj okarakterisan fuzzy skupom G, a ograničenje fuzzy skupom C.
- Finalno rešenje treba tražiti iz skupa D, i skup finalnih rešenja je definisan sledećim oblikom:

$$A_f = \{x_f | \mu D(x_f) > \mu D(x)\}, \forall x \in X$$

5.4. Fuzzy linearno programiranje

- Prilikom rešavanja primera fuzzy linearnog programiranja (LP), mogući su sledeći slučajevi:
  1. Kada su fuzzy brojevi slobodni članovi u ograničenjima
  2. Kada su fuzzy brojevi koeficijenti u ograničenjima
  3. Kada su fuzzy brojevi koeficijenti u funkciji cilja (kriterijuma).

- Zadaci koje ćemo ovde obraditi se poklapaju zadacima Linearnog programiranja koje smo radili iz Operacionih Istraživanja. Jedina razlika je što se ovde u okviru ograničenja ili funkcije cilja javljaju fuzzy brojevi, što ceo postupak rešavanja zadataka Linearnog programiranja čini malo komplikovanijim.
- Kao i kod operacionih istraživanja i ovde ćemo imati **dopustivo** i **optimalno rešenje**, samo što će ovde ta rešenja predstavljati fuzzy skupove: „*dopustivo fuzzy rešenje*“ i „*optimalno fuzzy rešenje*“.

Zadatak fuzzy LP kada se fuzzy brojevi pojavljuju kao slobodni članovi u ograničenjima

Postavka zadatka: Treba odrediti $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tako da se makzimzira funkcija cilja:

$$Z = F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

p.o.

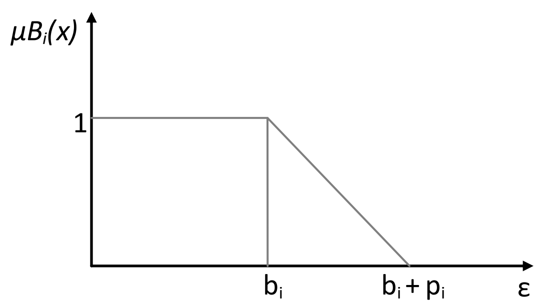
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq \boldsymbol{b_i}, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n$$

Korak 1: Odrediti funkcije pripadnosti fuzzy brojevima za svako ograničenje

Kao što vidimo u ovom zadatku se fuzzy brojevi $\boldsymbol{b_i}$ nalaze sa desne strane ograničenja, i kao prvi korak treba da odredimo funkcije pripadnosti ovim fuzzy brojevima za svako ograničenje. Fuzzy broj koji bi odgovarao slobodnom članu ograničenja $\boldsymbol{b_i}$ se može izraziti kao fuzzy skup „*manje od približno b_i*“, odnosno **funkcija pripadnosti fuzzy broju ograničenja** ima sledeći oblik i izgled:

$$\mu Bi = \begin{cases} 1, & \varepsilon \leq b_i \\ \dfrac{b_i + p_i - \varepsilon}{p_i}, & b_i < \varepsilon \leq b_i + p_i \\ 0, & b_i + p_i < \varepsilon < \infty \end{cases}$$



Korak 2: Odrediti dopustivo rešnje

Za proizvoljno rešenje $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mogu se izračunati vrednosti sa leve strane u sistemu ograničenja, i to na sledeći način:

$$\boldsymbol{\varepsilon_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \qquad i = 1, \ldots, m}$$

Zatim je moguće izračunati stepen zadovoljenja i-tog ograničenja koji odgovara rešenju x, kao funkciju pripadnosti fuzzy skupu „*manje od približno b_i*“, $\boldsymbol{\mu_i(x) = \mu_{Bi}(\varepsilon_i)}$.

Na taj način je na Dekartovom proizvodu R^n definisan fuzzy skup *d* koji odgovara stepenu zadovoljenja i-tog ograničenja.

$$d_i = \{(x, \mu_i(x)) | x \in R^n, 0 \le \mu_i(x) \le 1\}$$

Dopustivo rešenje celog problema je fuzzy skup u kome se funkcija pripadnosti računa na osnovu stepena zadovoljenja pojedinačnih ograničenja. To je skup D koji predstavlja presek svih fuzzy skupova *„manje od približno* b_i*“*.

