**1. Дефиниција одређеног интеграла.**

· Дефинисати: поделу одсечка одговарајућу броју e, потподелу, дијаметар поделе

· Дефинисати одређени интеграл

· Формулисати и доказати теорему о вези непрекидности и интеграбилности

Функције

**Дефиниција.** За дату функцију *y = f*(*x*), поделу одсечка [*a*, *b*]

*π*[*a*, *b*] = *π*[*a=x*0 ≤ *ξ*1 ≤ *x*1 ≤*ξ*2 ≤ *x*2 ≤ ... ≤ *xn*-1 ≤*ξn* ≤ *xn=b*]

ћемо назвати одговарајућом броју *ε* (*ε* произвољни мали позитиван број), ако за сваки пар *x*’ и *x*” тачака које припадају истом одсечку [*xi*-1, *xi*] важи неједнакост

.

**Дефиниција.** Подела *π*’[*a*, *b*] = *π*’[*a=x*’0 ≤ *ξ’*1 ≤ *x*’1 ≤*ξ’*2 ≤ *x*’2 ≤ ... ≤ *x*’*p*-1 ≤*ξ’p* ≤ *x*’*p=b*] се назива потподелом поделе *π*[*a*, *b*] = *π*[*a=x*0≤ *ξ*1 ≤ *x*1 ≤*ξ*2 ≤ *x*2 ≤ ... ≤ *xn*-1 ≤*ξn* ≤ *xn=b*], ако свака од тачака *x*0, ..., *xn* припада скупу тачака {*x*’0, ..., *x*’*p*}, тј. скуп {*x*’0, ..., *x*’*p*} се добија кад се скупу {*x*0, ..., *xn*} додају неке деоне тачке; при томе су тачке *ξk* и *ξ’k* одабране произвољно. Очигледно, ако подела *π* одговара броју *ε*, онда истом броју *ε* одговара и свака потпедела *π*’ поделе *π*

**Дефиниција.** Број *d*(*π*) = max Δ*xk*, *k* ∈ {1, ..., *n*} назива се дијаметар поделе *π*.

**Дефиниција.** Ако за било какву поделу одсечка [*a*, *b*] на одсечке [*xi*-1, *xi*], *i =* 1, ..., *n*, у којој max [*xi*-1, *xi*] = max Δ*xi* →0 (*n*→∞), и за произвољно изабране тачке *ξi* на одсечцима [*xi*-1, *xi*] интегрална сума *Sn* тежи једној одређеној вредности *S*, тада се та гранична вредност назива одређени интеграл функције *f*(*x*) на одсечку [*a*, *b*] и означава .

**Теорема.** Ако је функција *f*(*x*) непрекидна на одсечку [*a*, *b*], тада је она на том интервалу и *R*–интеграбилна.

**2. Особине одређеног интеграла.**

Дефинисати одређени интеграл

Навести особине одређеног интеграла

Доказати једну од наведених особина

**Дефиниција.** Ако за било какву поделу одсечка [*a*, *b*] на одсечке [*xi*-1, *xi*], *i =* 1, ..., *n*, у којој max [*xi*-1, *xi*] = max Δ*xi* →0 (*n*→∞), и за произвољно изабране тачке *ξi* на одсечцима [*xi*-1, *xi*] интегрална сума *Sn* тежи једној одређеној вредности *S*, тада се та гранична вредност назива одређени интеграл функције *f*(*x*) на одсечку [*a*, *b*] и означава .

1. , јер је криволинијски трапез одсечак 0≤ *f*(*x*)≤ *f*(*a*) чија је површина 0.
2. , *c* = const.
3. 
4. 
5. Ако интегранд *f*(*x*) у интервалу [*a*, *b*] не мења знак, тада  има исти знак као и *f*(*x*).
6. Ако *f*(*x*) ≤  *g*(*x*) за свако *x*∈[*a*, *b*], онда .
7. **Оцена одређеног интеграла.** Ако је *m* = min *f*(*x*) и *M* = max *f*(*x*), где је *f*(*x*) интеграбилна функција на одсечку [*a*, *b*] тада је

.

**Доказ.** Из *m* ≤ *f*(*x*) ≤ *M*, следи . При томе,

 и слично .

1. **Теорема (о средњој вредности).** Ако је функција *f*(*x*) непрекидна на одсечку [*a*, *b*], тада постоји тачка *ξ*, *a* < *ξ* < *b*, за коју је

.

1. **Теорема (о подели интервала интеграције).** За произвољне три тачке *a*, *b*, *c* важи једнакост , под претпоставком да сва три интеграла постоје.

**3. Теорема о средњој вредности интеграла функције једне променљиве.**

· Дефинисати одређени интеграл

· Формулисати теореме о процени вредности и о средњој вредности интеграла

· Коришћењем теореме о процени вредности интеграла доказати теорему о средњој вредности интеграла

**Дефиниција.** Ако за било какву поделу одсечка [*a*, *b*] на одсечке [*xi*-1, *xi*], *i =* 1, ..., *n*, у којој max [*xi*-1, *xi*] = max Δ*xi* →0 (*n*→∞), и за произвољно изабране тачке *ξi* на одсечцима [*xi*-1, *xi*] интегрална сума *Sn* тежи једној одређеној вредности *S*, тада се та гранична вредност назива одређени интеграл функције *f*(*x*) на одсечку [*a*, *b*] и означава .

