LINEARNI STATISTIČKI MODELI

(LINS)

Podsetnik pojmova i primera

I DEO

Uvod u teoriju linearnih statističkih modela

GLAVA 1 (Elementi matrične algebre)

Definicija 1-1 (Realno polje skalara)

Realno polje skalara R je skup realnih brojeva (a, b, ...) zatvoren u odnosu na operacije sabiranja i množenja realnih brojeva.

Napomena: Skup realnih brojeva B je zatvoren skup ako za

$$\mathbf{a,b \in B} \qquad \mathbf{a+b \in B} \ \text{ i } \ \mathbf{a*b \in B};$$

pri čemu su "+" "$*$" uobičajene operacije sabiranja i množenja realnih brojeva.

Definicija 1-2 (Vektorski prostor)

Vektorski prostor $\mathbf{R^n}$ (n - dimenzionalni realni Euklidski prostor) je skup vektora zatvoren u odnosu na vektorsko sabiranje i množenje vektora skalarom. Pri tome je vektor (uređeni niz realnih brojeva): vektor kolona $\vec{x}$ ili vektor vrsta (transponovani vektor) $\vec{x}'$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \text{ i } \vec{x}' = \begin{bmatrix} x_1 & . & . & . & . & x_n \end{bmatrix}$$

Napomena:

a. Vektorsko sabiranje vektora: $\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 & + & y_1 \\ & . & \\ & . & \\ & . & \\ x_n & + & y_n \end{bmatrix}$

b. Množenje vektora skalarom:

$$a \in R, \vec{x} \in R^n \quad \rightarrow \quad a * \vec{x} = a\vec{x} = \begin{bmatrix} ax_1 \\ . \\ . \\ . \\ ax_n \end{bmatrix}$$

c. Vektori $\mathbf{\vec{x}}$ **i** $\mathbf{\vec{y}}$ su kolinearni (leže na istoj pravoj) ako:

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{x} \in R^n \text{ i } a, b \in R \quad \rightarrow \quad \vec{a} = a * \vec{x} \text{ i } \vec{b} = b * \vec{x}$$

d. Koristimo iste oznake “+” i “∗” kao i za uobičajene operacije sabiranja i množenja, vodeći računa da radimo sa vektorima.

Definicija 1 - 3 (Dimenzija vektora, Jednakost vektora, Nula vektor)

a. Dimenzija vektora je broj elemenata (komponenti, koordinata) vektora.
b. Dva vektora su jednaka ako su im jednaki odgovarajući elementi.
c. Nula vektor je vektor odgovarajuće dimenzije, sa svim elementima jednakim nuli:

$$\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

Primer 1-1

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}; \quad \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in R^2, \quad \vec{z} \in R^3$$

a. $\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ b. $3\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ c. $\dim(\vec{z}) = 3$

d. $\vec{u} = 3\vec{x}$; $\vec{x}$ i $\vec{u}$ su kolinearni vektori.

Definicija 1-4 (Linearna kombinacija vektora)

Linearna kombinacija vektora $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_r$ je:

$a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + ...+ a_r\vec{x}_r \quad ; \quad a_i \in R \quad , \quad \vec{x}_i \in R^n \quad , \quad$ i=1,.........r.

Vektor $\vec{z} = \sum_{i=1}^{r} a_i\vec{x}_i$ je linearna kombinacija vektora $\vec{x}_i$, i=1,.......,r.

Definicija 1-5 (Linearna zavisnost vektora)

Vektori $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_r$ su linearno zavisni, ako postoje skalari $a_1, a_2, ..., a_r$ koji nisu svi jednaki nuli, tako da je njihova linearna kombinacija jednaka nula vektoru.

$$a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + ...+ a_r\vec{x}_r = \sum_{i-1}^{r} a_i\vec{x}_i = \vec{0} \quad ; \quad a_i \neq 0 \quad , \ \text{i=1,2,.....,r}$$

Napomena: Svaki vektor $\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{i}}$ se može izraziti kao linearna kombinacija ostalih vektora. Suprotno su vektori linearno nezavisni.

<u>Posledica 1-1</u> (Linearno nezavisni vektori)

Ako $\sum_{i=1}^{r} a_i\vec{x}_i = \vec{0}$ povlači da su $a_i = 0$, i=1,.......,r

onda su vektori $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_r$ linearno nezavisni.

Napomena: Nijedan vektor $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_r$ se ne može izraziti kao linearna kombinacija ostalih vektora.

Ova posledica se često koristi za proveru linearne zavisnosti.

Primer 1-2

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} , \ \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} , \ \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} , \ \vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

a. Vektori $\vec{e}_1$ i $\vec{\mathrm{e}}_2$ su linearno nezavisni vektori:

$$a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 = a_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \vec{0} \rightarrow a_1 = a_2 = 0 \rightarrow \vec{e}_1 \ \text{ i } \ \vec{\mathrm{e}}_2$$

su linearno nezavisni vektori.

b. $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 * \vec{e}_1 + 2 * \vec{e}_2 \ \rightarrow$ Vektor $\vec{\mathrm{x}}$ je linearna kombinacija vektora $\vec{\mathrm{e}}_1$ i $\vec{\mathrm{e}}_2$.

c. $a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{u}_2 = a_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \vec{0} \ \rightarrow \begin{cases} \mathrm{a}_1 + 3a_2 = 0 \\ 2a_1 + 6a_2 = 0 \end{cases} \ \rightarrow \ \mathrm{a}_1 = 3 \ \text{ i } \ \mathrm{a}_2 = -1 \ \rightarrow$

$3\vec{\mathrm{x}} - \vec{\mathrm{u}} = 0 \ \rightarrow \ \vec{\mathrm{u}} = 3\vec{\mathrm{x}} \ \rightarrow \ \vec{\mathrm{x}} \ \text{ i } \ \vec{\mathrm{u}}$

su kolinearni vektori.

Definicija 1-6 (Unutrašnji proizvod, Dužina vektora, Jedinični vektori)

a. Unutrašnji proizvod (Skalarni proizvod): $\vec{x}'\vec{y} = \vec{x}' * \vec{y}$

$$\vec{x}'\vec{y} = [x_1, \ldots\ldots\ldots, x_n] * \begin{bmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \vec{y}'\vec{x} = c, c \in R$$

Napomena: Za skalarni proizvod i množenje vektora skalarom, koristimo iste oznake, a naziv “skalarni” potiče od činjenice da je proizvod jednak skalaru $\mathbf{c} \in \mathbf{R}$.

b. Dužina vektora (Norma vektora)

$\|\vec{x}\| = +\sqrt{\vec{x}'\vec{x}}$; pri čemu je $\vec{x}'\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ (suma kvadrata elemenata vektora $\vec{x}$)

c. Jedinični vektor $\vec{j}$ je vektor čija je dužina 1 ; $\|\vec{j}\| = 1$.

Primer 1-3

a. Vektori $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ su jedinični vektori:

$$\|\vec{e}_1\|^2 = [1,0] * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \text{ i } \|\vec{e}_2\|^2 = [0,1] * \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

b. Definišimo vektore:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad , \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

kako je: $\vec{v}_1'\vec{v}_1 = [1/\sqrt{2} \ , \ 1/\sqrt{2}] * \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = 1/2 + 1/2 = 1$

$$\vec{v}_2'\vec{v}_2 = [1/\sqrt{2} \ , -1/\sqrt{2}] * \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = 1/2 + 1/2 = 1$$

$\rightarrow \quad \|\vec{v}_1\| = \|\vec{v}_2\| = 1 \quad \rightarrow \quad \vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ su jedinični vektori.

Napomena:

Vektori $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots\ldots, \vec{e}_n$ su specijalan tip jediničnih vektora, zvani Elementarni vektori:

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix} \; \ldots \; \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix}$$

Lema 1-1 (Skalarni proizvod i ugao između vektora)

$\vec{x}' * \vec{y} = \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\| \cos\alpha$, α je ugao između vektora $\vec{x}$ i $\vec{y}$.

Primer 1-4

$\vec{x}' = (1,3,2) \quad \vec{y}' = (-2,1,-1)$

a. $\vec{x}'\vec{x} = 14$, $\vec{y}'\vec{y} = 6$, $\vec{x}'\vec{y} = -1$

$\|\vec{x}\| = \sqrt{14} = 3.7$, $\|\vec{y}\| = \sqrt{6} = 2.5$, $\cos(\alpha) = -0.11 \rightarrow \alpha = 96°$

Definicija 1-7 (Ortogonalni vektori)

Vektori su ortogonalni $(\vec{x} \perp \vec{y})$ ako je: $\vec{x}'\vec{y} = 0$

Napomena:

Ako su

$$\vec{x} \neq \vec{0} \;,\; \vec{y} \neq \vec{0} \quad \text{i} \quad \vec{x}'\vec{y} = 0$$

$$\rightarrow \vec{x}'\vec{y} = \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\| \cos(\alpha) = 0 \quad \rightarrow \cos(\alpha) = 0 \quad \rightarrow \alpha = 90°$$

Definicija 1-8 (Orto-Normirani vektori)

Vektori su Orto-Normirani ako su ortogonalni $(\vec{x} \perp \vec{y})$ i ako su normirani

$$(\|\vec{x}\| = 1 \;,\; \|\vec{y}\| = 1).$$

Napomena: Vektori su normirani ako im je norma (dužina) jedan, a postupak svođenja na normirane (jedinične) vektore, zove se normiranje.

Primer 1-5

a. Vektori $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_2$ su orto-normirani vektori:

a-1. $\vec{e}_1'\vec{e}_2 = [1,0] * \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ i $\vec{e}_2'\vec{e}_1 = [0,1] * \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \vec{e}_1 \perp \vec{e}_2 \leftrightarrow$ Vektori su ortogonalni.

Ugao α između $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_2$ je $90°$, jer je na osnovu Leme 1-1, $\cos(\alpha) = 0$.

a-2. Elementarni vektori $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_2$ iz primera 1-3 su jedinični vektori:

$$\|\vec{e}_1\|^2 = [1,0] * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \quad \text{i} \quad \|\vec{e}_2\|^2 = [0,1] * \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

b. Vektori $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ iz prmera 1-3 su orto-normirani vektori:

$$\vec{v}_1'\vec{v}_2 = \left[1/\sqrt{2} \ , \ 1/\sqrt{2}\right] * \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = 1/2 - 1/2 = 0$$

$$\vec{v}_2'\vec{v}_1 = \left[1/\sqrt{2} \ , \ -1/\sqrt{2}\right] * \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = 1/2 - 1/2 = 0$$

Vektori su ortogonalni a na osnovu primera 1-3 su i normirani.

Lema 1-2

Ako su ne-nula vektori $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots\ldots\ldots, \vec{x}_r$ ortogonalni, onda su i linearno nezavisni.

$$\vec{x}_i \neq \vec{0} \quad , \quad \vec{x}_i \perp \vec{x}_j \quad , \quad i \neq j \ ; \ i, j = 1, \ldots\ldots\ldots, r \ \rightarrow \sum_{i=1}^{r} a_i \vec{x}_i \neq \vec{0}$$

Dokaz:

Posmatrajmo ortogonalne ne-nula vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$;

$$\vec{a} \neq \vec{0} \ , \ \vec{b} \neq \vec{0} \ \rightarrow \ \|\vec{a}\| = c \neq 0 \ , \ \|\vec{b}\| = d \neq 0$$

$$\rightarrow \ \vec{a}'\vec{a} = c^2 \ , \ \vec{b}'\vec{b} = d^2 \quad \text{i} \quad \vec{a} \perp \vec{b} \ \rightarrow \vec{a}'\vec{b} = 0$$

Pretpostavimo da je $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$, množenjem sa $\vec{a}'$ i $\vec{b}'$ imamo

$$\alpha\vec{a}'\vec{a} + \beta\vec{a}'\vec{b} = \vec{a}'\vec{0} \ \rightarrow \ \alpha c^2 + \beta 0 = 0 \ \rightarrow \ \alpha = 0$$

$$\alpha\vec{b}'\vec{a} + \beta\vec{b}'\vec{b} = \vec{b}'\vec{0} \ \rightarrow \ \alpha 0 + \beta d^2 = 0 \ \rightarrow \ \beta = 0$$

Na osnovu posledice 1-1 $\rightarrow$ vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su linearno nezavisni vektori.

