Teorija igara

1. **Elementi koji odredjuju igru:**
   Igru definisu:
   -igraci koji predstavljaju strane u konfliktu;
   -dobitak(gubitak) koji predstavlja rezultat igre;
   -skup *strategija* (alternativa,poteza) koji predstavljaju ponasanje svakog igraca;

2. **Klasifikacija igara**
   a. Po broju igraca igre mogu biti: *igre dva igraca* i *igre vise igraca*;
   b. U odnosu na broj raspolozivih strategija: *konacne* i *beskonacne igre;*
   c. Ukoliko je rezultat takav da je dobitak jednog igraca istovremeno i gubitak drugog: *igre nulte sume;*

3. **Pretpostavke koje moraju biti ispunjene da bi se situacija mogla posmatrati kao matricna igra**
   Igra mora biti igra nulte sume sa konacnim brojem strategija;
   U njoj moraju ucestvovati 2 igraca.
   Igraci istovremeno povlace svoje poteze, ne znajuci potez drugog igraca(*normalna forma*);
   Koncept racionalnog ponasanja igraca (svaki pojedinac tezi da maksimizira svoju dobit) ;

4. **Osnovni uzroci neizvesnosti igre**
   a. Kombinatorne igre - pravila kombinatornih igara su takva da postoji izuzetno veliki broj varijanti njenog odvijanja, tako da je nemoguce tacno predvideti rezultat igre (sah);
   b. Hazardne igre – u njima izvor neizvesnosti je prisustvo slucajnih faktora (rulet,igre kockom);
   c. Streteske igre – izvor neizvesnosti se nalazi u odsustvu informacija o mogucim akcijama protivnika odnosno o njegovoj strategiji

5. **Matrična igra nulte sume**

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12}\ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}\ldots & c_{2n} \\ c_{m1} & c_{m2}\ldots & c_{mn} \end{vmatrix}$$

$c_{ij}=C(a_i,b_j)$

Matrica **C** se naziva matricom placanja, a njen element c_{ij} predsvtalja dobitak **I** odnosno gubitak **II** igraca kada igraca **I** bira strategiju a_i a igrac **II** b_j;

Normalna forma igre dva igraca sa nultom sumom je trojka(A,B,C) gde je:
1) $A=\{a_i\}$ neprazan skup strategija **I** igraca**;**
2) $B=\{b_i\}$ neprazan skup strategija **II** igraca**;**
3) C je funkcija definisana na Dekartovom proizvodu A x B tako da je $c_{ij}=C(a_i,b_j)$, realan broj;

donja granica vrednosti igre:

$\alpha= \max \min c_{ij}$

gornja granica vrednosti ige:

$\beta= \min \max c_{ij}$

uvek je

$\alpha \leq \beta$

6. **Proste matrične igre**
   Najjednostavniji slucaj igara nulte sume su proste matricne igre koje poseduju sedlastu tacku.
   Ukoliko neki element c_{ij} matrice placanja C ima osobine:
   1) c_{ij} minimalan element u redu *i* matrice C
   2) c_{ij} maksimalan element u koloni *j* matrice C

tada kazemo da je c_{ij} *sedlasta tacka* matrice placanja C.
Formalno:

$$c_{ij*} \leq c_{i*j*} \leq c_{i*j}$$

U sedlastoj tacki vazi:

$$\text{maxmin } c_{ij} = \text{minmax } c_{ij} = c_{i*j*}$$

7. **Mešovite matrične igre**
   Igre koje ne poseduju sedlastu tacku. Primer igra par-nepar.
   Resenje igre se ne moze naci u prostoru cistih strategija, vec se mora pokusati sa novim konceptom mesovitih strategija. Odgovor je dala Fon Nojmanova teorema minimaksa...
   Mesovita strategija igraca **I** se moze dati vektorom verovatnoca $p=(p_1, p_2 \ldots p_i..p_m)$, gdje p_i predstavlja ucestanost sa kojom igrac **I** igra cistu strategiju a_i.