**Оцена одређеног интеграла.** Ако је *m* = min *f*(*x*) и *M* = max *f*(*x*), где је *f*(*x*) интеграбилна функција на одсечку [*a*, *b*] тада је

.

**Теорема (о средњој вредности).** Ако је функција *f*(*x*) непрекидна на одсечку [*a*, *b*], тада постоји тачка *ξ*, *a* < *ξ* < *b*, за коју је

.

**Доказ.** Ако је *m* = min *f*(*x*) и *M* = max *f*(*x*), *x*∈[*a*, *b*], тада на основу **Теореме о средњој вредности** следи

, тј. , *m* ≤ *μ* ≤ *M*.

Како је *f*(*x*) непрекидна на одсечку [*a*, *b*], према Коши-Болцановој теореми узима све вредности између *m* и *M*, тј. за неко *ξ*, *a* < *ξ* < *b* важи *f*(*ξ*) =*μ*, па

, тј. .

**4. Теорема о подели интервала интеграције.**

· Дефинисати одређени интеграл

· Формулисати теорему о подели интервала интеграције

· Доказати теорему за *a* < *c* < *b* . Доказати теорему за *a* < *b* < *c*

**Дефиниција.** Ако за било какву поделу одсечка [*a*, *b*] на одсечке [*xi*-1, *xi*], *i =* 1, ..., *n*, у којој max [*xi*-1, *xi*] = max Δ*xi* →0 (*n*→∞), и за произвољно изабране тачке *ξi* на одсечцима [*xi*-1, *xi*] интегрална сума *Sn* тежи једној одређеној вредности *S*, тада се та гранична вредност назива одређени интеграл функције *f*(*x*) на одсечку [*a*, *b*] и означава .

**Теорема (о подели интервала интеграције).** За произвољне три тачке *a*, *b*, *c* важи једнакост , под претпоставком да сва три интеграла постоје.

**Доказ.** Нека је *a* < *c* < *b*. Саставимо интегралну суму за функцију *f*(*x*) на [*a*, *b*], тако да је *c* увек једна од подеоних тачака. Тада важи

, *xm* = *c*.

Кад се пређе на граничну вредност, кад max Δ*xi*→0, добија се тражена једнакост за случај *a* < *c* < *b*.

Нека је *a* < *b* < *c*. На основу већ доказаног , тј.

. Према 3) важи , па се и у овом случају добија .

**5. Основна теорема диференцијалног и интегралног рачуна.**

Дефинисати примитивну функцију

Формулисати основну теорему диференцијалног и интегралног рачуна

Доказати основну теорему диференцијалног и интегралног рачуна

**Дефиниција.** Примитивна (првобитна) функција дате функције *f*(*x*), назива се функција *F*(*x*) за коју је

*F*’(*x*) = *f*(*x*).

ОСНОВНА ТЕОРЕМА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОГ РАЧУНА:

**Теорема.** Неодређени интеграл 

непрекидне функције *f*(*x*) задовољава релацију Φ’(*x*) = *f*(*x*), односно

,

што значи да диференцирање неодређеног интеграла непрекидне функције даје опет ту исту функцију.

**Доказ.** Према теореми о подели интервала интеграције



па је прираштај ΔΦ функције Φ(*x*) једнак



тј. .

Применом теореме о средњој вредности интеграла

, *ξ* је између *x* и *x* +Δ*x*,

одакле следи

, тј. .

Како је *ξ* између *x* и *x* +Δ*x*, то када Δ *x*→0, *ξ*→ *x*, па је због непрекидности функције *f*(*x*), , што значи да је Φ’(*x*) = *f*(*x*).

* Према теореми важе једнакости

 и .

**6. Њутн-Лајбницова формула.**

Дефинисати појмове неодређеног интеграла и примитивне функције

Формулисати Њутн-Лајбницову теорему (написати Њутн-Лајбницову формулу)

Доказати Њутн-Лајбницову теорему

**Дефиниција.** Интеграл 

се назива неодређени интеграл функције *f*(*x*); неодређен се зове зато што му нису обе границе одређене (фиксиране).

* Уместо доње границе *a* смо могли узети и неку другу константу α, добили би смо неодређени интеграл

.

Тада за *a* < *x* <α, како је , добијамо

, тј. Φ(*x*) = *F*(*x*) + *C*,

што значи да се различити неодређени интеграли исте функције разликују само за адитивну константу.

**Дефиниција.** Примитивна (првобитна) функција дате функције *f*(*x*), назива се функција *F*(*x*) за коју је

*F*’(*x*) = *f*(*x*).

**Теорема.** (*Њутн – Лајбницова* *формула*) Вредност одређеног интеграла  једнака је разлици вредности произвољне примитивне функције *F*(*x*) интегранда *f*(*x*), узета у горњој и доњој граници датог интеграла:

, *F*’(*x*) = *f*(*x*).

**Доказ.** Нека је *F*(*x*) примитивнa функцијa интегранда *f*(*x*). Како је и , такође примитивна функција, важи , за неку константу *C* и за свако *x*. Та једнакост важи и за *x = a*, тј. , одакле 0 = *F*(*a*) + *C*, *C =* – *F*(*a*). То значи да је , а за *x = b* добија се Њутн – Лајбницова формула , тј. .