Primer 1-6

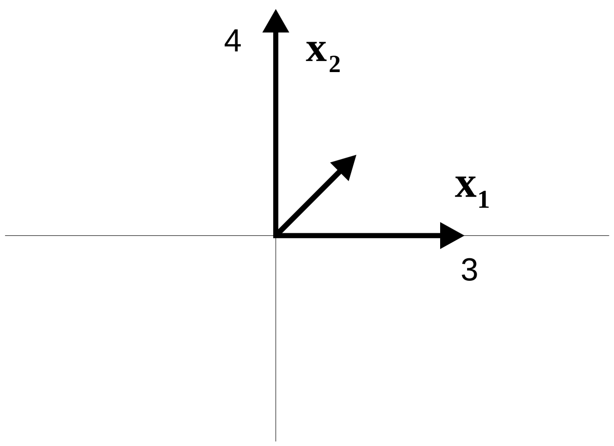
a. Posmatrajmo ortogonalne vektore (slika 1-1)

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Na osnovu Leme 1-2 $\rightarrow$ $\vec{x}_1$ i $\vec{x}_2$ su linearno nezavisni;

$$a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 \neq \vec{0} \quad \rightarrow \quad \vec{x}_2 \neq a\vec{x}_1 \quad (a = -a_1/a_2)$$

Vektor $\vec{\mathbf{x}}_2$ ne leži na pravoj određenoj linearnom kombinacijom vektora $\vec{x}_1$ (linearna kombinacija vektora $\vec{x}_1$ je $a\vec{x}_1$, $a \in R$).



Vektor $\vec{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ je linearno nezavistan od $\vec{x}_1$, ali $\vec{z}$ i $\vec{x}_1$ nisu ortogonalni vektori.

slika 1-1

b. Posmatrajmo ortogonalne vektore (slika 1-2)

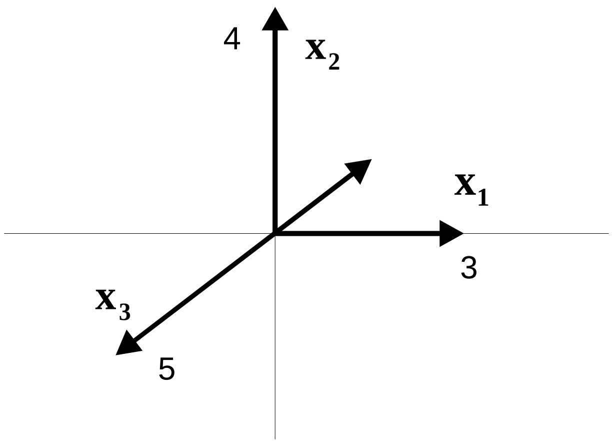
$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Kako je $\vec{x}_i \perp \vec{x}_j$, $i \neq j$ $\rightarrow$ $a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + a_3\vec{x}_3 \neq \vec{0}$
$\rightarrow$ $\vec{x}_3 \neq a\vec{x}_1 + b\vec{x}_2$ $\quad (a = -a_1/a_3,\ b = -a_2/a_3)$

Vektor $\vec{\mathbf{x}}_3$ ne leži u ravni određenoj linearnim kombinacijama vektora

$$\vec{x}_1 \text{ i } \vec{x}_2 \quad \left(a\vec{x}_1 + b\vec{x}_2 \text{ ; } a,b \in R\right)$$

Vektor $\vec{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{3}\right)\vec{x}_1 + \left(\frac{1}{4}\right)\vec{x}_2$ leži u ravni vektora $\vec{x}_1$ i $\vec{x}_2$.



slika 1-2

Definicija 1-9 (Baza vektorskog prostora)

Baza vektorskog prostora je svaki skup linearno nezavisnih vektora, zvanih Bazni vektori, pomoću kojih se može izraziti svaki vektor prostora, kao njihova linearna kombinacija.

Napomena: Ako su bazni vektori:

ortogonalni $\rightarrow$ Baza je ortogonalna baza

orto-normirani $\rightarrow$ Baza je orto-normirana baza

Gram-schmidt-ovim postupkom ortogonalizacija moguće je linearno nezavisne vektore $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots\ldots\ldots, \vec{x}_r$ svesti na ortogonalne vektore $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots\ldots\ldots, \vec{u}_r$.

Primer 1-7

Vektori iz primera 1-3

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \;,\; \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \;,\; \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \;,\; \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

obrazuju dve orto-normirane baze B_1 i B_2:

$$B_1 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2) \quad \text{i} \quad B_2 = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$$

Napomena:

Na slici 1-3-a je klasični Euklidski prostor R^2 definisan bazom B_1, a na slici 1-3-b isti Euklidski prostor R^2 definisan bazom B_2.

a. $B_1 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ b. $B_2 = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$

slika 1-3

Lema 1-3

Svaki vektor se može jednoznačno prikazati u bilo kom drugom vektorskom prostoru, iste dimenzije, odgovarajućim operacijama promene vektorske baze.

Primer 1-8

Dat je vektor $\vec{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ u Euklidskom prostoru sa bazom B_1

$$B_1 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$$

Vektor $\vec{\mathbf{x}}$ se može pretstaviti u vektorskom prostoru sa drugom bazom, $B_2 = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ kao

vektor $\vec{x} = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2$; pri tome skalare a i b treba odrediti:

pomnožimo $\vec{x} = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2$ sa $\vec{v}_1'$ $\rightarrow$ $\vec{v}_1'\vec{x} = a1 + b0 = a$

pomnožimo $\vec{x} = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2$ sa $\vec{v}_2'$ $\rightarrow$ $\vec{v}_2'\vec{x} = a0 + b1 = b$

Kako su vektori $\vec{v}_1\vec{v}_2$ (iz Primera 1-3) i vektor $\vec{x}$, poznati vektori, imamo:

$$a = \frac{3}{\left(4\sqrt{2}\right)} = 0.53 \;\text{ i }\; \mathrm{b} = \frac{1}{\left(4\sqrt{2}\right)} = 0.18 \;\rightarrow\; \vec{\mathrm{x}} = 0.53\vec{\mathrm{v}}_1 + 0.18\vec{v}_2$$

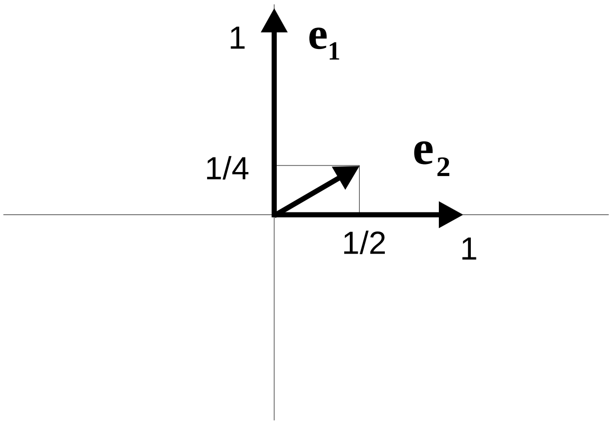
$$\rightarrow \vec{\mathrm{x}} = \begin{bmatrix} 0.53 \\ 0.18 \end{bmatrix}$$

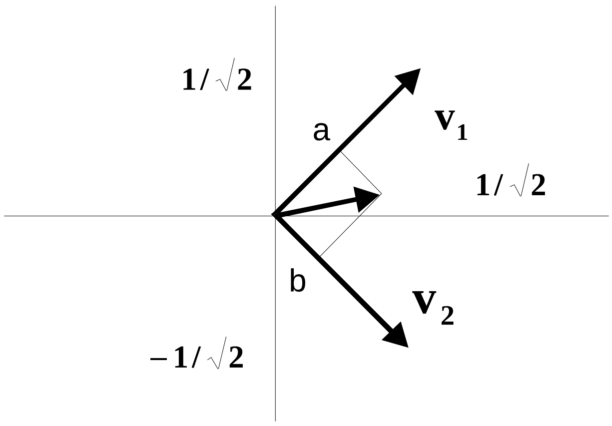
u prostoru sa bazom $B_2 = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$

Napomena:

Koordinate 0.58 i 0.18 vektora $\vec{x}$ u prostoru sa bazom B_2 pretstavljaju projekcije vektora $\vec{\mathbf{x}}$ na odgovarajuće vektore $\vec{v}_1$ i $\vec{\mathrm{v}}_2$ baze B_2, za razliku od koordinata vektora:

$\vec{\mathrm{z}} = \begin{bmatrix} 0.53 \\ 0.18 \end{bmatrix}$ u prostoru sa bazom B_1.





a. $B_1 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$

b. $B_2 = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$

slika 1-4

Definicija 1-10 (Saglasno matrice, množenje matrica)

Pravougaone matrice $A_{m,r}$ i $A_{n,1}$ su saglasne (kompatibilne) ako je n=r , čime je moguće množenje matrica:

Proizvod matrica $A_{m,n} = \lfloor a_{i,k} \rfloor$ i $B_{n,1} = \lfloor b_{k,j} \rfloor$ je matrica $C_{m,1} = \lfloor c_{i,j} \rfloor$ pri čemu je

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \quad ; \quad i = 1,......., m \quad ; \quad j = 1,......., l$$

Lema 1-4

Matrično množenje nije komutativno (nije uvek AB=BA).

Lema 1-5 (Asociativnost)

Množenje matrica je asociativno, ali samo u istom poretku matrica.

(AB)C=A(BC)

Primer 1-9

Dati su vektori $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

a. IX=XI=X

b. $\vec{x}\vec{y}' = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 8 & 10 & 2 \\ 12 & 15 & 3 \end{bmatrix}$ c. $\vec{x}'\vec{y} = 17 \in R$ d. $\vec{x}'\vec{x} = 14$

Napomena:

Jedinična matrica reda n je matrica oblika:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{bmatrix}_{n,n}$$

Definicija 1-11

Matrica A je Simetrična matrica, ako je: A' = A, pri čemu je A' transponovana matrica matrice A.

Rang matrice je maksimalan red submatrice, čija je determinanata različita od nule.

Matrica A je inverzna matrica, ako je: $A^{-1}A = AA^{-1} = I$

Matrica A je Singularna marica, ako je: $|A| = \det(A) = 0$

Matrica a je Regularna matrica (nesingularna, punog ranga) ako je:

$|A| = \det(A) \neq 0$

Definicija 1-12

(Linearna transformacija, Kvadratna forma, Bi-linearna forma)

a. Linearna transformacija vektora $\vec{x} \in R^m$ prostora R^m u vektor $\vec{z} \in R^n$ prostora R^n, definisana je sa:

$\vec{z} = A\vec{x}$; pri čemu je A matrica transformacije.

Napomena:

Generalno imamo $\vec{z}_{m,1} = A_{m,n}\vec{x}_{n,1}$

Specijalni slučajevi su:

Za m=n $\rightarrow$ $\vec{z} = A\vec{x}$, pri čemu je A kvadratna matrica; $\vec{x}, \vec{z} \in R^n$

Za m=1 $\rightarrow$ $z = \vec{a}'\vec{x}$, pri čemu je $\vec{a}'$ vektor vrata; $\vec{x} \in R^n$ i $z \in R^1$

b. Kvadratna forma je $y = \vec{x}'A\vec{x}$; pri čemu je A simetrična matrica; $y \in R^1$, $\vec{x} \in R^n$

c. Bi-linearna forma je $z = \vec{x}'A\vec{y}$; pri čemu matrica A može da bude kvadratna ili pravougaona matrica; $z \in R^1$

Primer 1-10

$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

a. $y = \vec{x}'A\vec{x} = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$

b. $z = \vec{x}'A\vec{y} = 2x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_2 + 3x_2y_2$

Definicija 1-13 (Pozitivna definitivnost)

Kvadratna forma i matrica A su Pozitivno definitne ako: $\vec{x}'A\vec{x} > 0$

Napomena: Ako je $\vec{x}'A\vec{x} \geq 0$, matrica A je pozitivno semi-definitna (ne-negativna definitna).

Lema 1-6 (Rang matrice)

Rang matrice je:

a. Maximalan red minora različitog od nule.

b. Maximalan broj linearno nezavisnih vektora kolona/vrsta matrice.