$$D = \bigcap_{i=1}^{m} d_i$$

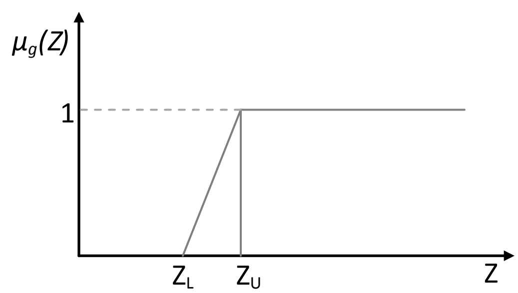
$$D = \{(x, \mu_{di}(x)) | x \in R^n, \mu_{di} = min[\mu_1(x), \dots, \mu_m(x)]\}$$

Korak 3: Odrediti optimalno rešenje

- Da bi sada odredili optimalno rešenje, odnosno stepen pripadanja dopustivog rešenja **x** fuzzy skupu optimalno rešenje, potrebno je izračunati najveću (Z_U) i najmanju (Z_L) vrednost kriterijumske funkcije Z.
- Gornja granica Z_U se dobija kada se reši klasičan zadatak LP u kome se na desnim stranama ograničenja umesto fuzzy brojeva $\boldsymbol{b_i}$ nalaze njihove najveće dozvoljene vrednosti $\boldsymbol{b_i + p_i}$.
- Donja granica Z_L se dobija kada se reši klasičan zadatak LP u kome se na desnim stranama ograničenja nalaze vrednosti $\boldsymbol{b_i}$.

- Sada možemo da odredimo funkciju pripadnosti skupu „optimalno fuzzy rešenje“, koja ima sledeći oblik:

$$\mu_g(z) = \begin{cases} 1, & z_u \le z \\ \dfrac{z - z_u}{z_u - z_l}, & z_l < z \le z_u \\ 0, & z < z_l \end{cases}$$



Napomena: Definisana funkcija cilja je oblika ***z = cx***, pa je onda $\boldsymbol{\mu_g(z) = \mu_g(x)}$.

Korak 4: Odrediti konačno rešenje

Konačno rešenje ovog zadatka je ono koje je u navećoj meri dopustivo i optimalno, tj. ono koje ima najveću moguću pripadnost preseku fuzzy skupova dopustivo i optimalno rešenje. Praktično, treba da nadjemo x tako da sledeća funkcija bude maksimalna:

$$\lambda = \mu_d(x) \cap \mu_g(x)$$

Korak 5: Formulisati klasičan zadatak linearnog programiranja

Ovaj ceo zadatak fuzzy linearnog programiranja, sada možemo da formulišemo kao klasičan LP zadatak na sledeći način:

$$max \lambda$$

p.o.

$$z_l \le \lambda(z_u - z_l) + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le z_u$$

$$\lambda p_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i + p_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$\lambda \ge 0$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, n$$

Zadatak fuzzy LP kada se fuzzy brojevi pojavljuju kao koeficijenti u ograničenjima

U ovom tipu zadatka, za koeficijente u ograničenjima (A) i za slobodne članove ograničenja (B) se kroiste trouglasti fuzzy brojevi definsani sa tri tačke:

$A=(l_{ij}, s_{ij}, d_{ij})$ - fuzzy broj koji predstavlja koeficijente
$B=(p_i, q_i, r_i)$ - fuzzy broj koji predstavlja slobodne članove

Postavka zadatka: Treba odrediti $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tako da zadovoljava funkciju cilja:

$$\max f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

p.o.

$$\sum_{j=1}^{n} (l_{ij}, s_{ij}, d_{ij}) x_j \leq (p_i, q_i, r_i) \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

Podsetimo se ranije iznetog stava o poređenju fuzzy brojeva:

- Ako su A i B fuzzy brojevi onda je A ≤ B ako i samo ako je $\boldsymbol{l_{ij}} \leq \boldsymbol{p_i} \wedge \boldsymbol{s_{ij}} \leq \boldsymbol{q_i} \wedge \boldsymbol{d_{ij}} \leq \boldsymbol{r_i}$.

Kako su u ovom zadatku i leva i desna strana ograničenja fuzzy brojevi, korišćenjem pravila množenja fuzzy brojeva konstantom i stav o poređenju trouglastih fuzzy brojeva, ovaj zadatak se direktno transformiše u standardni LP u kome treba odrediti $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tako da:

$$\max f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

p.o.

$$\sum_{j=1}^{n} l_{ij} x_j \leq p_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^{n} s_{ij} x_j \leq q_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_j \leq r_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

Zadatak fuzzy LP kada se fuzzy brojevi pojavljuju kao koeficijenti u funkciji cilja

Za definisanje koeficijenata u funkciji cilja fuzzy modela, najčešće se koristi trapezoidni fuzzy broj koji se opisuje sa četiri tačke $\boldsymbol{C_j = (c_{jl}, c_{j1}, c_{j2}, c_{jd})}$.