**7. Смена променљиве у одређеном интегралу.**

Дефинисати појмове неодређеног интеграла и примитивне функције

Формулисати Њутн-Лајбницову теорему (написати Њутн-Лајбницову формулу)

Извести формулу за смену променљиве у одређеном интегралу

**Дефиниција.** Интеграл 

се назива неодређени интеграл функције *f*(*x*); неодређен се зове зато што му нису обе границе одређене (фиксиране).

* Уместо доње границе *a* смо могли узети и неку другу константу α, добили би смо неодређени интеграл

.

Тада за *a* < *x* <α, како је , добијамо

, тј. Φ(*x*) = *F*(*x*) + *C*,

што значи да се различити неодређени интеграли исте функције разликују само за адитивну константу.

**Дефиниција.** Примитивна (првобитна) функција дате функције *f*(*x*), назива се функција *F*(*x*) за коју је

*F*’(*x*) = *f*(*x*).

**Теорема.** (*Њутн – Лајбницова* *формула*) Вредност одређеног интеграла  једнака је разлици вредности произвољне примитивне функције *F*(*x*) интегранда *f*(*x*), узета у горњој и доњој граници датог интеграла:

, *F*’(*x*) = *f*(*x*).

Aкo је *F*(*x*) примитивнa функцијa интегранда *f*(*x*), тада важе једнакости

 и ,

одакле следи тврђење, јер је

,



**8. Уопштени интеграли са бесконачним интервалом интеграције.**

**Дефиниција.** Ако постоји коначна гранична вредност , тада се она назива уопштеним или несвојственим интегралом функције *f*(*x*) на интервалу и означава са .

У том случају кажемо да интеграл постоји или конвергира. Ако интеграл нема коначну граничну вредност кад *b*→∞, тада се каже да не постоји или да дивергира.

**Теорема 1.** Ако за свако *x*≥*a*, 0 ≤ *f*(*x*) ≤ *g*(*x*) и ако  конвергира, тада ће конвергирати и  и при томе је

.

**Теорема 2.** Ако за свако *x*≥*a*, 0 ≤ *f*(*x*) ≤ *g*(*x*) и ако  дивергира, дивергираће и .

**Теорема 3.** Ако  конвергира, конвергираће и .

, *a* > 0



* За *a* > 1 , па је у овом случају .
* За 0 < *a* < 1 , па је интеграл , тј. дивергира.
* Ако је *a* = 1 , па  дивергира.

**9. Уопштени интеграли са неограниченим интеграндом.**

Дефинисати уопштени интеграл са неограниченим интеграндом. Конвергенција

и дивергенција уопштеног интеграла

**Дефиниција.** Ако је функција *f*(*x*) непрекидна на интервалу *a* ≤ *x* < *b*, а *f*(*x*) → ∞ кад *x* → *b*, *x* < *b*, и ако постоји коначна гранична вредност  (*ε* > 0), тада се та гранична вредност назива уопштени (несвојствени) интеграл функције *f*(*x*) на одсечку [*a*, *b*] и означава са

.

Тада кажемо да уопштени интеграл постоји, тј. конвергира. У супротном, ако интеграл нема коначну граничну вредност, он не постоји, односно дивергира

, *a* > 0

* За 0 < *a* < 1  , интеграл конвергира.
* Може се закључити да за *a* ≥ 1, интеграл  дивергира.

**10. Интеграција простих рационалних функција.**





**11. Метода парцијалне интеграције.**

Метода парцијалне интеграције. Доказ.

Нека су *u*(*x*) и *v*(*x*) диференцијабилне функције, тада је

*d*(*uv*) = *u dv* + *v du*, тј. *u dv* = *d*(*uv*) – *v du*

Интеграцијом леве и десне стране последњег израза добија се формула парцијалне интеграције

.

**12. Интеграција функција облика** *R*(sin *x*,cos *x*) , ***R* - рационална функција**

Општи случај смене при рачунању интеграла за функције *R*(sin *x*,cos *x*) , где је *R*

рационална функција

Навести смене које се користе у специјалним случајевима интеграције функција

облика *R*(sin *x*,cos *x*) , *R* је рационална функција

**Теорема.** Интеграл  трансформише се у интеграл рационалне функције сменом .

**Доказ.** Коришћењем тригонометријских формула , тј. 

(јер је ).

* , тј. .
* Због , важи .

Дакле, , интегранд је рационална функција од *t*.

Интеграли специјални случајеви функција , се могу једноставније решити другим сменама:

1. Интеграл облика се најједноставније решава сменом sin *x* = *t*,cos *x dx = dt*, која дати интеграл своди на  .
2. Слично, интеграл  се може решавати сменом cos *x* = *t*,sin *x dx = dt*, чиме се своди на .
3. За интеграл облика  погодна је смена tg *x* = *t*, , којом се своди на .
4. Смена tg *x* = *t*, се користи и у случајевима кад се функције sin *x* и cos *x* појављују са парним степенима у интегранду 

**13. Метода смене у неодређеном интегралу.**

Метода смене у неодређеном интегралу. Доказ.

Интеграција ирационалних функција облика и



Ако се при одређивању интеграла  не може лако наћи примитивна функција, а знамо да постоји може се применити метода смене *x* = *ϕ*(*t*), где *ϕ*(*t*) мора бити непрекидна и диференцијабилна функција за коју је *ϕ* ’(*t*) ≠ 0 и која има своју инверзну функцију. У том случају ће бити *dx=ϕ* ’(*t*)*dt*, па

.