Primer 1-11

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathrm{k}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathrm{k}}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathrm{k}}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\det(A)=0 \;;\; M_{1,1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \;\rightarrow\; \mathrm{rang}(A)=2 \;;\; \vec{k}_3 = -\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2$$

Definicija 1-14 (Parcijalni izvod po vektoru)

Za funkciju $y = f(\vec{x})$ parcijalni izvod po vektoru je:

$$\frac{\partial y}{\partial \vec{x}} = \begin{bmatrix} \partial y / \partial x_1 \\ . \\ . \\ . \\ \partial y / \partial x_n \end{bmatrix}$$

<u>Posledica 1-12</u>

Za linearnu transfrmaciju $y = \vec{a}'\vec{x}$ i kvadratnu formu $y = \vec{x}'A\vec{x}$

izvodi su: $\partial y / \partial \vec{x} = \vec{a}$ i $\partial y / \partial \vec{x} = aA\vec{x}$

Primer 1-12

a. $\vec{a}' = (2,3,5)$, $y = \vec{a}'\vec{x} = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \;\rightarrow\; \partial \mathrm{y}/\vec{\mathrm{x}} = (2,3,5)'$

$$z = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$$

b. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\rightarrow\ \partial y/\vec{x} = 2A\vec{x} = \begin{bmatrix} 4x_1 & + & 2x_2 \\ 2x_1 & + & 6x_2 \end{bmatrix}$

Lema 1-7

Za blok matrice $A = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$ važi:

$$A' = \begin{bmatrix} P' & R' \\ Q' & S' \end{bmatrix} \quad , \quad AB = \begin{bmatrix} PE + QG & PF + QH \\ RE + SG & RF + SH \end{bmatrix}$$

Primer 1-13

Inverzne matrice diagonalne matrice D i skalara c je:

$$D = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow D^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \quad \text{i}$$

$$C = [100]_{1,1} \rightarrow C^{-1} = 0.01 \in R^1$$

Definicija 1-15 (Ortogonalne matrice)

Kvadratna matrica je ortogonalna ako je $C'C = I$

Napomena:

a. Vektori i kolone/vrste ortogonalne matrice, su međusobno ortogonalne.

b. $C' = C^{-1}$

Lema 1-8

Linearna transformacija $\vec{y} = C\vec{x}$ je ortogonalna transformacija, ako je kvadratna matrica C ortogonalna matrica. Pri tome, vektori kolone/vrste matrice C obrazuju orto-normiranu bazu:

Definicija 1-16 (Euklidsko odstojanje između vektora)

Euklidsko odstojanje između vektora $\vec{x}$ i $\vec{y}$: $d(\vec{x}, \vec{y}) = c$

definisano je kao pozitivni koren kvadratne forme $(\vec{y}-\vec{x})'(\vec{y}-\vec{x})$;

pri čemu je:

$$c^2 = (\vec{y}-\vec{x})'(\vec{y}-\vec{x})$$

Lema 1-9

Ortogonalna transformacija $\vec{y} = C\vec{x}$ zadržava isto Euklidsko odstojanje.

Dokaz:

$$d^2(\vec{y}_1,\vec{y}_2) = d^2(C\vec{x}_1, C\vec{x}_2) = (C\vec{x}_1 - C\vec{x}_2)'(C\vec{x}_1 - C\vec{x}_2) = (\vec{x}_1-\vec{x}_2)'C'C(\vec{x}_1-\vec{x}_2) =$$
$$= (\vec{x}_1-\vec{x}_2)' I (\vec{x}_1-\vec{x}_2) = d^2(\vec{x}_1,\vec{x}_2)$$

Definicija 1-17 (Karakteristične vrednosti, karakteristični vektori)

Karakteristične vrednosti kvadratne matrice B su koreni karakteristične jednačine

$$|B-\lambda I| = 0 .$$

Napomena: Matrica $|B-\lambda I|$ je karakteristična matrica, a odgovarajuća funkcija po λ je karakteristični polinom.

Karakteristični vektori su vektori $\vec{x}_i \neq \vec{0}$, za koje je:

$[B-\lambda_i I]\vec{x}_i = \vec{0}$ ili $B\vec{x}_i = \lambda_i \vec{x}_i$; pri čemu su λ_1 odgovarajuće karakteristične vrednosti karakterističnih vektora $\vec{x}_1$.

Lema 1-10

Svaki vektor, koji je kolinearan sa karakterističnim vektorom, je takođe karakterističan vektor.

Dokaz:

Neka je $(\lambda, \vec{x})$ par karakterističnih vrednosti/vektora; i neka je vektor $\vec{y} = c\vec{x}$, $c \in R$ kolinearan sa $\vec{x}$, tada:

$B\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad \rightarrow \quad B(1/c)\vec{y} = \lambda(1/c)\vec{y} \quad \rightarrow \quad B\vec{y} = \lambda\vec{y} \quad \rightarrow \quad \vec{y}$ je karakterističan vektor.

Primer 1-14

Data je matrica A, koja nije simetrična matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Odredi karakteristične vrednosti i vektore.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda_2 \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$\rightarrow \ \lambda_1 = 1 \ , \ \lambda_2 = 3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \leftrightarrow \quad A\vec{x}_1 = \lambda_1 \vec{x}_1 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_1 + 3x_2 = x_2 \end{cases}$$

$\rightarrow \ x_1 = -2x_2$ (imamo beskonačno mnogo rešenja, pa jednu komponentu vektora biramo proizvoljno: $x_2 = 1$) $\rightarrow$ $\mathrm{x}_2 = 1$ i $x_2 = -2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \leftrightarrow \quad A\vec{x}_2 = \lambda_2 \vec{x}_2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 3x_1 \\ x_1 + 3x_2 = 3x_2 \end{cases}$$

$\rightarrow \ x_2 = 1$ (x_2 biramo proizvoljno) $\rightarrow$ $\mathrm{x}_1 = 0$

Dobili smo parove karakterističnih vrednosti/vektora matrice A:

$$\lambda_1 = 1 \ , \ \mathrm{x}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \lambda_2 = 3 \ , \ \vec{\mathrm{x}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Deobom karakterističnih vektora $\vec{x}_1$ i $\vec{\mathrm{x}}_2$ sa odgovarajućim normama:

$\|\vec{x}_1\| = \sqrt{5}$ i $\|\vec{\mathrm{x}}_2\| = 1$, dobijamo normirane karakteristične vektore x_3 i x_4 , sa istim karakterističnim vrednostima:

$$\lambda_1 = 1 \ , \ \vec{\mathrm{x}}_3 = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \lambda_2 = 3 \ , \ \vec{x}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Lema 1-11

Ako je A realna simetrična matrica reda n, tada su karakteristične vrednosti λ_i , $\mathrm{i} = 1,....., n$; realni brojevi a karakteristični vektori $\vec{x}_1, \vec{x}_2,....\vec{x}_n$ su međusobno ortogonalni.

Napomena:

Kako se na osnovu Leme 1-10, karakteristični vektori mogu normirati deobom sa svojom dužinom, za simetrične matrice uvek možemo posmatrati orto-normirane karakteristične vektore i označavamo ih sa $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n$;

$$\vec{e}_i' \vec{e}_j = \begin{cases} 0 \quad , \quad i \neq j \\ 1 \quad , \quad i = j \end{cases}$$

Primer 1-15

Za matricu $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ iz Primera 1-14, koja nije simetrična matrica, karakteristični vektori $\vec{x}_3 = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$ i $\vec{x}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

su normirani vektori ali nisu ortogonalni:

$$\vec{x}_3' \vec{x}_3 = 1 \quad , \quad \vec{x}_4' \vec{x}_4 = 1 \quad , \quad \vec{x}_3' \vec{x}_4 \neq 0$$

Definicija 1-18 (Generalisano odstojanje)

Generalisano odstojanje vektora $\vec{x}$ i $\vec{y}$; $D(\vec{x}, \vec{y}) = c$

definisano je kao pozitivni koren kvadratne forme

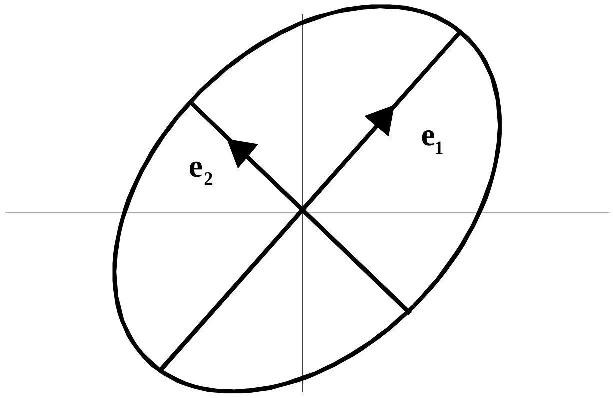
$$(\vec{y} - \vec{x})' A (\vec{y} - \vec{x})$$

simetrične pozitivno definitne matrice A, pri čemu je:

$$c^2 = (\vec{y} - \vec{x})' A (\vec{y} - \vec{x})$$

Lema 1-12

Sve tačke $\vec{x}' = \lfloor x_1, x_2, \ldots.., x_p \rfloor$ koje su na istom konstantnom generalisanom odstojanju, od koordinatnog početka: $c = D(\vec{x}, \vec{0})$, leže na hiper-elipsi (za p=2 elipsi) čija su usmerenja osa data karakterističnim vektorima $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots.., \vec{e}_p$, simetrične pozitivno definitne matrice A. Dužine poluosa su: $c/\sqrt{\lambda_i}$, pri čemu su λ_i dgovarajuće karakteristične vrednosti (slika 1-5).



slika 1-5

(Kontura ekvi-distantne elipse, tačaka na konstantnom generalisanom odstojanju c od (0,0); p=2 ; $c^2 = \vec{x}'A\vec{x}$)

Primer 1-16

Za simetričnu matricu $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ i odgovarajuću kvadratnu formu

$\vec{x}'A\vec{x} = x_1^2 - 10x_1x_2 + x_2^2$, odgovarajući parovi karakterističnih vrednosti/vektora $(\lambda_1, \vec{e}_1)$, $(\lambda_2, \vec{e}_2)$ su:

$$\lambda_1 = 6 \ , \ \lambda_2 = -4 \quad , \quad \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \ , \ \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Dobijeni karakteristični vektori su orto-normirani, ali kao matrica A nije pozitivno definitna (kvadratna forma $\vec{x}'A\vec{x} = x_1^2 - 10x_1x_2 + x_2^2$ nije pozitivna za sve vrednosti vektora $\vec{x}$) to nije moguće definisati generalisano odstojanje, a samim tim ni skicirati ekvi-distantnu elipsu odstojanja tačaka od koordinatnog početka.

Napomena:

Za c=1 ekvi-distantna elipsa konstantnih odstojanja od tačke (0,0) i uprkos postojanja vektora usmerenja osa elipse $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_2$, nema definisano odstojanje, pa samim tim ni dužine osa. Naime dužine osa su $D_1 = 1/\sqrt{6}$ i $D_2 = 1/\sqrt{-4}$, pri čemu D_2 nije realan broj.

Definicija 1-19 (Spektralna dekompozicija)

Spektralna dekompozicija simetrične matrice A reda k je:

$$A_{k,k} = \lambda_1 \vec{e}_1 \vec{e}_1' + \lambda_2 \vec{e}_2 \vec{e}_2' + ... + \lambda_k \vec{e}_k \vec{e}_k'$$

Pri čemu su $(\lambda_i, \vec{e}_i)$ parovi karakterističnih vrednosti i orto-normiranih karakterističnih vektora matrice A.

Primer 1-17

Za matricu $A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$ aspektralna dekompozicija je:

$A = \lambda_1 \vec{e}_1 \vec{e}_1' + \lambda_2 \vec{e}_2 \vec{e}_2'$; Pri čemu je $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 1$ i $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/\sqrt{3} \\ -\sqrt{3}/3 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{bmatrix}$

Lema 1-13

Simetrična matrica reda k je pozitivno definitna, ako i samo ako su sve karakteristične vrednosti pozitivni brojevi.

GLAVA 2

(PARAMETRI I OCENE PARAMETARA VIŠE-DIMENZIONALNIH RASPODELA)

Definicija 2-1 (Parametri više-dimenzionalnih raspodela)

Za slučajni vektor $\vec{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ . \\ . \\ . \\ X_p \end{bmatrix}$, pri čemu su X_i , $i = 1,......., p$

slučajne veličine, definisani su sledeći parametri:

a. Vektor očekivanih vrednosti:

$$\vec{\mu} = E(\vec{X}) = \begin{bmatrix} E(X_1) \\ . \\ . \\ . \\ E(X_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ . \\ . \\ . \\ \mu_p \end{bmatrix}$$

b. Disperziono-Kovarijaciona matrica:

$$\sum = E\{(\vec{X} - \vec{\mu})(\vec{X} - \vec{\mu})\} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{1p} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{2p} \\ \alpha_{p1} & \alpha_{p2} & \alpha_{pp} \end{bmatrix} = [\alpha_{ij}]$$

Pri čemu je:

$\alpha_{ii} = \alpha_i^2 = E(X_i - \mu_i)^2$, Varijansa slučajne komponenete X_i

$\alpha_{ij} = E\{(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)\} = \alpha_{ji}$, Kovarijansa slučajnih komponenti

$$X_i \text{ i } \mathrm{X_j} \ ; \ \mathrm{i, j = 1, ..., p} \ ; \ \mathrm{i \neq j}$$

c. Korelaciona matrica:

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{1p} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{2p} \\ \rho_{p1} & \rho_{p2} & 1 \end{bmatrix} = [\rho_{ij}] \quad , \text{ Pri čemu je } \rho_{ij} = \rho_{ji} = \frac{\alpha_{ij}}{\sqrt{\alpha_{ii}\alpha_{jj}}}$$

d. Matrica standardnih devijacija:

$$V^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\alpha_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\alpha_{pp}} \end{bmatrix}$$

e. Generalisana varijansa:

$$|\Sigma| = \det(\Sigma)$$

Definicija 2-2 (Generalisano statističko odstojanje)

Generalisano statističko odstojanje vektora $\vec{x}$ i $\vec{\mathrm{y}}$: $D(\vec{x}, \vec{y}) = c$

definisano je kao pozitivni koren kvadratne forme

$$(\vec{y} - \vec{x})' \sum^{-1} (\vec{y} - \vec{x})$$

simetrične pozitivne definitne, disperziono-kovarijacione matrice Σ ;

pri čemu je:

$$c^2 = (\vec{y} - \vec{x})' \sum{}^{-1} (\vec{y} - \vec{x})$$

Primer 2-1

Slučajni vektor $\vec{x}' = [x_1, x_2]$ ima Uniformnu raspodelu na oblasti

$$D = ((x_1, x_2) : 0 < \mathrm{x}_1 \ , \ 0 < \mathrm{x}_2 < 1)$$

Odredi:

a. Vektor očekivanih vrednosti.

b. Disperziono-Kovarijacionu matricu Σ

c. Σ^{-1}

d. Korelacionu matricu.