8. **Teorema minimaksa**
   Za svaku konacnu igru dve strane vazi,
   1) postoji realan broj *v* koji se naziva vrednost igre
   2) postoji mesovita strategija za igraca **I** koja mu osigurava najveci ocekivani minimalan dobitak jednak vrednosti igre *v* bez obzira koju mesovitu strategiju igra **II** igrac
   3) postoji mesovita strategija za igraca **II** koja mu osigurava najmanji ocekivani maksimalan gubitak jednak vrednosti igre *v* bez obzira koju mesovitu strategiju igra **I** igrac
   4) bilo koja matricna igra sa matricom placanja C ima sedlastu tacku u prostoru mesovitih strategija, tj. postoje vektori verovatnoca *p* i *q* takvi da je:

$$\text{maxmin } p^T Cq = \text{minmax } p^T Cq = v.$$

9. **LP model matričnih igara**
   Potrebno je naci vektor mesovitih strategija **I** igraca tako da se osigura maksimalan moguci rezultat bez obzira koju strategiju igra **II** igrac.
   matematicki nelinearni program:

$$\begin{gathered}(\max)\ \min \sum p_i c_{ij} \\ \text{P.O.} \\ \sum p_i = 1 \\ p_i \geq 0\end{gathered}$$

pokazano je da za vrednost igre vazi $v \leq \min \sum p_i c_{ij}$
pa se gornji nelinarni program pretvara u sledeci linearni:

$$\begin{gathered}\max v \\ \text{P.O.} \\ v \leq \min \sum p_i c_{ij} \\ \sum p_i = 1 \\ p_i \geq 0\end{gathered}$$

uvodjenjem smene: $x_i = p_i / v$ dobijamo

$$\begin{gathered}\min x_1 + x_2 + \ldots + x_m \\ \text{P.O.} \\ \sum c_{ij} x_i \geq 1 \\ x_i \geq 0\end{gathered}$$

Analogno se dobija i za **II** igraca.

10. Redukcija matrice plaćanja

Kazemo da strategija u *i*-tom redu matrice placanja C dominira nad strategijom u *k*-tom redu ako je $c_{ij} \geq c_{kj}$ za svako *j*. Strategija u *i*-tom redu striktno dominira nad strategijom u *k*-tom redu ako je $c_{ij} > c_{kj}$.
Strategija u *i*-tom redu se naziva *dominirajucom,* a strategija u *k*-tom redu *dominiranom.* Slicno, strategija u *j*-toj koloni matrice C dominira nad strategijom u k-toj koloni ako je $c_{ij} \leq c_{ik}$ za svako *i.*
Ocigledno je da nijedan igrac nece birati dominiranu strategiju, pa ona slobodno moze da se eliminise i na taj nacin da se redukuje matrica placanja.

Mrežno planiranje

11. Definicija projekta

1) projekat je posao koji ima jasno odredjen cilj koji treba postici u datom vremenskom periodu uz koriscenje raspolozivih resursa
2) projekat je jedinstveni proces koji se sastoji od skupa koordinisanih i kontrolisanih aktivnosti, sa odredjenim datumom pocetka i zavrsetka, koje se preduzimaju da bi se isporucio proizvod u skladu sa postavljenim zahtevima, pri cemu postoje ogranicenja na vreme, troskove i resurse.

12. Analiza vremena na MD sa aktivnostima na granama – CPM metoda

Metoda kriticnog puta(CPM) je tehnika kojom se odredjuje trajanje projekta, nalaze aktivnosti cija bi kasnjenja neposredno uticala na kasnjenje projekta i analiziraju mogucnosti pomeranja pocetka i zavrsetka aktivnosti tako da se ne promeni vreme trajanja projekta.
Trajanje projekta je odredjeno najranijim trenutkom desavanja dogadjaja koje oznacava kraj projekta. Do njega se dolazi iterativno, od pocetnog ka krajnjem cvoru.
Opsti slucaj za odredjivanje najranijeg trenutka desavanja dogadjaja:

$$E_j = \max\{E_i + t_{ij}\}$$

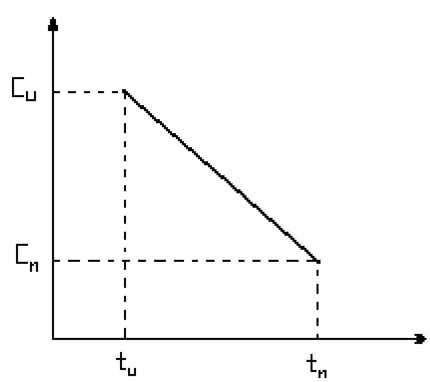
Opsti slucaj za odredjivanje najkasnijeg trenutka desavanja dogadjaja:

