Složenost simpleks metode

Milan Stanojević

Laboratorija za operaciona istraživanja „Jovan Petrić”
Fakultet organizacionih nauka, Beograd

Napomena

Uvodna napomena

- Ova prezentacija je radni materijal za predavanja iz predmeta Operaciona istraživanja 1 na Fakultetu organizacionih nauka i ne treba je koristiti za učenje gradiva.
- Definicije ne pretenduju da budu apsolutno tačne i precizne, već da omoguće studentu razumevanje osnovnih pojmova iz oblasti koja je predmet prezentacije.
- Za učenje gradiva i precizne definicije videti npr:
    - S. Krčevinac (et al.), Operaciona istraživanja, Fakultet organizacionih nauka (str. 92 – 95).
    - D. Cvetković (et al.), Kombinatorna optimizacija - matematička teorija i algoritmi, Društvo operacionih istraživača (str. 14 – 21 i 48 – 54).

Teorija računske složenosti

- U okviru kompjuterskih nauka razvijena je oblast koja se bavi kompleksnošću algoritama.
  - Definiše se pojam **računska složenost algoritma** pod čime se podrazumeva ukupan **broj elementarnih koraka** koje treba realizovati da bi se došlo do rešenja postavljenog problema.
  - Broj elementarnih koraka neke procedure zavisi od količine ulaznih podataka ili, drughim rečima, od dužine ili **dimenzije problema**.
  - Pojmovi „elementarni korak" i „dimenzija problema" nisu jednoznačno definisani i pri njihovom određivanju dozvoljava se određena proizvoljnost.

O notacija

- Posmatrajmo problem P dimenzije L i neki algoritam A koji ga rešava. Označimo sa E ukupan broj elementarnih koraka potrebnih da algoritam A reši problem P.
- Ako za svako L važi

$$E \leq C \cdot f(L),$$

gde su: $C \in \mathbb{R}$, $C > 0$, a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tada se kaže da algoritam A ima složenost

$$O\left(f\left(L\right)\right).$$

Polinomijalni i eksponencijalni algoritmi

- Ukoliko je funkcija $f(L)$ predstavlja polinom po L, tada se algoritam naziva **polinomijalnim**.
- U suprotnom, algoritam je **eksponencijalan**.
- Polinomijalni algoritmi su računski **efikasni**.
- Kod eksponencijalnih algoritama broj elementarnih koraka, pa samim tim i vreme rešavanja problema, u najgorem slučaju raste eksponencijalno. Zbog toga često ovi algoritmi **ne mogu u razumnom vremenu da reše probleme većih dimenzija**.

Složenost problema

- Složenost problema je jednaka složenosti „najboljeg” algoritma pri rešavanju „najgore” varijante tog problema.
- Prema složenosti, problemi se grubo mogu podeliti u dve grupe:
  1. Lake probleme – za ove probleme su poznati polinomijalni algoritmi za njihovo rešavanje. Ovi problemi se još zovu i **polinomijalni** problemi.
  2. Teške probleme – za njihovo rešavanje su poznati isključivo eksponencijalni algoritmi.

Računska složenost simpleks metode

- U svakoj iteraciji simpleks metode izvrši se $O(mn)$ aritmetičkih operacija
- Ukupan broj baznih rešenja ne prelazi $\binom{n}{m}$.
- Ukupna složenost simpleks metode je $O\left(mn\binom{n}{m}\right)$ – dakle simpleks metoda je eksponencijalni algoritam.
- S druge strane, simpleks metoda pokazuje „dobro ponašanje" u većini realnih problema LP.
- Utvrđeno je da u praksi simpleks metoda prosečno zahteva između m i $3m$ iteracija.

Polinomijalni algoritam za rešavanje LP

- Dugi niz godina je bilo poznato da je problem LP spada u polinomijalne probleme, ali nije bio poznat ni jedan polinomijalni algoritam za njegovo rešavanje.
- Tek sredinom 80-tih godina XX veka, počela je da se razvija nova grupa polinomijalnih algoritama za rešavanje problema LP, tzv. **unutrašnje metode**.
- Prvu ideju za korišćenje metode sa unutrašnjim kaznenim funkcijama predložio je Karmarkar 1984. godine.
- Osnovna ideja je da se umesto pretraživanja po spoljnoj oblasti dopustivog skupa (kako radi simpleks metoda), pretražuje kroz njegovu unutrašnjost.
- I pored postojanja novih algoritama za koje je dokazana polinomijalnost, simpleks metoda, naročito sa tehnikama koje joj poboljšavaju performanse, je nezamenjiva u rešavanju problema LP.