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 \ ; \ (\mathrm{x}_1, x_2) \in D \\ 0 \ ; \ (\mathrm{x}_1, x_2) \notin D \end{cases}$$

$$f(x_1) = \begin{cases} 1 \ ; & 0 < \mathrm{x}_1 < 1 \\ 0 \ ; & \text{van} \end{cases} \qquad \text{i} \qquad f(x_2) = \begin{cases} 1 \ ; & 0 < \mathrm{x}_2 < 1 \\ 0 \ ; & \text{van} \end{cases}$$

a. $\vec{\mu} = [1/2 \, , \, 1/2]'$

b. $E(x_1 * x_2) = 1/4 \quad \rightarrow \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = 1/4 - 1/2 * 1/2 = 1/12$

$\rightarrow \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 1/12 & 0 \\ 0 & 1/12 \end{bmatrix}$

c. $\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$

d. $\rho = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

e. $|\Sigma| = 0.0064$

Primer 2-2

Posmatraju se dve tačke, date vektorima $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}$ i $\vec{\mathrm{x}}_2 = \begin{Bmatrix} 5 \\ 5 \end{Bmatrix}$ kao realizacije slučajnog vektora $\vec{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$, za koji je poznat varijabilitet, dat disperziono-kovarijacionom matricom $\Sigma = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Odredi Euklidsko i generalisano statističko odstojanje tačaka od koordinatnog početka. Koja od ovih tačaka je blizu koordinatnom početku, zavisno od posmatranih odstojanja.

Euklidsko odstojanje $d(\vec{x}, \vec{y}) = c$, tačaka datih vektorima $\vec{x}$ i $\vec{\mathrm{y}}$ dato je kvadratom odstojanja: $c^2 = (\vec{y} - \vec{0})'(\vec{y} - \vec{0})$ a generisano statističko odstojanje vektora $\vec{x}$ i $\vec{y}$, $D(\vec{x}, \vec{y}) = c$, zavisno od simetrične pozitivno definitne matrice Σ, dato je kvadratom odstojanja: $c^2 = (\vec{y} - \vec{0})' \Sigma^{-1} (\vec{y} - \vec{0})$

Imamo da je:

$$d_1(\vec{x}_1, \vec{0}) = 10.05 \quad , \quad \mathrm{D}_1(\vec{x}_1, \vec{0}) = 4.58$$
$$d_2(\vec{x}_2, \vec{0}) = 7.07 \quad , \quad \mathrm{D}_2(\vec{x}_2, \vec{0}) = 5.48$$
$$\rightarrow \ \mathrm{d}_1 > d_2 \quad \mathrm{i} \quad \mathrm{D}_1 < D_2$$

Rezultat na prvi pogled izgleda nelogično. Pri računanju Euklidskog rastojanja tačaka, korišćeno je pravolinijsko odstojanje, dok je pri računanju generalisanog statističkog odstojanja uzimana u obzir i činjenica o varijabilitetu tačaka slučajnih komponenti vektora. Naime, varijabilitet tačaka vektora po pravcu komponente X_1je $\alpha_{11} = 5$ i veći je od varijabiliteta tačaka vektora po pravcu komponente X_2 koji iznosi $\alpha_{22} = 1$. Uzevši to u obzir "otežavamo" više tačke sa većim varijabilitetom, od tačke sa manjim varijabilitetom ("retkim tačkama"), i zato je tačka x_1"statistički" bliza koordinatnom početku od tačke x_2 .

Lema 2-1

Za linearnu transformaciju slučajnih promenjivih $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_p$

$$\vec{Z} = C\vec{X}$$

$$\vec{Z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \\ z_q \end{bmatrix}, \quad \vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_p \end{bmatrix}, \quad C = C_{q,p} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{1p} \\ c_{q1} & c_{qp} \end{bmatrix}$$

vektor očekivanih vrednosti i disperziono-kovarijaciona matrica slučajnog vektora $\vec{Z}$ dati su sa :

a. $\vec{\mu}_z = C\vec{\mu}_x$

b. $\sum_z = C \sum_x C'$

<u>Posledica 2-1</u>

Ako je matrica C iz Leme 2-1 data kao vektor vrsta $c' = \lfloor c_1, c_2, \ldots\ldots, c_p \rfloor$, tada za linearnu transformaciju $c'\vec{X} = c_1 X_1, c_2 X_2, \ldots\ldots, c_p X_p$ imamo:

a. $E\left(c'\vec{X}\right) = \vec{c}\,'\vec{\mu} = c_1\mu_1, c_2\mu_2, \ldots\ldots, c_p\mu_p$

b. $Var\left(c'\vec{X}\right) = \vec{c}\,' \sum \vec{c}$

Primer 2-1

Dat je slučajni vektor $\vec{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ sa $\vec{\mu}_x = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$ i $\sum_x = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$

Odredi vektor očekivanih vrednosti i disperziono-kovarijacionu matricu, linearnih kombinacija $Z_1 = X_1 - X_2$ i $Z_2 = X_1 + X_2$ u funkciji od $\vec{\mu}_x$ i $\sum_x$.

$$\vec{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} \quad , \quad \vec{Z} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = C\vec{X} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a.

$$\vec{Z} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = C\vec{X} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mu}_z = C\vec{\mu}_x = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 & -\mu_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{bmatrix}$$

b. $\sum_z = C \sum_x C' = \begin{bmatrix} \alpha_{11} - 2\alpha_{12} + \alpha_{22} & \alpha_{11} - \alpha_{22} \\ \alpha_{11} - \alpha_{22} & \alpha_{11} + 2\alpha_{12} + \alpha_{22} \end{bmatrix}$

Napomena:

Ako slučajne veličine X_1 i X_2 imaju iste varijanse $\alpha_{11} = \alpha_{22}$ i ako su nekorelirane slučajne veličine $(\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0)$ onda je disperziono-kovarijaciona matrica slučajnog vektora $\vec{Z}$ data su:

$$\sum_z = C \sum_x C' = \begin{bmatrix} \alpha_{11} + \alpha_{22} & 0 \\ 0 & \alpha_{11} + \alpha_{22} \end{bmatrix}$$

Znači da su zbir i razlika dve nekorelirane slučajne veličine X_1 i X_2 sa istom varijansom, slučajne veličine $, Z_1 = X_1 - X_2$ i $Z_2 = X_1 + X_2$, koje su takođe nekorelirane i imaju istu varijansu

$$Var(Z_1) = Var(Z_2) = (\alpha_{11} + \alpha_{22}).$$

Primer 2-2

Ako je slučajni vektor $\vec{Z}* = \begin{bmatrix} X* \\ Y* \end{bmatrix}$ vektor standardizovanih i normiranih slučajnih komponenti slučajnog vektora $\vec{Z} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ dokazati da je:

a. Korelaciona matrica slučajnog vektora $\vec{Z}*$ identična sa korelacionom matricom slučajnog vektora $\vec{Z}$:

$$\rho_{\vec{z}*} = \rho_{\vec{z}}$$

b. Korelaciona matrica slučajnog vektora $\vec{Z}*$ identična sa svojom disperziono-kovarijacionom matricom: $\rho_{\vec{z}*} = \sum_{\vec{z}*}$

Dokaz:

$$X* = \frac{(X-\mu_1)}{\alpha_1}\ , \quad Y* = \frac{(Y-\mu_2)}{\alpha_2}\ , \quad E(X) = \mu_1\ , \quad E(Y) = \mu_2$$

$$Var(X) = \alpha_{11}\ , \quad Var(Y) = \alpha_{22}\ , \quad \sqrt{\alpha_{11}} = \alpha_1\ , \quad \sqrt{\alpha_{22}} = \alpha_2$$

$$\rightarrow \quad E(X*) = E(Y*) = 0 \qquad \text{....}(*1)$$

$$\rightarrow \quad Var(X*) = Var(Y*) = 1 \qquad \text{....}(*2)$$

$$\rightarrow \quad \alpha_{X*Y*} = \alpha_{Y*X*} = E\{(X*-\mu_1)(Y*-\mu_2)\} \overset{*1}{=} E(X*Y*) =$$

$$E\left\{\frac{(X-\mu_1)}{\alpha_1}\frac{(Y-\mu_2)}{\alpha_2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\alpha_{xy} = \rho_{xy} \qquad \text{....}(*3)$$

$$\rightarrow \quad \rho_{x*y*} = \frac{\alpha_{x*y*}}{\sqrt{\alpha_{x*x*}}\sqrt{\alpha_{y*y*}}} \overset{*2}{=} \alpha_{x*y*} \overset{*3}{=} \rho_{xy} \qquad \text{....}(*4)$$

a. $$\rho_{x*y*} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{x*y*} \\ \rho_{x*y*} & 1 \end{bmatrix} \overset{*4}{=} \begin{bmatrix} 1 & \rho_{xy} \\ \rho_{xy} & 1 \end{bmatrix} = \rho_{\vec{z}} \qquad \text{....}(*5)$$

b. $$\sum_{\vec{z}} = \begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{x*y*} \\ \alpha_{x*y*} & \alpha_{yy} \end{bmatrix} \overset{*2}{=} \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{x*y*} \\ \alpha_{x*y*} & 1 \end{bmatrix} \overset{*3}{=} \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{xy} \\ \alpha_{xy} & 1 \end{bmatrix} = \rho_{\vec{z}} \overset{*5}{=} \rho_{\vec{z}*} \rightarrow \sum_{\vec{z}*} = \rho_{\vec{z}*}$$

Definicija 2-2 (Matrica podataka)

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = C\vec{X}\ , \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Za p-dimenzionalni slučajni vektor $\vec{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ . \\ X_p \end{bmatrix}$, na osnovu uzorka obima n , formira se matrica podataka:

$$X = X_{pn} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & . & . & . & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & . & . & . & x_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ x_{p1} & x_{p2} & . & . & . & x_{pn} \end{bmatrix} = \left[x_{ij}\right] ;$$

Pri čemu je: x_{ij} j-to merenje, i-te komponente vektora $\vec{X}$. Na osnovu dobijene matrice podataka, mogu se izračunati ocene parametara slučajnog vektora $\vec{X}$;

a. Ocena vektora očekivanih vrednosti $\vec{\mu} = E\left(\vec{X}\right) = \begin{bmatrix} E(X_1) \\ . \\ . \\ . \\ E(X_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ . \\ . \\ . \\ \mu_p \end{bmatrix}$ je vektor uzoračkih sredina : $\vec{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ . \\ X_p \end{bmatrix}$; pri čemu je $\overline{X}_i = 1/n \sum_{j=1}^{n} X_{ij}$ uzoračka sredina, i-te komponente vektora $\vec{X}$.

b. Ocena disperziono-kovarijacione matrice

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & & \alpha_{1p} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & & \alpha_{2p} \\ & & & \\ \alpha_{p1} & \alpha_{p2} & & \alpha_{pp} \end{bmatrix} = \left[\alpha_{ij}\right]$$

je uzoračka disperziono-kovarijaciona matrica:

$S_n = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & & S_{1p} \\ S_{21} & S_{22} & & S_{2p} \\ & & & \\ S_{p1} & S_{p2} & & S_{pp} \end{bmatrix} = \left[S_{ij}\right]$; pri čemu je:

$S_{ij} = 1/n \sum_{k=1}^{n} \left(X_{ik} - \overline{X}_i\right)\left(X_{jk} - \overline{X}_j\right)$, pristrasna ocena za α_{ij} .

c. Nepristrasna ocena disperziono-kovarijacione matrice Σ je:

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{1p} \\ S_{21} & S_{22} & S_{2p} \\ \\ S_{p1} & S_{p2} & S_{pp} \end{bmatrix} = \frac{n}{n-1} S_n = [S_{ij}]$$ pri čemu je

$S_{ij} = 1/(n-1)\sum_{k=1}^{n}(X_{ik} - \overline{X}_i)(X_{jk} - \overline{X}_j)$ nepristrasna ocena za α_{ij} .