Postavka zadatka: Treba odrediti $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tako da se makzimzira funkcija cilja:

$$max\, F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

p.o.

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n$$

Korak 1:

Oblik konačne vrednosti funkcije cilja, imajući u vidu da su njeni koeficijenti trapezoidni, biće takođe trapezoidni fuzzy broj:

$$maxF(x) = \left(\sum_{j=1}^{n} c_{jl} x_j, \sum_{j=1}^{n} c_{j1} x_j, \sum_{j=1}^{n} c_{j2} x_j, \sum_{j=1}^{n} c_{jd} x_j \right)$$

p.o.

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n$$

Korak 2:

Definisani jednokriterijumski model se prevodi u **višekriterijumski model** (ograničenja ostaju ista) prevashodno zbog tačaka koje su opisale trapezoidni fuzzy broj. Ovakav model se rešava nekom od metoda višeciljnog odlučivanja. Predlaže se **Metoda težinskih koeficijenata** koja zahteva aktivno učestvovanje DO u proceduri rešavanja problema i definisanja vektora preferenci po svakoj kriterijumskoj funkciji, pa opšti model ima sledeći oblik:

$$maxF(x) = \left(w_1 \sum_{j=1}^{n} c_{jl} x_j, w_2 \sum_{j=1}^{n} c_{j1} x_j, w_3 \sum_{j=1}^{n} c_{j2} x_j, w_4 \sum_{j=1}^{n} c_{jd} x_j \right)$$

5.5. Fuzzy logika

Fuzzy logika kao osnova fuzzy sistema omogućuje donošenje odluka na osnovu nepotpunih informacija, a modeli zasnovani na *fuzzy logici* se sastoje od tzv. ***IF-THEN*** pravila.

Ulazne promenljive u fuzzy sisteme predstavljaju tzv. lingvističke promenljive („mali broj ljudi u redu“, „dugo vreme čekanja“, „visoka cena“ itd.). Izlazni rezultat se daje u kontinulanoj formi. Svim mogućim vrednostima izlazne promenljive se pridružuje odgovarajući stepen pripadnosti. Na osnovu stepena pripadnosti pojedinih vrednosti izlazne promenljive vrši se „defazifikacija“ tj. izbor jedne vrednosti izlazne promenljive.

Fuzzy logika se najčešće koristi za modeliranje složenih sistema u kojima je primenom drugih metoda veoma teško utvrditi međuzavisnosti koje postoje između pojedinih promenljivih u modelu.

Primer: IF-THEN pravilo
IF vrednost promenljive **x** VELIKA
THEN vrednost promenljive **y** MALA

5.6. Grubi skupovi

Koncept gurbih skupova se zasniva na predpostavci da se svaki objekat opisuje pomoću svojih podataka. I ako više objekata možemo opisati pomoću istih podataka, onda su oni **nerazberivi** tj. međusobno slični, nerazdvojivi, ekvivalentni. Relacija nerazberivosti predstavlja matematičku osnovu teorije grubih skupova.

Predpostavimo da se poseduju osnovne informacije o objektima Univerzuma. Na osnovu ovih informacija se formiraju relacije nerazberivosti nad objektima Univerzuma. Bilo koji skup nerazberivih objekata se naziva elementarni skup, a bilo koji skup elementarnih skupova formira **ili precizan ili grubi skup**.

Dakle, **grubi skup** predstavlja skup objekata, kao delova **Univerzuma**, povezanih relacijama nerazberivosti (označavaju se sa „I"). Ovde je bitno naglasiti da se svaki grubi skup ima svoje **granične elemente**, tj. one objekte Univerzuma koji ne mogu sa sigurnošću da se klasifikuju kao članovi skupa ili njegovog komplementa.
Takođe, svaki grubi skup se karakteriše parom preciznih skupova nazvanih **donja i gornja aproksimacija**. Donja aproksimacija sadrži sve objekte koji sigurno pripadaju skupu, a gornja aproksimacija sadrži sve objekte koji verovatno pripadaju skupu, tj. za koje se ne može sa sigurnošću reći da li pripadaju skupu ili ne (granični elementi).