**Доказ.** Тада је извод леве стране: .

Извод десне стране: због ,  је

.

1. Интеграција ирационалних функција облика

 своди се сменама  на интеграле рационалних функција.

1. Нека је у интегралу , *k* најмањи заједнички именилац

разломака *m*/*n*, ..., *r*/*s*, тада се сменом *x = tk* интегранд трансформише у рационалну функцију.

**14. Метода смене у неодређеном интегралу.**

* Метода смене у неодређеном интегралу. Доказ.
* Интеграција ирационалних функција облика 

Ако се при одређивању интеграла  не може лако наћи примитивна функција, а знамо да постоји може се применити метода смене *x* = *ϕ*(*t*), где *ϕ*(*t*) мора бити непрекидна и диференцијабилна функција за коју је *ϕ* ’(*t*) ≠ 0 и која има своју инверзну функцију. У том случају ће бити *dx=ϕ* ’(*t*)*dt*, па

.

**Доказ.** Тада је извод леве стране: .

Извод десне стране: због ,  је



Интеграција ирационалних функција облика  своди се сменама  на интеграле рационалних функција.

**16. Израчунавање дужине лука криве.**

· Написати формулу за израчунавање дужине лука криве *y* = *f* (*x*) , *a* £ *x* £ *b*

· Доказ – извођење формуле

· Написати формулу за рачунање лука криве задате параметарски

* За део Δ*s* лука криве *y* = *f*(*x*) између тачака *M*(*x*, *y*) и *M*1(*x*+Δ*x*, *y*+Δ*y*) важи

,

где је  дужина одсечка *MM*1.

Ако је *f*(*x*) непрекидно диференцијабилна функција, онда се може показати, уз претпоставку да је Δ*x*>0, да је

,

јер је за диференцијабилне функције *dy* – Δy = *o*(Δ*x*). Преласком на граничне вредности добија се

,

значи , тј. .

Према томе ако се формирају одговарајуће интегралне суме, добија се да је дужина лука криве *y* = *f*(*x*) над одсечком *x*∈[*a*, *b*] једнака вредности одређеног интеграла

.

* Ако је једначина криве дата у параметарском облику  тада се дужина лука дате криве рачуна помоћу интеграла

, тј. .

**17. Израчунавање запремине ротационог тела.**

Написати формулу за израчунавање запремине тела *Vx* добијеног ротацијом

око *Ox* осе

Извођење формуле за запремину *Vx* ротационог тела

Написати формулу за израчунавање запремине тела *Vy* добијеног ротацијом

око *Oy* осе

Ако је Ω тело образовано ротацијом око осе *Ox* криволинијског трапеза ограниченог кривом *y* = *f*(*x*), осом *Ox* и правама *x = a*, *x* = *b*, онда је попречни пресек круг чија је површина



па ће његова запремина бити

.

* Ако је Ω неко (тродимензионо) тело за које нам је позната површина сваког пресека са равнима ортогоналним на осу *Ox*, тада ће та површина зависити од положаја пресечне равни, тј. од *x*, *P = P*(*x*).

Ако поставимо равни *x = x*0 = *a*, *x = x*1, *x =x*2, ... , *x* = *xn = b*, где је *x*0 < *x*1 < *x*2 < ...< *xn*, тада смо тело Ω разложили на слојеве који представљају тзв. елементарне цилиндре, чија је запремина

,

где је површина попречног пресека *P*(*ξk*) основа цилиндра, а Δ*xk* његова висина.

Запремина свих ових цилиндара ће бити

,

а гранична вредност интегралне суме кад *n*→∞, тј. кад max Δ*xk* → 0, уколико постоји, представља запремину датог тела Ω

.

**18. Израчунавање површине ротационе површи.**

Написати формулу за израчунавање површине површи *Px* добијене ротацијом

око *Ox* осе

Извођење формуле за површину *Px* ротационе површи

Написати формулу за израчунавање површине површи *Py* добијене ротацијом

око *Oy* осе

* Нека је дата површ образована ротацијом криве *y* = *f*(*x*) око осе *Ox* и нека је *f*(*x*) непрекидна и диференцијална функција у свим тачкама одсечка [*a*, *b*].
* Свака тетива лука Δ*sk*, *k* = 1, ..., *n* при ротацији образује конусну површ чија је површина ,
* где је .
* Према Лагранжевој теореми
* ,
* па је , ,
* а укупна површина ротационе површи израчуната на овај начин је
* .
* Преласком на граничну вредност добија се
* 
* тј. .

**19. Дефиниција и особине двојног интеграла.**

Дефиниција двојног интеграла. Геометријско тумачење

Навести особине двојног интеграла

Доказати једну од особина двојног интеграла

**Дефиниција.** Нека је *f*(*x*, *y*) (непрекидна) функција у затвореној просто повезаној области *D* и нека је *D* на произвољан начин подељена на елементарне области Δ*σ*1, Δ*σ*2, ..., Δ*σn*. Ако постоји гранична вредност интегралне суме *Vn* када највећи пречник елементарних области тежи ка нули (ознака *d*(Δ*σk*)), тада се та гранична вредност назива двојним интегралом функције *f*(*x*, *y*) на области *D* и означава

******.

**ОСНОВНА СВОЈСТВА ДВОЈНОГ ИНТЕГРАЛА**

1. Ако је функција *f*1(*x*, *y*), *f*2(*x*, *y*),...,*fm*(*x*, *y*) непрекидна у затвореној просто повезаној области *D*



где је *fi*(*P*) = *fi*(*x*, *y*)

1. Ако је функција *f*(*P*) непрекидна у области *D* тј. Ω, тада је



1. Ако непрекидна функција *f*(*P*) у области *D* не мења знак, тада је 

Доказ: Нека је *f*(*P*) ≥ 0. Тада је . Како је функција *f*(*P*) непрекидна и граничне вредности ових сума су ненегативни.