Ocena S “bolja” iako se podrazumevaju uzorci “velikog” obima. Koristićemo nepristrasnu uzoračku disperziono-kovarijacionu matricu S za ocenjivanje matrice $\sum$.

d. Generalisana uzoračka varijansa je: $|S| = \det(S)$

e. Ocena korelacione matrice ρ je uzoračka korelaciona matrica R:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{1p} \\ r_{21} & 1 & r_{2p} \\ r_{p1} & r_{p2} & 1 \end{bmatrix}$$; pri čemu je $r_{ij} = r_{ji} = \frac{s_{ij}}{\sqrt{s_{ii}s_{jj}}}$

Lema 2-2

Uzorak obima n, p-dimenzionalne slučajne promenjive $\vec{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ . \\ . \\ . \\ X_p \end{bmatrix}$ **može se**

predstaviti i kao realizacija slučajne n-torke $(\vec{X}_1, \vec{X}_2, ...\vec{X}_n)$ **, u oznaci** $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ...\vec{x}_n)$ **,**

pri čemu su $\vec{X}_1$, i=1,....,n ; p-dimenzionalni slučajni vektori $\vec{X}_i = \begin{bmatrix} X_{1i} \\ . \\ . \\ . \\ X_{pi} \end{bmatrix}$ a vektori

kolone $\vec{x}_i = \begin{bmatrix} \vec{x}_{1i} \\ . \\ . \\ . \\ \vec{x}_{pi} \end{bmatrix}$, odgovarajuće realizacije.

Dakle, imamo da je matrica podataka $X_{pn} = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, ...\vec{x}_n]$.

Na osnovu toga , moguće je vektor uzoračkih sredina i nepristrasnu uzoračku disperziono-kovarijacionu matricu, računati koristeći matrične i vektorske operacije:

a. Na osnovu matrice podataka imamo:

$\overline{X} = 1/n \cdot X_{pn}\vec{1}$, pri čemu je vektor $\vec{1}' = [1,1,....1]$ i

$S = 1/(n-1)X_{pn}X'_{pn} - n/(n-1)\overline{X} \cdot \overline{X}'$

b. Na osnovu slučajnog uzorka $\left(\vec{X}_1, \vec{X}_2, ...\vec{X}_n\right)$ imamo $\overline{S} = 1/n\sum_{j=1}^{n}\left(\vec{X}_j - \overline{X}\right)\left(\vec{X}_j - \overline{X}\right)$

Napomenimo da od ova tri načina računanja najpogodniji je rad sa matricom podataka.

Primer 2-3

Data je matrica podataka $X_{pn} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Odredi:

a. Vektor uzoračkih sredina
b. Uzoračku disperziono-kovarijacionu matricu (nepristrasnu)
c. Uzoračku korelacionu matricu

I - Način

a. Za $\overline{X}_1 = 1/n\sum_{j=1}^{n} X_{ij}$, $i = 1,2$ imamo

$$\bar{x}_1 = 1/3(0+2+4) = 2 \quad , \quad \bar{x}_2 = 1/3(4-1+0) = 1 \quad \rightarrow \quad \bar{X} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b. Za $S_{ij} = 1/n\sum_{k=1}^{n}\left(X_{ik} - \bar{X}_i\right)\left(X_{jk} - \bar{X}_j\right)$ imamo

$$s_{11} = 1/2\left\{(0-2)^2 + (2-2)^2 + (4-2)^2\right\} = 4$$
$$s_{22} = 1/2\left\{(4-1)^2 + (-1-1)^2 + (0-1)^2\right\} = 7$$
$$s_{12} = 1/2\{(0-2)(4-1) + (2-2)(-1-1) + (4-2)(0-1)\} = -4$$

Uzoračka disperziono-kovarijaciona matrica je $S = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$

II - Način

a. Koristimo $\bar{X} = 1/n\, X_{pn}\vec{1} \rightarrow \bar{\mathrm{X}} = 1/3\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

b. Koristimo
$$S = 1/(n-1)\, X_{pn} X'_{pn} - n/(n-1)\,\overline{X}\overline{X}'$$
$$\rightarrow \mathrm{S} = 1/2\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - \frac{3}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}[2,1] = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$$

III Način

a. Koristimo $\bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\vec{X}_j$; pri čemu je

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad , \quad \vec{\mathrm{x}}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad , \quad \vec{\mathrm{x}}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\rightarrow \quad \bar{\mathrm{x}} = \frac{1}{3}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b. Koristimo
$$S = \frac{1}{(n-1)}\sum_{j=1}^{n}\left(\vec{x}_j - \bar{x}\right)\left(\vec{x}_j - \bar{x}\right)$$
$$\rightarrow \quad \mathrm{S} = \frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}[-2,3] + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}[0,-2] + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}[2,-1]\right\} = S = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$$

c. $R = \begin{bmatrix} 1 & -0.75 \\ -0.75 & 1 \end{bmatrix}$

GLAVA - 3

(VIŠE-DIMENZIONALNA NORMALNA RASPODELA)

Definicija 3-1

Generalizacija slučajne veličine X, koja ima jedno-dimenzionalnu Normalnu raspodelu $N(\mu, \alpha^2)$, sa funkcijom gustine verovatnoća (f.g.v.):

$$f(x) = \frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\alpha^2}} \quad , \quad -\infty < x < +\infty$$

u p-dimenzionalni slučajni vektor $\vec{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ . \\ . \\ . \\ X_p \end{bmatrix}$, sa više-dimenzionalnom normalnom

$N_p(\vec{\mu}, \Sigma)$ raspodelom, data je sa f.g.v. :

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\Sigma|^{1/2}} e^{-1/2 (\vec{x}-\vec{\mu})' \Sigma^{-1} (\vec{x}-\vec{\mu})}$$

za $-\infty < x_i < +\infty$; $i = 1,2,.....,p$. Pri tome je $\vec{\mu}$, vektor očekivanih vrednosti a Σ disperziono-kovarijaciona matrica.

Lema 3-1

a. Za p=1 f.g.v. $f(\vec{x})$ se svodi na:

$$f(x) = \frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\alpha^2}} \quad , \quad -\infty < x < +\infty$$

Pri čemu je: $\vec{x} = x$, $\vec{\mu} = \mu$, $\Sigma = \alpha^2$, $\Sigma^{-1} = 1/\alpha^2$, $\det \Sigma = \alpha^2$

$$\text{i} \quad f(x) = ke^{-\frac{1}{2}c^2} \quad ; \quad \mathrm{c}^2 = (x-\mu)\alpha^{-2}(x-\mu) \ , \ \mathrm{k} \in \mathrm{r}$$

b. Za p=2 f.g.v. $f(\vec{x})$ se svodi na:

c. $f(x,y) = ke^{-\frac{1}{2}c^2}$; pri čemu je

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}, \quad \vec{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \quad , \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 & \alpha_1\alpha_2\alpha \\ \alpha_1\alpha_2\alpha & \alpha_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_{11} = \alpha_1^2 \ , \quad \alpha_{22} = \alpha_2^2 \ , \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = \mathrm{cov}(X,Y)$$

$$|\Sigma| = \alpha_1^2\alpha_2^2(1-\rho^2) \quad , \quad \mathrm{k} = \frac{1}{(2\pi)\alpha_1\alpha_2(1-\rho^2)}$$

$$c^2 = (\vec{x}-\vec{\mu})' \, \Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu}) =$$

$$= \frac{1}{1-\rho^2}\left\{\left(\frac{\vec{x}-\vec{\mu}_1}{\alpha_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{\vec{x}-\vec{\mu}_1}{\alpha_1}\right)\left(\frac{\vec{y}-\vec{\mu}_2}{\alpha_2}\right) + \left(\frac{\vec{y}-\vec{\mu}_2}{\alpha_2}\right)^2\right\}$$

Lema 3-2

Za standardizovani i normirani slučajni vektor $\vec{Z}^* = \begin{bmatrix} X^* \\ Y^* \end{bmatrix}$ f.g.v. je

$$f(\vec{z}) = \frac{1}{(2\pi)(1-\rho^2)} e^{-\frac{1}{2}(\vec{z}^*)' \, \Sigma_z^{-1}(\vec{z}^*)}$$

Pri čemu je $E(\vec{Z}^*) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $\Sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$

Primer 3-1

Za slučajne komponente vektora $\vec{Z} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$: $N_2(\vec{\mu}, \Sigma)$ važi da ako su nekorelirane, onda su i nezavisne slučajne veličine. (Napomenimo da obratno važi i bez pretpostavke o normalnoj raspodeli)

$$Cov(X,Y)=0 \;\rightarrow\; \rho=0 \;\rightarrow\; \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})=f(x)\,f(y)$$

Lema 3-3

Ako je $(\lambda,\vec{e})$ par karakterističnih vrednosti/vektora, pozitivno definitne matrice Σ, onda je $(1/\lambda,\vec{e})$ par karakterističnih vrednosti/vektora Σ^{-1}.

Lema 3-4

Kontura funkcije gustine verovatnoća, p-dimenzionalne Normalne raspodele, sa konstantnom vrednošću (f.g.v), je hiper-elipsa definisana za vrednosti $\vec{x}$, tako da za kvadrat generalisanog statističkog odstojanja tačaka $\vec{x}$ od centra $\vec{\mu}$ važi:

$$c^2=(\vec{x}-\vec{\mu})'\,\Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})$$

$$c^2=(\vec{x}-\vec{\mu})'\,\Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})$$

Pri tome je centar hiper-elipse $\vec{\mu}$, a ose su orjentisane u pravcima vektora $\vec{e}_i$ (karakterističnih vektora disperziono-kovarijacione matrice Σ). Dužine poluosa su $\sqrt{c^2\lambda_i}$, pri čemu su λ_i odgovarajuće karakteristične vrednosti.

Sve tačke $\vec{x}$, koje se nalaze na konstantnom generalisanomstatističkom odstojanju od $\vec{\mu}$

zadovoljavaju: $c^2=(\vec{x}-\vec{\mu})'\,\Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})$, a za sve tačke koje se nalaze unutar hiper-elipse

važi: $(\vec{x}-\vec{\mu})'\,\Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})\le c^2$

Primer 3-2

Posmatra se 2-dimenzionalna Normalna raspodela slučajnog vektora

$$\vec{X}=\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}\;:\;\mathrm{N}(\mu_1,\mu_2,\alpha_1,\alpha_2,\rho)$$

data sa $\vec{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$, $\Sigma = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$; pri čemu je varijansa komponenti ista:

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha^2 .$$

Odredi konturu (f.g.v.) na konstantnoj visini od ravni x,y.