Osnovne operacije teorije grubih skupova

- Dve osnovne operacije grubih skupova su donja i gornja aproksimacija, gde je U konačan skup objekata nazvan Univerzum, a **x** je podskup **U**:

$$\begin{array}{ll} \textit{Gornja aproksimacija} & I^*(X) = \{x \in \boldsymbol{U}\colon\ I(x) \cap X \neq 0\} \\ \textit{Donja aproksimacija} & I_*(X) = \{x \in \boldsymbol{U}\colon\ I(x) \subseteq X\} \end{array}$$

- Razlika između gornje i donje aproksimacije je granična oblast grubog skupa $BN_I(X)$. Ako je granična oblast prazan skup ($BN_I(X)=0$), onda X predstavlja precizan skup, a ako granična oblast nije prazan skup, X predstavlja grubi skup.
- Možemo zaključiti da što je granična oblast skupa veća, to je skup više grub.

→ Neke od osobina navedenih aproksimacija:

1. $I_*(X) \subseteq X \subseteq I^*(X)$
2. $I_*(\emptyset) = I^*(\emptyset) = \emptyset,\ \ I_*(U) = I^*(U) = U$
3. $I_*(X \cap Y) = I_*(X) \cap I_*(Y)$
4. $I^*(X \cap Y) = I^*(X) \cap I^*(Y)$
5. Ako je $X \subseteq Y$ onda je $I_*(X) \subseteq I_*(Y)$, i $I^*(X) \subseteq I^*(Y)$
6. $I^*(-X) = -I_*(X)$
7. $I_*(-X) = -I^*(X)$
8. $I_*(I_*(X)) = I^*(I_*(X)) = I_*(X)$
9. $I^*(I^*(X)) = I_*(I^*(X)) = I^*(X)$

Funkcija grube pripadnosti

Kao što je već rečeno, za granične elemente jednog grubog skupa se ne može sa sigurnošću reći da li pripadaju tom skupu ili ne. Funkcija grube pripadnosti predstavlja koeficijent koji izražava pripadanje graničnog elemenata **x** grubom skupu.

F-ja grube pripadnosti se može definisati preko relacije nerazberivosti **I** i ima sledeći oblik:

$$\mu_X^I(X) = |X \cap I(X)|/|I(X)|$$

Funkcija grube pripadnosti može uzeti vrednosti iz skupa (0,1) na sledeći način:

- Ako je $\mu_X^I(X)$<1, skup **X** je grub prema **I** za svako $x \in X$
- Ako je $\mu_X^I(X)$=1, skup **X** je jezgrovit (precizan) prema **I** za svako $x \in X$ **.**

Redukcija znanja i zavisnosti

- Da bi se izvršila pravilna klasifikacija posmatranih objekata u određene skupove, obično se koristi više informacija (atributa) tako da se ne posmatra samo jedna već čitava familija relacija ekvivalencije $I = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ nad Univerzumom.
- Teoretski posmatrano, presek skupova relacije ekvivalencije $I_1, I_2, \dots, I_n$ je takođe relacija ekvivalencije $\cap \boldsymbol{I} = \cap_{i=1}^{n} \boldsymbol{I_i}$.

- Sada se postavlja pitanje da li je moguće da se izbace neki atributi po kojim klasifikujemo objekte a da se ne naruši nerazberivost? To je ne samo moguće, već i poželjno! Pa tako, najmanji podskup $\boldsymbol{I'}$ skupa $\boldsymbol{I}$ takav da važi $\cap \boldsymbol{I} = \cap \boldsymbol{I}'$ se naziva **redukcija.**

Faktor verodostojnosti

Računa verodostojnost svake moguće odluke predložene nekim pravilom. Faktor verodostojnosti se može definisati preko f-je pripadnosti ($\mu_X^I(X)$).

Ako **δ(x)** označava pravilo odlučivanja pridruženo objektu x, faktor verodostojnosti se piše na sl. način:

$$C(\delta(x)) = \begin{cases} 1, & za\ \eta_x^i(x) = 0\ ili\ 1 \\ \eta_x^i(x), & za\ 0 < \eta_x^i(x) < 1 \end{cases}$$

- Za svako *konzistentno* pravilo vrednost faktora verodostojnosti će biti **1**.
- Za svako *ne konzistentno* pravilo vrednost faktora verodostojnosti će biti između **0 i 1**.
- Što je vrednost faktora verodostojnosti **bliža jedinici** to je pravilo **verodostojnije**.