1. Ако је *D = D*1 ∪ *D*2, где подобласти *D*1 и *D*2 немају заједночких тачака, тада је

,

1. **Теорема (о процени вредности двојног интеграла).** Ако су *m* и *M* најмања, односно највећа вредност функције *f*(*P*) у области *D*, а *S*(*D*) површина области *D*, тада је

.

1. **Теорема (о средњој вредности двојног интеграла).** Ако је *f*(*P*) = *f*(*x*, *y*) непрекидна функција у затвореној области *D* равни *Oxy*, тада постоји унутрашња тачка  области *D* таква да је

.

**20. Дефиниција и особине тројног интеграла.**

Дефиниција тројног интеграла. Дефиниција *n* – димензионог интеграла

Навести особине тројног интеграла

Доказати једну од особина тројног интеграла

**Дефиниција.** Нека је *f*(*x*, *y*, *z*) (непрекидна) функција у затвореној просто повезаној области Ω која је на произвољан начин подељена на елементарне области Δ*ωk*. Изаберимо произвољне тачке *Pk* ∈ Δ*ωk* и означимо одговарајуће вредности дате функције са *f*(*Pk*), *k =* 1, ..., *n*. Ако постоји гранична вредност суме  када највећи пречник елементарних области Δ*ωk* такође тежи нули (тј. *n*→∞) тада се та гранична вредност назива тројни интеграл функције *f*(*x*, *y*, *z*) по области Ω и означава се

******.

*n*-димензиони интеграл ******

(када је *W* просто повезана затворена *n*-димензиона област)

1. Ако је функција *f*1(*x*, *y*, *z*), *f*2(*x*, *y*, *z*),..., *fm*(*x*, *y*, *z*)) непрекидна у тродимензионој области Ω, тада је



где је *fi*(*P*) = *fi*(*x*, *y*, *z*), *i =* 1, ..., *m*.

1. Ако је функција *f*(*P*) непрекидна у области *D* тј. Ω, тада је



1. Ако непрекидна функција *f*(*P*) у областиΩ, не мења знак, тада је истог знака као и *f*(*P*).

Доказ: Нека је *f*(*P*) ≥ 0. Тада је . Како је функција *f*(*P*) непрекидна и граничне вредности ових сума су ненегативни.

1. Ако је Ω *=* Ω1 ∪Ω2, где подобласти Ω1 и Ω2 немају заједночких тачака, тада је

.

1. **Теорема (о процени вредности тројног интеграла).** Ако је  и , а *V*(Ω) запремина тродимензионе области, тада је

.

1. **Теорема (о средњој вредности тројног интеграла).** Ако је *f*(*P*) = *f*(*x*, *y*, *z*) непрекидна функција у затвореној тродимензионој области Ω, тада постоји унутрашња тачка  области Ω таква да је

.

**21. Свођење двојног на двоструки интеграл.**

Дефиниција двојног интеграла.

Свођење двојног на двоструки интеграл за правоугаону област

Свођење двојног на двоструки интеграл за произвољну просто повезану област

**Дефиниција.** Нека је *f*(*x*, *y*) (непрекидна) функција у затвореној просто повезаној области *D* и нека је *D* на произвољан начин подељена на елементарне области Δ*σ*1, Δ*σ*2, ..., Δ*σn*. Ако постоји гранична вредност интегралне суме *Vn* када највећи пречник елементарних области тежи ка нули (ознака *d*(Δ*σk*)), тада се та гранична вредност назива двојним интегралом функције *f*(*x*, *y*) на области *D* и означава

.

Нека је област *D* правоугаоник , покривен правоугаоном праволинијском мрежом *x*, *y* = const, тако да је површина елемента те области Δ*σ* = Δ*x*Δ*y*, одакле је, при преласку на граничну вредност *dσ = dxdy*.

Како двојни интеграл геометријски представља запремину цилиндричног тела чије су основе област *D* у равни *Oxy* и површ *z* = *f*(*x*, *y*), интеграција се састоји у томе да тачка *P*(*x*, *y*) прође кроз све тачке области *D*. То се може урадити тако да се привремено сматра да је *x* = const., тако да интегранд *f*(*x*, *y*) зависи само од *y*, па је



површина криволинијског трапеза *P*1*P*2*M*2*M*1 при чему је *x* параметар, а *P*(*x*, *y*) пролази кроз све тачке одсечка *P*1*P*2.

Ако пустимо да одсечак *P*1*P*2 пролази транслаторно кроз све тачке области *D*, криволинијски трапез ће проћи кроз све тачке посматраног цилиндричног тела, па

, тј. , дакле, , где је на десној страни израза тзв. двоструки интеграл, односно на два обична интеграла функције једне променљиве

У интегралу по правоугаоној области *D* може се изменити поредак интеграције (фиксирањем променљиве *y*), при чему границе интеграције остају неизмењене:

.