Kako iz $|\Sigma - \lambda I| = 0$ sledi:

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 - \lambda & \alpha_{12} \\ \alpha_{12} & \alpha^2 - \lambda \end{vmatrix} = (\alpha^2 - \lambda) - \alpha_{12}^2 = 0 \ \rightarrow \ \begin{cases} \lambda_1 = \alpha^2 + \alpha_{12} \\ \lambda_2 = \alpha^2 - \alpha_{12} \end{cases}$$

Odgovarajući karakteristični vektori zadovoljavaju:

$$\Sigma \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha_{12} \\ \alpha_{12} & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1' \\ e_2' \end{bmatrix} = (\alpha^2 + \alpha_{12}) \begin{bmatrix} e_1' \\ e_2' \end{bmatrix} = \lambda_1 \vec{e}_1 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ \begin{cases} \alpha^2 e_1' + \alpha_{12} e_2' = (\alpha^2 + \alpha_{12}) e_1' \\ \alpha_{12} \ e_1' + \alpha^2 \ e_2' = (\alpha^2 + \alpha_{12}) e_2' \end{cases}$$

$$\rightarrow \ \begin{cases} e_1' \alpha_{12} - e_2' \alpha_{12} = 0 \\ e_1' \alpha_{12} - e_2' \alpha_{12} = 0 \end{cases} \ \rightarrow \ e_1' \alpha_{12} - e_2' \alpha_{12} = 0$$

$$\rightarrow \quad e_1' = e_2' = k \in R \quad \rightarrow \quad \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \|\vec{e}_1\| = +a\sqrt{2}$$

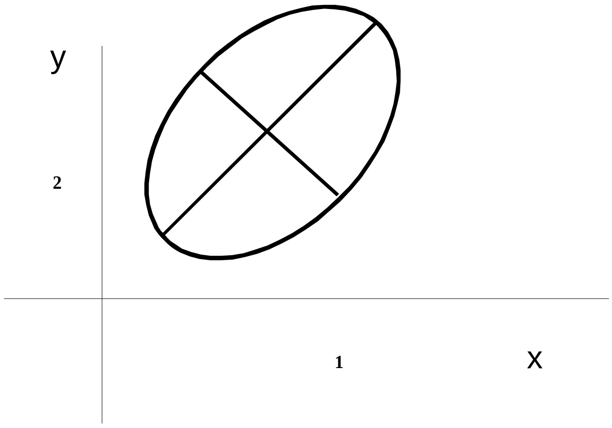
Posle normiranja vektora, imamo da je $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

Slično tome za karakterističnu vrednost λ_2, posle rešavanja sistema jednačina i posle normiranja vektora, imamo da je drugi karakteristični vektor $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

Kontura elipse (slika 3-1-a) koja se nalazi na istoj visini h, od ravni x,y je:

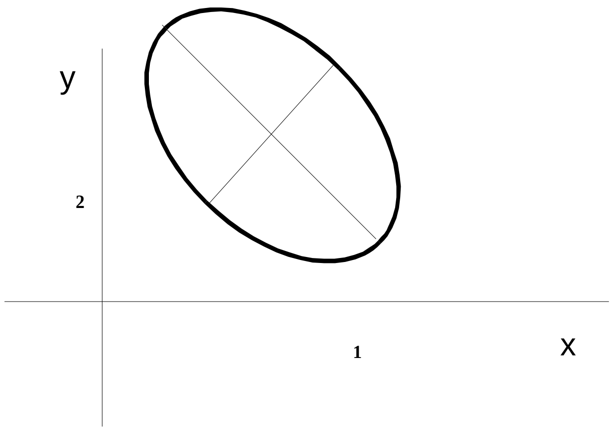
$h = ke^{-\frac{1}{2}c^2}$; pri čemu je $k = \dfrac{1}{(2\pi)\alpha^2(1-\rho^2)}$

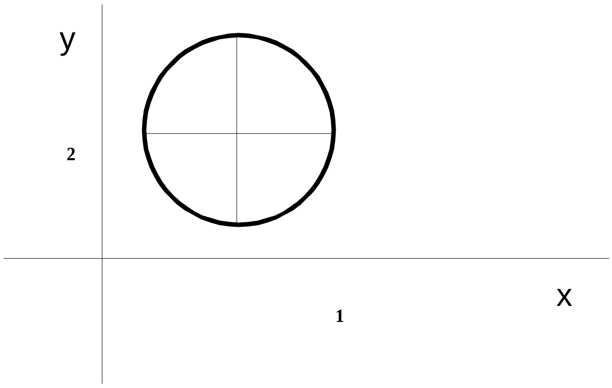
i $c^2 = (\vec{x} - \vec{\mu})' \, \Sigma^{-1} (\vec{x} - \vec{\mu})$ kvadrat generalisanog statističkog odstojanja svih tačaka na hiper-elipsi “statistički podjednako” udaljenih od centra $\vec{\mu}$.



$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha^2 \ , \ \rho = \alpha_{12} / \alpha^2 > 0$$

slika 3-1-a





$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha^2 \ , \ \rho = \alpha_{12} / \alpha^2 < 0$$

3-1-a

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha^2 \ , \ \rho = 0$$

3-1-a

slika 3-1

Primer 3-3

Za slučajnu veličinu X, koja ima Normalnu $N(\mu,\alpha^2)$ raspodelu, odredi oblast, za koju je generalisano statističko odstojanje manje od c=3. Skiciraj tu oblast. Odredi visinu konture tačaka (f. g. v.) koja su na konstantnom generalisanom statističkom odstojanju od μ.

Za $X : N(\mu,\alpha^2)$ imamo $\Sigma = [\alpha^2] = \alpha^2 \in R$, $\vec{\mu} = \mu \in \mathrm{R}$, $\vec{\mathrm{x}} = \mathrm{x} \in \mathrm{R}$

Sve tačke koje se nalaze unutar konture sa ekvi-distantnim statističkom odstojanjem, zadovoljavaju nejednačinu:

$(\vec{x}-\vec{\mu})' \Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu}) < c^2$ ili za $N(\mu,\alpha^2)$ raspodelu koja ima (f. g. v.)

$$f(x) = \frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\mathrm{x}-\mu)}{2\alpha^2}} \quad , \quad -\infty < \mathrm{x} < +\infty$$

$$(\mathrm{x}-\mu)\alpha^{-2}(x-\mu) < c^2$$

pri čemu su $\alpha^2, \mu, c \in R$.

$$\rightarrow \quad (\mathrm{x}-\mu)^2 = c^2\alpha^2 \;\rightarrow\; (\mathrm{x}-\mu) = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \mu + \infty \\ x = \mu - \infty \end{cases}$$

Dakle, sve tačke koje se nalaze unutar oblasti sa generalisanim statističkim odstojanjem manjim od c, zadovoljavaju:

$$\mu - c\alpha < x < \mu + c\alpha$$

Odredimo, usmerenje osa i dužine poluosa, ekvi-distantne konture.

Karakteristična vrednost $\lambda = ?$

$$|\Sigma - \lambda I| = |\alpha^2 - \lambda| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \alpha^2 \in R$$

Karakteristični vektor $\vec{e} = ?$

$$\Sigma\vec{e} = \lambda\vec{e} \quad \rightarrow \quad \alpha^2\vec{e} = \alpha^2\vec{e} \quad \rightarrow \quad \vec{\mathrm{e}} = \mathrm{a} \in \mathrm{R} \quad \rightarrow \quad \vec{\mathrm{e}} = \mathrm{a}/|\mathrm{a}| = (+/-)1$$

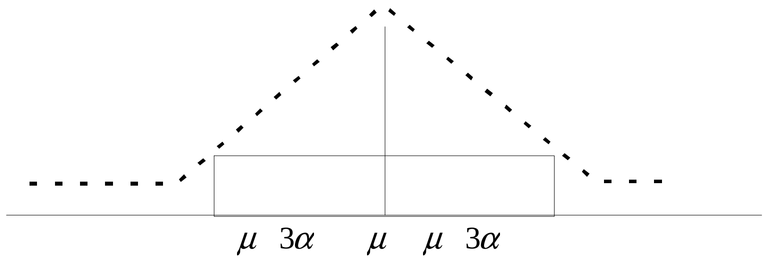
U mogućnosti smo da proizvoljno izaberemo vrednost realnog broja “a”, a samim tim i znak. S toga uzimamo za karakteristični vektor pozitivnu orjentaciju, a posle normiranja i jediničnu dužinu $\rightarrow$ $\vec{\mathrm{e}} = 1$

Napomena:

Stavljajući da je c=3, dobijamo da se sve tačke koje se nalaze na generalisanom statističkom odstojanju manjem od 3, nalaze unutar intervala $[\mu - 3\alpha \ , \ \mu + 3\alpha]$, (slika 3-

2). Napomenimo da je shodno pravilu “tri sigme”, verovatnoća da se slučajno tačka nađe u tom intervalu jednaka 0.9973.

X : N(0,1)



slika 3-2

Odredimo generalisano statističko odstojanje tačaka $\mu-3\alpha$ i $\mu+3\alpha$ od centra μ :

$$D^2(\mu-3\alpha\ ,\ \mu)=(\mu-3\alpha\ \text{-}\ \mu)^2/\alpha^2=9\ \rightarrow\ D\ (\mu-3\alpha\ ,\ \mu)=+\sqrt{9}=3$$

$$D^2(\mu+3\alpha\ ,\ \mu)=(\mu+3\alpha\ \text{-}\ \mu)^2/\alpha^2=9\ \rightarrow\ D\ (\mu+3\alpha\ ,\ \mu)=+\sqrt{9}=3$$

Dakle, tačke koje su na istom generalisanom statističkom odstojanju c=3 od centra μ, nisu na slici grafički predstavljeni kao odstojanje 3, već kao 3α. To još jednom potvrđuje apstraktnost ovako definisanog odstojanja.

Ako odredimo “obično” Euklidsko rastojanje istih tačaka od μ imamo:

$$d^2(\mu-3\alpha\ ,\ \mu)=(\mu-3\alpha\ \text{-}\ \mu)^2=9\,\alpha^2\ \rightarrow\ d\ (\mu-3\alpha\ ,\ \mu)=+\alpha\sqrt{9}=3\alpha$$

$$d^2(\mu+3\alpha\ ,\ \mu)=(\mu+3\alpha\ \text{-}\ \mu)^2=9\,\alpha^2\ \rightarrow\ d\ (\mu+3\alpha\ ,\ \mu)=+\alpha\sqrt{9}=3\alpha$$

Ovo odstojanje je vizuelno i prikazano na slici.

III GLAVA

TESTOVI KOJI SE ODNOSE NA SREDINE

U praktičnom radu se često bavimo analizom sredine (srednjih vrednosti-proseka) uzorka. U tom kontekstu jedna korisna raspodela je raspodela koju je prvi dao W. S . Gosset koji je pisao pod pseudonimom “Student” (1908. godine).

Ovde ćemo razmatrati ovu raspodelu, poznatu pod imenom Studentova t-raspodela, a zatim ćemo izložiti njeno višedimenzionalno uopštenje koje je dao Hotelling 1931. godine. Pored toga posmaatraćemo i f-raspodelu (za različite količnike), a takođe i hi-kvadrat raspodelu i način njihove primene na probleme ovog poglavlja.

3.1. TEST DA JEDNA SREDINA IMA DATU VREDNOST

Kad je varijansa populacije poznata, onda hipotezu H_o : $\mu = \mu_o$ možemo testirati koristeći normalnu raspodelu. statistika je :

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_o}{\alpha_{\bar{x}}} \qquad (3.1)$$

gde je $\alpha_{\bar{x}} = \alpha / \sqrt{\eta}$ za velike uzorke .

međutim, ako nam α^2 nije poznato, tada ga obično ocenjujemo preko uzorka. prirodno je da ocena varijance α^2 bude varijanca uzorka s^2 , pa ako zamenimo α sa s u definiciji standardne greške sredine, dobićemo ocenu standardne greške sredine :

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{\eta}} \qquad (3.2)$$

zamenjujući $\alpha_{\bar{x}}$ sa njegovom ocenom $s_{\bar{x}}$ u jednačini (3 . 1) dobijamo :

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_{\bar{x}}} \qquad (3.3)$$

statistika t ima t-raspodelu sa n-1 stepeni slobode. Dakle, za n observacija X_1 , X_2 , ... , X_n sa sredinom $\mathbf{\bar{x}}$, samo n-1 observacija je nezavisna. drugim rečima , ako je sredina datog niza brojeva određena, onda samo n-1 brojeva mogu biti određeni slučajno. Kad je ovih n-1 brojeva dato, onda n-ti broj mora biti takav da sredina celog niza bude određen broj. Koristićemo simbol ν (ni) za oznaku stepeni slobode.

Primer : Neka je uzorak od 36 igala uzet slučajno iz velike serije igala. Poželjno je imati igle dužine 25 jedinica. Kraće igle se češće lome, a duže mogu izazvati oštećenja opreme u kojoj se koriste.

Odgovarajuće hipoteze za ovaj primer su :

$$H_0 \quad : \quad \mu = 25$$

$$H1 \quad : \quad \mu = 25$$

Pretpostavićemo da će testiranje biti dobro koristeći α = 0. 05. U uzorku je bilo :

$$\bar{x} = 20.0 \ ; \ \ s = 2.0 \ ; \ s_{\bar{x}} \ = \ {}^{2}\!/\!_{\sqrt{36}} = {}^{1}\!/\!_{3}$$

Statistika t je :

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_{\bar{x}}} = 3(20 - 25) = -15$$

a broj stepeni slobode za ovaj test je : ν = n - 1 = 35 .

Iz tablice t-raspodele za α/2 = 0.025 i ν = 35 nalazimo da je $t_0 = \pm$ 2.o3. Pošto je vrednost statistike iz uzorka manja od t_0 , odbacujemo nultu hipotezu , a samim tim i seriju kao nepotobnu. Kad bi bio poželjan jednostrani test, uradili bi na isti način sem što bi kritičnu vrednost odredili za α, a ne za α/2 i naravno, imali bismo jednu kritičnu vrednost.