$$L_i = \min\{L_j - t_{ij}\}$$

13. Jedinični priraštaj troškova aktivnosti, grafička interpretacija i značenje

Vrednost ΔC predstavlja prirastaj troskova na aktivnosti kada se trajanje aktivnosti smanji za jedinicu. Vece ΔC odgovara vecoj strmini krive i znaci da su za jedinicu skracenja trajanja aktivnosti potrebna relativno veca sredstva. I obrnuto za manje ΔC.
Nagib linearne funkcije:

$$\Delta C = (C_u - C_n) / (t_n - t_u)$$



14. LP model minimizacije troškova projekta kada je zadato njegovo trajanje

Osnovna ideja je da se iterativno ostvaruje skracivanje projekta za po jedinicu vremena na najjeftiniji moguci nacin. Skracenje trajanja projekta se ostvaruje skracivanjem trajanja kriticnog puta, tj aktivnosti na kriticnom putu.

Na pocetku treba odrediti jedinicu za racunanje projekta, odrediti kriticni put i kriticne aktivnosti, a zatim izracunati ΔC za svaku aktivnost.

U opstem slucaju postoje tri vrste aktivnosti pri skracivanju projekta:

1) aktivnosti koje nisu skracavane i ostaju sa normalnim trajanjem, kao i aktivnosti koje nisu mogle biti skracene
2) aktivnosti koje su delimicno skracene
3) aktivnosti koje su svedene na usiljeno trajanje

Za problem minimizacije troskova projekta kada je njegovo trajanje zadato moze se formulisati sledeci model linearnog programiranja:

$$\min C(t)=\sum(C_n)_{ij}+ \Delta C_{ij}((t_n)_{ij}-t_{ij})$$
$$\text{P.O.}$$
$$E_j-E_i-t_{ij}\geq 0$$
$$(t_u)_{ij}\leq t_{ij} \leq((t_n)_{ij}$$
$$E_1=0$$
$$E_n=T_0 ,T_0 \text{ e } (m,M)$$

m-trajanje projekta kad sve aktivnosti imaju usiljeno trajanje
M- trajanje projekta kad sve aktivnosti imaju normalno trajanje
Ukupno trajanje projekta je oraniceno(T_0)

15. LP model minimizacije trajanja projekta kada su zadati njegovi troškovi

$$\min T = E_n$$
$$\text{P.O.}$$
$$\sum(C_n)_{ij}+ \Delta C_{ij}((t_n)_{ij}-t_{ij}) \leq C_0$$
$$E_j-E_i-t_{ij}\geq 0$$
$$(t_u)_{ij}\leq t_{ij} \leq((t_n)_{ij}$$
$$E_1=0$$

Treba odrediti minimalno trajanje projekta-T.
Ukupni troskovi projekta su oraniceni(C_0)

16. Ukupna vremenska rezerva

Ukupna vremenska rezerva F_t aktivnosti (i,j) uvodi se radi odgovora na pitanje koliko se najvise moze produziti trajanje aktivnosti, a da se trajanje projekta ne promijeni pod uslovom da se trajanja drugih aktivnosti ne mijenjaju.

$$F_t(i,j)=L_j-E_i-t_{ij}$$

17. Slobodna vremenska rezerva

Slobodna vremenska rezerva F_f aktivnosti (i,j) pokazuje koliko je maksimalno moguce produziti trajanje aktivnosti a da to ne utice na pocetak sledece aktivnosti.

$$F_f(i,j)=E_j-E_i-t_{ij}$$

18. Nezavisna vremenska rezerva

Nezavisna vremenska rezerva se uvodi zbog sledeceg:

Ako se svaka prethodna aktivnost zavrsava u najkasnijim trenucima a svaka sledeca mora da pocne u najranijem trenutku, tada jos uvijek moze da postoji vremenska rezerva aktivnosti.

$$F_i(i,j)=E_j-F_i-t_{ij}$$

19. Raspodele verovatnoća trajanja aktivnosti i projekta

1) trajanje projekta je slucajna promenjiva priblizno raspodeljena po zakonu normalne raspodele
2) matematicko ocekivanje trajanja projekta jednako je zbiru matematickih ocekivanja trajanja aktivnosti na kriticnom putu
3) varijansa trajanja projekta je jednaka zbiru varijansi trajanja aktivnosti na kriticnom putu

Trajanje projekta podleze normalnoj raspodeli, a trajanje aktivnosti beta raspodeli.