**22. Свођење тројног на троструки интеграл.**

Дефиниција тројног интеграла. Дефиниција *n* – димензионог интеграла

Свођење тројног интеграла на троструки

**Дефиниција.** Нека је *f*(*x*, *y*, *z*) (непрекидна) функција у затвореној просто повезаној области Ω која је на произвољан начин подељена на елементарне области Δ*ωk*. Изаберимо произвољне тачке *Pk* ∈ Δ*ωk* и означимо одговарајуће вредности дате функције са *f*(*Pk*), *k =* 1, ..., *n*. Ако постоји гранична вредност суме  када највећи пречник елементарних области Δ*ωk* такође тежи нули (тј. *n*→∞) тада се та гранична вредност назива тројни интеграл функције *f*(*x*, *y*, *z*) по области Ω и означава се

******.

*n*-димензиони интеграл

(када је *W* просто повезана затворена *n*-димензиона област)

Тродимензиону простоповезану област Ω у простору *Oxyz* делимо на елементарне области низом равни паралелних координатним равнима тако да им је запремина Δ*ω* = Δ*x*Δ*y*Δ*z*, а при преласку на граничну вредност *dω* = *dxdydz*.

Претпоставимо да је Ω затворена тродимензиона област чију границу (*S*) праве паралелне координатним осама секу највише у двема тачкама.

Процес интеграције се састоји у томе да тачка *M*(*x*, *y*, *z*) прође кроз све тачке области Ω. Прво ћемо око области Ω описати цилиндрични омотач са генератрисама ортогоналним на једну координатну раван, на пр. *Oxy*. Он исеца у тој равни област *D*, чија је контура (*L*’) пројекција додирне криве (*L*) цилиндричног омотача и тела Ω. Крива (*L*) дели површ (*S*) на доњи и горњи део на којима је променљива *z* једнозначна непрекидна функција независних променљивих *x* и *y*:

*z* = *z*1(*x*, *y*), *z* = *z*2(*x*, *y*), (*x*, *y*) ∈ *D*,

тј. .

Ако прво сматрамо да су *x* и *y* константне, најпре се врши интеграција функције *f*(*x*, *y*, *z*) дуж одсечка *M*1*M*2, променљиве дужине, чији се грајеви налазе на доњем, односно горњем делу површи (*S*). Тако се добија

.

Кад тачка *P*(*x*, *y*, 0) (пројекција тачке *M*(*x*, *y*, *z*)) прође кроз све тачке области *D*, одсечак *M*1*M*2 ће проћи кроз све тачке тела Ω. Зато је

.

Ако је , онда је

,

где је на десној страни тзв. троструки интеграл.

**23. Смена променљивих у двојном интегралу. Поларне координате.**

Општи случај смене у двојном интегралу

Специјални случај смене у двојном интегралу: поларне координате

**ОПШТИ СЛУЧАЈ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ ПРОМЕНЉИВИХ У ДВОЈНОМ ИНТЕГРАЛУ**

Ако уместо Декартових координата *x*, *y* уведемо нове променљиве *u*, *v* које су са *x* и *y* везане датим релацијама

*x = x*(*u*, *v*), *y = y*(*u*, *v*),

где су *x = x*(*u*, *v*) и *y = y*(*u*, *v*) непрекидне и диференцијалне функције у некој области *D*\* променљивих *u* и *v*, тада дату област *D* у равни покривамо криволинијском мрежом која не мора бити ортогонална, а кроз сваку тачку области *D* пролази само по једна линија од сваке породице кривих *u* = const, *v* = const (при чему се допушта коначно много иузетака).

Диференцирањем горњих једнакости добија се

, тј. .

У квадратној матрици су функције од *u* и *v*, а одговара јој функционална детерминанта, која се зове Јакобијан

.

При томе ⎪*J*⎪је коефицијент деформације при пресликавању , где се *D* пресликава у *D*\*. Дакле

*dxdy =* ⎪*J*⎪*dudv*,

па је, уз претпоставку да је *J* ≠ 0

.

**ТРАНСФОРМАЦИЈА ДЕКАРТОВИХ У ПОЛАРНЕ КООРДИНАТЕ**

У двојном интегралу  Декартове координате *x*, *y* тачке *P* замењујемо поларним *ρ*, *ϕ* помоћу следећих веза

*x = ρ* cos*ϕ*, *y = ρ* sin*ϕ* .

Одатле добијамо да је

 , тј. 

па је

,

а елемент површине је . На основу тога је

.

**24. Смена променљивих у тројном интегралу. Цилиндричне координате.**

Општи случај смене у тројном интегралу

Специјални случај смене у тројном интегралу: цилиндричне координате

**ОПШТИ СЛУЧАЈ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ ПРОМЕНЉИВИХ У ТРОЈНОМ ИНТЕГРАЛУ**

Ако уместо Декартових координата *x*, *y*, *z* уведемо нове променљиве *u*,*v*,*w* преко релација

*x = x*(*u*, *v*, *w*), *y = y*(*u*, *v*, *w*), *z = z* (*u*, *v*, *w*),

где су *x = x*(*u*, *v*, *w*), *y = y*(*u*, *v*, *w*), *z = z* (*u*, *v*, *w*) непрекидне и диференцијалне функције по *u*, *v*, *w* у области Ω’={(*u*, *v*, *w*)}, тада је

, тј. 