Dodatne napomene : t-raspodela konvergira standardizovanoj normalnoj raspodeli kad broj stepeni slobode raste. Dakle,

$$\lim_{\nu \to \infty} t_{\alpha;\nu} = z_\alpha$$

Kad je broj stepeni slobode veći od 60, može se normalna raspodela koristiti umesto Studentove t-raspodele sa veoma malim gubitkom tačnosti. Zato se i kaže da t-test treba koristiti kod malih uzoraka. Međutim, razlika između z i t leži u tome da li je varijansa α^2 poznata ili ne, zatim da li je populacija N (μ, α^2) , da li je uzorak veliki pa na osnovu centralne granične teoreme sredine uzorka će imati aproksimativno normalnu raspodelu.

F-raspodela je određena sa dva stepena slobode ν_1 i ν_2 . Kad je $\nu_1 = 1$, onda su F-raspodela i t-raspodela vezane sa:

$$(t_{\alpha/2;\nu_1})^2 = F_{\alpha/\nu_1;\nu_2} \qquad (3.6)$$

3.2. TEST DA JE VEKTOR SREDINA JEDNAK DATOM KONSTANTNOM VEKTORU

Pretpostavimo da imamo p sredina uzorka dobijenih iz n observacija koje su dobijene iz višedimenzionalne raspodele $N_p(\mu, \Sigma)$. Označimo ove sredine kao vektor :

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{x}_2 \\ . \\ . \\ . \\ \bar{x}_p \end{bmatrix} \qquad \text{ili} \qquad \bar{x}' = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_p]$$

Ovaj vektor sredina je ocena sredine populacije

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ . \\ . \\ . \\ \mu_p \end{bmatrix} \qquad \text{ili} \qquad \mu' = [\mu_1, \mu_2, ..., \mu_p]$$

želimo testirati hipotezu da se vektor sredine populacije ne razlikuje od vektora konstanti :

$$\mu_0 = \begin{bmatrix} \mu_{01} \\ \mu_{02} \\ . \\ . \\ . \\ \mu_{0p} \end{bmatrix} \qquad \text{ili} \qquad \mu_0' = [\mu_{01}, \mu_{02}, ..., \mu_{0p}]$$

tj. , želimo testirati hipoteze:

$$H_0 : \mu = \mu_o$$

$$H_1 : \mu = \mu_0$$

Na osnovu definicije jednakosti vektora, želimo testirati hipoteze da je μ_1 jednako μ_{01} za svako i . Drugim rečima, testiramo p nultih hipoteza simultano,

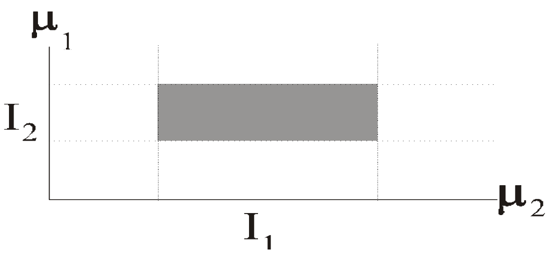
tj. $\mu_0 = \mu_{01}$, H_0 : μ = ${}_2\mu_{02}$, itd.

Problem kojji se javlja pri ovakvom postupku je što se željeni simultani nivo značajnosti ne može tačno odrediti sukcesivnim korišćenjem jednodimenzionalnih intervala. Na primer, pretpostavimo da želimo testirati dve sredine populacije određujući intervale prihvatanja μ_1 i μ_2 koristeći t-test. Označimo interval za μ_1 sa I_1 , a interval za μ_2 sa I_2 . neka su oba ova intervala određena za $\alpha = 0.05$ ($1-\alpha = 0.95$). Tada možemo reći : na osnovu ponavljanja uzoraka verovatnoća da I_1 prekrije μ_1 je 0.95 , a verovatnoća da I_2 prekrije μ_2 je takođe 0.095. Označimo ove verovatnoće sa :

$$ver(E_1) = 0.95 \quad \text{i} \quad ver(E_2) = o.95 \quad ,$$

gde E_1 znači događaj : I_1 prekriva μ_1 , a E_2 znači događaj : I_2 prekriva μ_2 .

Presek ova dva intervala obrazuje pravougaonik prihvatanja, odnosno region kao na slici 3.1.



Slika 3.1 . Region poverenja

Označimo sa $E_1 \cap E_2$ (čitaj E_1 i E_2) istovremeno ostvarenje i E_1 i E_2 . Tada je:

$$ver(E_1 \cap E_2) = ver(E_1)ver(E_2)$$

ako su E_1 i E_2 nezavisni događaji .

U primeru zajednički region prihvatanja ima verovatnoću $0{,}95^2$ ako su E_1 i E_2 nezavisni . Međutim , E_1 i E_2 su retko nezavisni , pogotovu ako se odnose na podatke poslovnih i ekonomskih istraživanja. Ako E_1 i E_2 nisu nezavisni, može se pokazati da je.

$$ver(E_1 \cap E_2) \geq 1-(1-0{,}95)-(1-0{,}95)=0{,}90$$

za intervale sa 95% verovatnoće, ali ne možemo tačno utvrditi simultani nivo značjnosti. U primenjenoj statistici smo često suočeni sa problemom testiranja više sredina (ili sa utvrđivanjem oblasti - regiona poverenja) simultano. Dakle da bi obezbedili željeni simultani nivo značajnosti potreban nam je test koji ispituje sve sredine simultano.

U jednodimenzionalnom testu smo koristili statistiku:

$$t=\frac{\sqrt{n}}{s}(\bar{x}-\mu_0) \qquad (3{,}7)$$

Kvadrirajući obe strane ove jednačine imamo:

$$t^2=n(\bar{x}-\mu_0)(s^2)^{-1}(\bar{x}-\mu_0) \qquad (3{,}8)$$

pa po analogiji Hotellingova T^2 statistika je:

$$T^2=n(\bar{x}-\mu_0)' S^{-1}(\bar{x}-\mu_0) \qquad (3{,}9)$$

odnosno

$$T^2=n\begin{bmatrix}\bar{x}_1 & - & \mu_{01}\\ \bar{x}_2 & - & \mu_{02}\\ - & - & -\\ \bar{x}_p & - & \mu_{0p}\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1p}\\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2p}\\ - & - & - & -\\ s_{p1} & s_{p2} & \dots & s_{pp}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\bar{x}_1 & - & \mu_{01}\\ \bar{x}_2 & - & \mu_{02}\\ - & - & -\\ \bar{x}_p & - & \mu_{0p}\end{bmatrix}$$

U jednačini (3,9) T_2 i n su skalari , a matrica S (koja se reducira u s^2 u jednodimenzionalnom slučaju) data je sa:

$$S=\frac{1}{n-1}x'x \qquad (3{,}10)$$

gde je

$$x=\begin{bmatrix}x_{11}-\bar{x}_1 & x_{12}-\bar{x}_2 & \cdots & x_{1p}-\bar{x}_p\\ x_{21}-\bar{x}_1 & x_{22}-\bar{x}_2 & \cdots & x_{2p}-\bar{x}_p\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ x_{n1}-\bar{x}_1 & x_{n2}-\bar{x}_2 & \cdots & x_{np}-\bar{x}_p\end{bmatrix}$$

T^2 i F su u uzajamnoj vezi - ako je nulta hipoteza tačna, onda je:

$$T^2_{\alpha/p;n-p}=\frac{p(n-p)}{n-p}F_{\alpha/p;n-p} \qquad (3{,}11)$$

Prema tome, kritična vrednost za T2 može biti sračunata preko F-raspodele.

Napomena: Iako koristimo dvostrani test ipak postoji samo jedna kritična vrednost za T2.

Napomena: U specijalnom slučaju kad je p=1, jednačina (3.11) se svodi na:

$$\left(t_{\alpha/2;n-1}\right)^2 = F_{\alpha/1;n-1} \quad .$$

U tom slučaju je takođe:

$$T_{\alpha/2;n-1} = F_{\alpha/1;n-1} \quad .$$

Primer:

Skorovi na verbalnim i kvantitavnim ispitima 10 kandidata za posdiplomske studije su dati u tabeli 3.1 .

Tabela 3.1

Verbalni	Kvantitativni
740	680
670	600
560	550
540	520
590	540
590	700
470	600
560	540
540	630
500	600

```
Proseci:
- verbalni: 576
- kvant.   : 596
```

Ovi studenti su bili izabrani iz grupe studenata koji u redovnom studiranju nisu imali odgovarajući uspeh . Na osnovu ranijih iskustva poznato je da verbalnim skorom od 590 i kvantitativnim skorom od 690 studenti će biti uspešni. želimo proveriti da li se prosečni skorovi ove grupe ne razlikuju od ovog kriterija.

Odgovarajuće hipoteze su:

$$H_0 : \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 590 \\ 690 \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad [\mu_1, \mu_2] = [590{,}690]$$

$$H_1 : \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 590 \\ 690 \end{bmatrix}$$

koje ćemo testirati sa nivoom značajnosti $\alpha = 0.05$. Da bi odredilil statistiku T2 potrebni su nam sledeći elementi:

$$\bar{x} - \mu_0 = \begin{bmatrix} 576 \\ 596 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 590 \\ 690 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 \\ -94 \end{bmatrix}$$

$$x'x = \begin{bmatrix} 164 & 94 & \cdots & -76 \\ 84 & 4 & \cdots & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 164 & 84 \\ 94 & 4 \\ \vdots & \vdots \\ -76 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56240 & 17240 \\ 17240 & 33240 \end{bmatrix}$$

$$S = \frac{1}{n-1} x'x = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 56240 & 17240 \\ 17240 & 33240 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6248.9 & 1915.6 \\ 1915.6 & 3693.3 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 0.00019028 & -0.00009869 \\ -0.00009869 & 0.00032194 \end{bmatrix}$$

Iz jednačine (3.9) izračunaćemo T^2 :

$$T^2 = 10 \begin{bmatrix} -14 & -94 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.00019028 & -0.00009869 \\ -0.00009869 & 0.00032194 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -14 \\ -94 \end{bmatrix} = 26.22$$

Kritična vrednost za T^2, data jednačinom (3.11) , je:

$$T^2_{0.05/2.8} = \frac{29}{8} 4.46 = 10.035$$

jer je: $F_{0,.05/2.8} = 4.46$

Vrednost T^2 iz uzorka je veća od kritične vrednosti. Odbacujemo nultu hipotezu i zaključujemo da se vektor sredine populacije μ značajno razlikuje od vektora μ_0 .

OBLAST (REGION) POVERENJA

Kad se posmatra p sredina simultano , oblast poverenja (interval poverenja u jednodimenzionalnom prostoru) određen je granicom i unutrašnjošću elipsoida u p-dimenzionalnom prostoru. Ako je p sredina posmatrano simultano, tada 100 (1 - α) procentna oblast poverenja biće oivičena sa

$$(\bar{x}-\mu)' S^{-1}(\bar{x}-\mu)=\frac{p(n-1)}{n(n-p)}F_{\alpha,p,n-p} \qquad (3.12)$$

koja sledi iz jednačine (3.9) i (3.11) . Jasno, sve vrednosti na desnoj strani jednačine su skalari a izraz na na levoj strani definiše kvadratnu formu po μ. dakle, jednačina (3.12) određuje elipsoid čiji centar je $\mathbf{\bar{x}}$. U slučaju jedne sredine jednačina (3.12) se reducira na:

$$\frac{(\bar{x}-\mu)^2}{s^2}=\frac{1(n-1)}{n(n-1)}F_{\alpha,1,n-1}$$

Posle korenovanja obe strane dobićemo:

$$\frac{\bar{x}-\mu}{s}=\pm\frac{1}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2,n-1}$$

Dakle , μ je unutar

$$\bar{x}\pm s_{\bar{x}}\left(t_{\alpha/2,n-1}\right)$$

što je poznati rezultat od ranije.

LINEARNE KOMBINACIJE

Ako X ima raspodelu $N_p(\mu, \Sigma)$, a c je p_x1 vektor kolona konstanti čiji svi elementi nisu nule, tada c'x ima raspodelu $N_1(c'\mu, c'\Sigma c)$. Slično ako je c matrica reda p_xq ($q \le p$) ranga q, tada c'x ima raspodelu $N_q(C'\mu m, C'\Sigma)$.

Mogućnost formiranja linearnoh kombinacija elemenata vektora μ omogućava rešenje velikog broja testova koristeći T^2. Možemo , na primer, testirati podskup μ stavljajući u nekim kolonama matrice C nule. Sledeći primeri će ilustrovati neke moguće opcije, a u daljim sekcijama koristićemo činjenicu da linearne kombinacije varijabli sa normalnom raspodelom takođe imaju normalnu raspodelu.