20. Osnovne faze planiranja projekta

Analiza strukture (pravljenje liste aktivnosti, zavisnosti, ...),
analiza vremena (odredjivanje KP i trajanja projekta),
analiza troskova (minimizacija C sa zadatim To, minimizacija T za zadatim Co, i nivelacija) i
raspodela resursa.

21. Očekivano trajanje i varijansa aktivnosti primenom PERT metode

a – optimisticka procena trajanja aktivnosti
m – procena najverovatnijeg trajanja aktivnosti
b – pesimisticka procena trajanja aktivnosti

$$t \approx (a+4m+b)/6$$
$$\sigma^2=(b-a)^2/36$$

22. Verovatnoća završetka projekta u zadatom periodu (analitičko izračunavanje)

$$\varphi(z)=e^{-z2/2}/\sqrt{2\pi}$$

Promenjiva z predstavlja standardizovanu vrednost sume aktivnosti na kriticnom putu,tj. faktor verovatnoce za zavrsetak projekta u datom periodu. Za racunanje $\varphi(z)$ se koriste tablice.

Heurističko programiranje

23. Uobičajena podela heuristika

Specijalne heuristike – dizajniraju se za posebne vrste optimizacionih problema postujci svojstva i specificnosti ovih problema.
Opste heuristike – heuristike opsteg karaktera koje se mogu primeniti na bilo koji problem kombinatorne optimizacije, bez obzira na specificnost njegove strukture.
+ sledece pitanje

24. Klasifikacija opštih heuristika

1) Konstruktivne metode - *generisu samo jedno dopustivo resenje problema koje primenom odgovarajucih pravila treba da bude blisko optimumu.*
   a. princip „prozdrljivosti“
   b. princip „gledanja unapred“
2) Metode lokalnog pretrazivanja - *iterativno generisu citav niz dopustivih resenja problema, trazeci da ona budu sve bolja i bolja.*
3) Evolutivne metode - *u svakoj iteraciji generisu, ne jedno, nego vise dopustivih resenja, koja cine tzv „populaciju“, pri cemu se tezi da svaka novoformirana populacija bude bolja od prethodne*
4) Metode dekompozicije - *na heuristicki nacin razbijaju problem na vise manjih dimenzija*
5) Induktivne metode – *resavaju vece i slozenije probleme koristeci principe i metode razvijenih za manje i jednostavnije probleme istog tipa*

25. Pojam heuristike
Heuristika je tehnika koja pokusava da nadje neka dobra resenja problema u okviru razumnog vremena, pri cemu se ne garantuje da ce nadjena resenja biti optimalna, niti se moze odrediti njihova bliskost optimalnom resenju.

26. Poželjne osobine heuristika
Pozeljno je da f(n) bude polinom po *n*, tj. polinomijalan, da bi heuristika bila racunski efikasna. Heuristika treba da bude jednostavna*(da bi bila razumljiva za korisnike)*, robusna*(da ne mijenja drasticno svoje ponasanje za male promjene parametara problema)*, da poseduje mogucnost generisanja veceg broja dobrih resenja*(da bi korinsik mogao da izabere najprihvatljivije od njih u odnosu na neke kriterijume)* i da ima mogucnost interaktivnog rada*(korisnik moze iteraktivno da utice na proces dobijanja resenja donoseci odluke u nekim koracima heuristike)*.

27. Situacije u kojima je naročito pogodno koristiti heuristike i
28. Razlozi za primenu heurističkih metoda (isti odgovor)
Za neke probleme za koje ne postoje egzaktni algoritmi resavanja, ili ciji su algoritmi izuzetno slozeni. Takodje za probleme koji nisu dobro struktuirani, usled njihove kompleksnosti i nemogucnosti dovoljnog stepena njihove formalizacije.
Koriste se i kao deo egzaktnih algoritama radi brzeg nalazenja optimalnih resenja.
Takodje i za one probleme koji su dobro struktuirani i za koje postoje egzaktni algoritmi, ali su svi neefikasni, jer imaju eksponencijalnu slozenost.

29. Princip lokalnog pretraživanja
U lokalnom pretrazivanju se polazi od proizvoljne tacke kao od pocetnog resenja, pa se u svakoj iteraciji pretrazuje okolina trenutnog resenja, i u njoj nalazi, prema nekom definisanom pravilu izbora, sused koji predstavlja sledece resenje.
Simulirano kaljenje, *Tabu pretrazivanje* i *Metode promenljivih okolina* se baziraju na principu lo kalnog pretrazivanja.