Квадратна матрица је матрица трансформације променљивих, а њена детерминанта је функционална и зове се Јакобијан

.

Коефицијент деформације тродимензионе области је ⎪*J*⎪, па је

*dω =dxdydz =* ⎪*J*⎪*dudvdw*, а уз претпоставку да је *J* ≠ 0,

,

где је .

**ТРОЈНИ ИНТЕГРАЛ У ЦИЛИНДАРСКИМ КООРДИНАТАМА**

Нека је дата раван α и у њој тачка *O* и полуоса *OL*. Положај произвољне тачке *M* у тродимензионом простору, чија је пројекција на дату раван тачка *P*, је једнозначно одређен растојањем *ρ = OP*, углом *ϕ =* ∠(*OL*, *OP*) и одсечком *z = PM*. При томе је

0 ≤ *ρ* ≤ ∞, 0 ≤ *ϕ* ≤ 2*π*, –∞ < *z* < ∞.

Ово су цилиндарске координате тачке *M*. Кроз сваку тачку простора, осим координатног почетка пролазе по три координатне површи: *ρ =* const (кружни цилиндри са изводницом нормалном на дату раван α), *ϕ =*const (полуравни нормалне на дату раван α, које садрже полуправу са почетком у тачки *O*), *z =* const (равни паралелне датој равни α)

Поставимо Декартов координатни систем *Oxyz* тако да се раван *Oxy* поклапа са равни α, а *Ox* са полуосом *OL*. Тада је

*x = ρ* cos*ϕ*, *y = ρ* sin*ϕ*, *z = z*,

односно , , *z = z*.

Ако у тројном интегралу заменимо Декартове координате цилиндарским, онда је :

, одакле .

Из тога следи *dω =dxdydz = ρ dρ dϕ dz*, а за тројни интеграл се добија

,

При томе иста област изражена преко променљивих *x*, *y*, *z* је означена са Ω, а изражена преко *ρ*, *ϕ*, *z* са Ω\*.

**25. Смена променљивих у тројном интегралу. Сферне координате.**

Општи случај смене у тројном интегралу

Специјални случај смене у тројном интегралу: сферне координате

**ОПШТИ СЛУЧАЈ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ ПРОМЕНЉИВИХ У ТРОЈНОМ ИНТЕГРАЛУ**

Ако уместо Декартових координата *x*, *y*, *z* уведемо нове променљиве *u*,*v*,*w* преко релација

*x = x*(*u*, *v*, *w*), *y = y*(*u*, *v*, *w*), *z = z* (*u*, *v*, *w*),

где су *x = x*(*u*, *v*, *w*), *y = y*(*u*, *v*, *w*), *z = z* (*u*, *v*, *w*) непрекидне и диференцијалне функције по *u*, *v*, *w* у области Ω’={(*u*, *v*, *w*)}, тада је

, тј. 

Квадратна матрица је матрица трансформације променљивих, а њена детерминанта је функционална и зове се Јакобијан

.

Коефицијент деформације тродимензионе области је ⎪*J*⎪, па је

*dω =dxdydz =* ⎪*J*⎪*dudvdw*, а уз претпоставку да је *J* ≠ 0,

,

где је .

**ТРОЈНИ ИНТЕГРАЛ У СФЕРНИМ КООРДИНАТАМА**

Нека је дата раван α и у њој тачка *O* и полуоса *OL*. Положај произвољне тачке *M* у тродимензионом простору, чија је пројекција на дату раван тачка *P*, је једнозначно одређен растојањем *ρ = OM*, углом *ϕ =* ∠(*OL*, *OP*) и углом *θ =* ∠(*OP*, *OM*), при чему је

0 ≤ *ρ* ≤ ∞, 0 ≤ *ϕ* ≤ 2*π*, –*π*/2 ≤ *θ* ≤ *π*/2.

Кроз сваку тачку *M* ≠ *O* пролазе по три координатне површи: *ρ =* const (концентричне сфере са центром у *O*), *ϕ =*const (полуравни кроз тачку *O*, нормалне на дату раван α), *θ =*const (конуси с теменом *O*)

То су сферне координате тачке *M*, које су са Декартовим повезане релацијама

*x = ρ* cos*θ* cos*ϕ* , *y = ρ* cos*θ* sin*ϕ* , *z =* *ρ* sin*θ* , тј.

, , .

Елемент запремине *dω* се добија на основу ових веза, тако да је



тј. ,

а *dω =dxdydz = ρ*2 cos*θ dρ dϕ dθ*.

Одавде се при трансформацији Декартових координата у сферне, код тројног интеграла, добија

,

где је , а Ω и Ω\* су ознаке за област интеграције изражену преко координата *x*, *y*, *z*, односно *ρ*, *ϕ*, *θ*.

**26. Примене двојних и тројних интеграла.**

Навести могуће примене двојног интеграла

Навести могуће примене тројног интеграла

Извести формулу за израчунавање површине криве површи.

1. **Запремина цилиндричног тела** којем је једна основа *D* у равни *Oxy*, а друга основа површ *z* = *f*(*x*, *y*), (*x*, *y*) ∈ *D* (при чему *f*(*x*, *y*) не мења знак у области *D*), а генератрисе омотача су паралелне оси *Oz*, дата је двојним интегралом

,

где је *dσ* елемент површине области интеграције *D*.