Radi ilustracije korišćenja linearnih kombinacija, posmatraćemo slučaj simultanih hipoteza koje se odnose na prvih $q \le p$ sredina populacije. Na primer, želimo da testiramo

$$H_0:\left[\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_p\right]=\left[\mu_{01},\mu_{02},\cdots,\mu_{0q}\right]$$

Ove hipoteze su ekvivalentne

$$H_0: C'\mu = C'\mu_o$$

gde je C' matrica reda q_xp ranga q :

$$C' = \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right]$$
$$\begin{array}{ccc} & & q \end{array}$$

U ovom slučaju T^2 statistika je

$$T^2 = n\left(C'\bar{x} - C'\mu_0\right)'\left(C'SC\right)^{-1}\left(C'\bar{x} - C'\mu_0\right) \qquad (3.15)$$

sa kritičnom vrednošću

$$T^2_{\alpha/q;n-q} = \frac{q(n-1)}{n-q}F_{\alpha/q;n-q}$$

Primedba. pošto se hipoteza odnosi na q sredina populacije, onda se stepeni slobode statistike T^2, q i n-q umesto p i n-p. U specijalnom slučaju kad je c jedinična matrica reda p, hipotezu linearne kombinacije $(H_o : C'\mu = C'\mu_0)$ je ista kao potpuno simultana hipoteza $(H_0 : \mu = \mu_0)$. U tom slučaju se jednačina (3.15) reducira na (3.9), a stepeni slobode za T^2 postaju p i n-p.

Za naša istraživanja najkorisnije svojstvo testova hipotza linearnih kombinacija je mogućnost ″zavirivanje unutar″ simultanoh testa za svih p sredina radi utvrđivanja koja sredina ili grupa sredina je uzrok odbacivanja simultane nule hipoteze. Za simultani test znamo da C je implicitno, $p_x p$ jedinična matrica , sadržano u njemu. Neka je $\vec{c}_i$ i-ta vektor kolona matrice C. Tada T^2 u jednačini (3.15) postaje:

$$T^2 = \frac{n\left[\vec{c}_i'\left(\bar{x} - \mu_0\right)\right]^2}{\vec{c}_i' S\vec{c}_i} \qquad (3.15a)$$

Ako ova vrednost prevazilazi vrednost $T_{\alpha,p,n-p}$ zaključujemo da je simultana hipoteza odbačena zbog i-te sredine. Primetimo da stepeni slobode za T^2 su p i n-p jer je q=p kad koristimo sve $\vec{c}_i$ vektore sadržane u C za testove hipoteza. U opštem slučaju kad je C jedinična matrica želimo koristiti sve njene $\mathbf{c}_i'$ vektore, p=q. Naravno ako je C ranga q<p, tada je kritična vrednost za T^2 jednaka $T^2_{\alpha,q,n-q}$.

U primeru skorova kandidata za PDS nulta hipoteza može biti napisana u obliku:

$$H_0 : \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{01} \\ \mu_{02} \end{bmatrix}$$

Ispitajmo sada da li samo jedna od sredina uzrokuje odbacivanje nulte hipoteze.

Proverićemo prvo verbalne skorove (njihovu sredinu). Odnosno, testirajmo za α = 0.05 i $\vec{c}_1^{\,\prime} = [1 \quad 0]$:

$$H_0 : \vec{c}_1^{\,\prime}\mu = \vec{c}_1^{\,\prime}\mu_0 \qquad \text{ili} \qquad H_0 : \mu_1 = 590$$

$$H_1 : \vec{c}_1^{\,\prime}\mu = \vec{c}_1^{\,\prime}\mu_0 \qquad \text{ili} \qquad H_1 : \mu_1 = 590$$

Statistika T^2 u jednačini (3.15a) je

$$T^2 = \frac{10([1 \quad 0][-14 \quad -94])^2}{[1 \quad 0]\begin{bmatrix} 6248.9 & 1915.6 \\ 1915.6 & 3693.3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} = \frac{10(-14)^2}{6248.9} = \cdots = 0.314$$

Pošto sračunata vrednost statistike T^2 ne prevazilazi kritičnu vrednost 10.035 , zaključujemo da verbalni skorovi nisu uzrok odbacivanja nulte hipoteze. Dakle kvantitativni skorovi mora da vode do odbacivanja nulte hipoteze. Da bi proverili ovo tvrđenje testirajmo sa α = 0.05 i $\vec{c}_2^{\,\prime} = [1 \quad 0]$:

$$H_0 : \vec{c}_2^{\,\prime}\mu = \vec{c}_2^{\,\prime}\mu_0 \qquad \text{ili} \qquad H_0 : \mu_2 = 690$$

$$H_1 : \vec{c}_2^{\,\prime}\mu = \vec{c}_2^{\,\prime}\mu_0 \qquad \text{ili} \qquad H_1 : \mu_2 = 690$$

Statistika T^2 je

$$T^2 = \frac{10([0 \quad 1][-14 \quad -94])^2}{[0 \quad 1]\begin{bmatrix} 6248.9 & 1915.6 \\ 1915.6 & 3693.3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} = \cdots = 23.9$$

Jasno, sračunato T^2 prevazilazi kritičnu vrednost 10.035, i zaključujemo da je opšta hipoteza $\vec{\mu} = \vec{\mu}_0$ dbačena zbog kvantitativnih skorova.

Primena linearnih kombinacija nije ograničena na slučajeve kad su elementi matrice c nule i jedinice. Na primer, želimo testirati simultanu hipotezu:

$$H_0 : \begin{cases} 3\mu_1 + \mu_3 + \mu_4 = K_1 \\ \mu_2 + \mu_3 = K_2 \\ \mu_1 + \mu_3 + 2\mu_4 = K_3 \end{cases}$$

Ovde je q = 3 (jer ima tri simultane hipoteze), a K su odgovarajuće konstante.
Hipoteza možebiti napisana u obliku:

$$H_0 : C'\mu = \vec{K}_0$$

koja može biti testirana koristeći

$$C' = \begin{bmatrix} 3 & 01 & 1 & 0\cdots 0 \\ 0 & 11 & 0 & 0\cdots 0 \\ 1 & 01 & 2 & 0\cdots 0 \end{bmatrix}$$

gde je C' matrica reda 3_xp. Zamenom $C'\mu_0$ u jednačini (3.15) sa $\vec{K}_0$ i koristeći (3.15) kompletirali bi test ove hipoteze.

OBLAST POVERENJA ZA LINEARNE KOMBINACIJE

Simultana oblast poverenja za $C'\mu$ se može naći iz jednačine (3.15) i kritične vrednosti T^2. Dakle, C′μ će biti ograničena sa :

$$(C'\bar{x} - C'\mu)'\left(C' \ SC\right)^{-1}\left(C'\bar{x} - C'\mu\right) = \frac{q(n-1)}{n(n-q)} F_{\alpha,q,n-q} \qquad (3.16)$$

sa 100(1-α) % nivoom poverenja. Ako je C jedinična matrica , tada je q=p, a jednačina (3.16) je formalno ekvivalentna sa (3.12) . Ako želimo odrediti 100(1-α)% interval poverenja za linearnu kombinaciju $\vec{c}_i'\mu$ (gde je $\mathbf{c}_\mathbf{i}'$ kolona matrice C), možemo napisati :

$$\vec{c}_i'\vec{x} \pm \sqrt{\frac{q(n-1)}{n(n-1)} \vec{c}_i' S \vec{c}_i F_{\alpha,q,n-q}}$$

Na primer, koristeći verbalne i kvantitativne skorove za α = 0.05 , sračunaćemo

$$\frac{q(n-1)}{n(n-1)}F_{\alpha,q,n-q} = \frac{2(8)(4.46)}{18(8)} = 1.0035$$

jer je p = q = 2 Za verbalne skorove imamo:

$$\vec{c}_1^{\,'}\bar{x} = 576 \qquad \text{i} \qquad \vec{c}_1^{\,'} S\vec{c}_1 = 6248.9$$

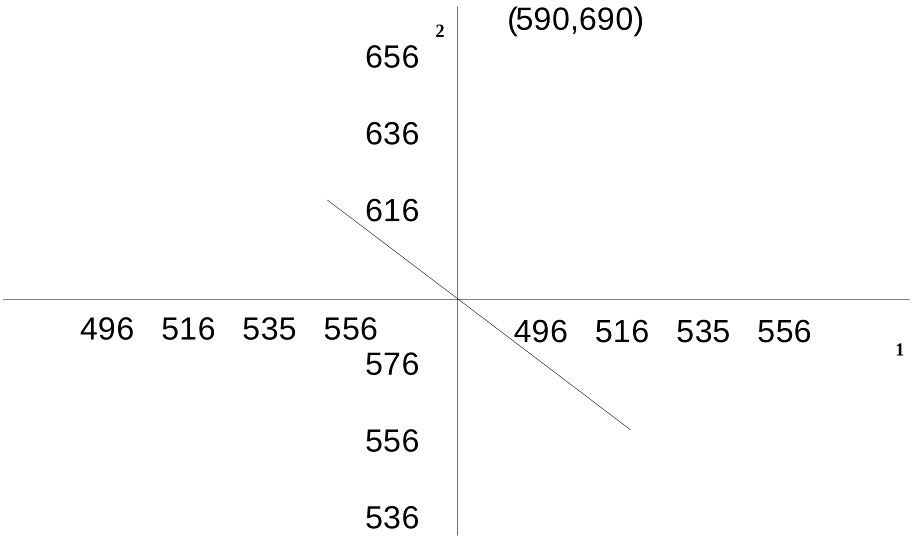
Prema tome , 95% inetrval poverenja je:

$$576 \pm \sqrt{1.0035 \quad 3693.3} = 596 \pm 60.9 \qquad \text{ili} \qquad 535.1 \leq \mu_2 \leq 659.9.$$

Primedbe : Interval za μ_1 prekriva 590, a interval za μ_2 ne prekriva 690. Dakle , interval poverenja je ekvivalentan testiranju hipoteze koristeći linearne kombinacije.

VEZA IZMEĐU INTERVALA POVERENJA

Rekli smo da jednačina (3.15a) ili (3.16a) mogu biti upotrebljene za identifikaciju posebne sredine kao uzročnika odbacivanja simultane hipoteze. Ova procedura će biti veoma korisna. u mnogim slučajevima, gde je p>2 teško je ili čak nemoguće, zamisliti (vizuelno) zajednčki elipsoid poverenja jer se mora oblikovati u p>2 dimenzionalnom prostoru. Uopšte kad je p>2 moramo projektovati odgovarajuću figuru elipsoida na jednodimenzionalni prostor. Razmotrićemo sad takvu projekciju.



slika 3.2

Oblast poverenja (elipsoid) na slici 3.2. zatvoren je u pravougaoniku. vertikalne i horizontalne linije su izabrane da budu tangente spoljnih ivica elipsoida. Ove linije seku osu μ_1 u 496.8 i 655.2 a osu μ_2 u 535.1 i 656.9. Dakle, ove linije predstavljaju dimenzije pravougaonika u kome je ″zatvoren″ elipsoid.

U ovom primeru dimenzije pravougaonika date su intervalima poverenjima linearnih kombinacija sa:

$\vec{c}_1^{\,\prime} = [1 \quad 0]$ i $\vec{c}_2^{\,\prime} = [0 \quad 1]$ koje smo upravo bili odredili.

Posmatrajmo sad ovaj elipsoid i pravougaonik. Svaka nulta hipoteza koja leži izvan pravougaonika biće odbačena i sa intervalom poverenja elipse i sa linearnim kombinacijama. Drugim rečima i verbalni i kvantitativni skorovi mogu biti identifikovani kao odgovorni za odbacivanje simultane nulte hipoteze. Svaka nulta hipoteza koja leži unutar elipse biće prihvaćena sa obe oblasti poverenja, i elipse i linearne kombinacije. Međutim, svaka nulta hipoteza koja leži izvan elipse, a unutar pravougaonika, biće odbačena preko zajedničke elipase poverenja , ali će biti prihvaćena preko intervala linearnih kombinacija. Dakle, ako je zajednička hipoteza odbačena ipak nije uvek moguće koristiti odgovarajući test linearne kombinacije koji smo opisali, da bi utvrdili koja (ili koje) sredine uzrokuju odbacivanje.

Ako uzrok odbacivanja simultane hipoteze ne može biti pripisan nekoj (ili nekim) sredinama, šta je tada uzrokovalo odbacivanje simultane hipoteze? Mora da je kombinacija dvaju sredina. Dakle, $\vec{c}_i$ vektori , kao na primer $\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$ opisaće par linija tangenti oko odgovarajućeg elipsoida. Ako je p>2 , vektor $\vec{c}_i$ će predstavljati hiperravan tangentu na odgovarajući elipsoid poverenja. Beskonačno mnogo ovih tangenta (ili hiperravni) opisaće elipsoidu (ilil elipsoid) i međuprostor će biti eliminisan. U tom smislu i intervali poverenja koji koriste linearne kombinacije su simultani.