1. **Површина** области *D* интеграције, је .
2. **Запремина** тела Ω се изражава тројним интегралом , где је *dw* елемент запремине тела Ω.
3. Ако се области *D* и Ω састоје од материјалних тачака и ако је у тим областима дефинисана густина *δ*(*x*, *y*), односно *δ*(*x*, *y*, *z*), као непрекидна функција координата тачке, тада је **маса** области *D*

,

а **маса** области Ω .

1. **Површина ограниченог дела површи.**

, тј.  (,).

**27. Појам бесконачног бројног реда. Конвергенција реда.**

Дефинисати низ парцијалних сума

Дефинисати бројни ред и конвергенцију реда

Доказати да је неопходни услов за конвергенцију реда да општи члан тежи нули

кад *n* 

**Дефиниција.** Низом делимичних сума реда  назива се низ {*sn*} чији је општи члан , *n* = 1, 2, 3, ... ; *sn* је (делимична) парцијална сума тог реда.

**Дефиниција.** Израз облика  или  називамо бесконачним бројним редом; *a*1, *a*2, *a*3, ...су чланови бесконачног реда; *an* је општи члан тог реда.

**Дефиниција.** Бесконачни ред  назива се конвергентним (дивергентним) ако конвергира (дивергира) низ његових делимичних сума {*sn*}. Сума конвергентног реда је број

.

Ако је ред конвергентан и има суму *s*, тада се пише .

**Теорема.** Ако је ред  конвергентан, тада његов општи члан  кад *n* → ∞.

**Доказ.** Ако ред конвергира, конвергира и његов низ делимичних сума, , па је .

**28. Редови са ненегативним члановима. Критеријуми упоређивања.**

Услов за конвергенцију реда са ненегативним члановима, изражен преко низа

делимичних сума

Навести критеријуме упоређивање прве и друге врсте

Доказати да је неопходни услов за конвергенцију реда да општи члан тежи нули

кад *n* 

**Теорема 1.** Ред са позитивним члановима може само конвергирати или дивергирати према +∞. Такав ред је конвергентан тада и само тада ако су његове делимичне суме ограничене.

**КРИТЕРИЈУМИ УПОРЕЂИВАЊА**

**Теорема 1.** (Критеријум упоређивања прве врсте) Нека је ред  конвергентан, а ред  дивергентан и нека су оба, редови са позитивним члановима. Ако чланови неког датог реда  са позитивним члановима задовољавају услов , за све *n* > *m* (*m* ∈ *N*), тада је ред  конвергентан. Ако  за све *n* > *m* (*m* ∈ *N*), тада је ред  дивергентан.

**Теорема 2.** (Критеријум упоређивања друге врсте) Нека је ред  конвергентан, а ред  дивергентан и нека су оба, редови са позитивним члановима. Ако за чланове реда  с позитивним члановима за ∀*n* ≥ *m* (*m* ∈ *N*), важи , тада је ред  конвергентан; ако је за ∀*n* ≥ *m* (*m* ∈ *N*), , тада је ред  дивергентан.

**Теорема.** Ако је ред  конвергентан, тада његов општи члан  кад *n* → ∞.

**Доказ.** Ако ред конвергира, конвергира и његов низ делимичних сума, , па је .

**29. Алтернативни редови. Лајбницов критеријум конвергенције реда.**

Дефинисати алтернативни ред и формулисати Лајбницов критеријум

конвергенције

Доказати Лајбницов критеријум конвергенције

Дефинисати апсолутну и условну конвергенцију

**Дефиниција.** Алтернативним редовима се називају редови облика

,

где је {*a k*} монотоно опадајући низ позитивних бројева.

Алтернативни ред *a*0 *– a*1 *+ a*2 *– a*3 *+* ... , у којем чланови *a k* > 0 монотоно опадају (*a k* > *a k*+1, ∀*k* = 0, 1, 2, ...) и теже нули, назива се Лајбницовим редом.

**Теорема.** (Лајбницов критеријум) Лајбницов ред конвергира и његова сума *s* < *a*0.

**Доказ.** За Лајбницов ред, делимична сума са непарним индексом 2*n* + 1 је једнака

,

што значи да је је . С друге стране,

,

из чега следи да монотоно неопада. Зато постоји гранична вредност, за коју важи

.

За парне чланове низа делимичних сума важи



чиме је доказан Лајбницов критеријум конвергенције.

**Дефиниција.** За конвергентан ред  кажемо да је апсолутно конвергентан, ако конвергира и ред . У супротном, када ред  дивергира, за конвергентан ред  кажемо да условно конвергира.

**30. Интегрални критеријум конвергенције бројног реда.**

Формулисати интегрални критеријум конвергенције бројног ред

Доказати интегрални критеријум конвергенције бројног ред

**Теорема.** Ако је  дати ред са позитивним монотоно опадајућим члановима, а *f*(*x*) за *x* ≥ 1 непрекидна позитивна монотоно опадајућа функција таква да је ∀*n*, *f*(*n*) = *an*, тада ред  конвергира ако и само ако несвојствени интеграл  постоји (конвергира).

Ако интеграл  не постоји, тада је ред  дивергентан.

**Доказ.** Како је *f*(*x*) опадајућа функција, важи

.Ако интеграл  постоји, означимо га са *J*. Тада је , па ред  има ограничне делимичне суме и према томе, конвергира, из чега следи конвергенција реда . Обрнуто, ако је ред  конвергентан и има суму *s*, тада је , па конвергира интеграл .