(1) Дефиниција функције више промењљивих. Околина тачке *(x_0, y_0)* $\in R^2$. График и линије нивоа функције f: (x, y) → z.

Дефиниција. Величина *z* се назива **функцијом** промењљивих величина *x* и *y* на скупу D ако сваком уређеном пару (*x*, *y*) ∈ D по неком закону коресподенције *f* одговара нека одређена вредност промењљиве *z*:

$$D \subset R \times R = \{(x, y): x \in R, y \in R\},\ z \in E \subset R$$

$$R \times R \supset D \xrightarrow{f(x,y)} E \subset R.$$

Дефиниција. Скуп свих уређених парова (*x*, *y*) за које у смислу закона коресподенције *f* постоји *z* ∈ R, *z* = *f* (*x*, *y*), назива се **област дефинисаности** функције *z* = *f* (*x*, *y*).

Дефиниција. Скуп свих реалних бројева *z* који у смислу закона коресподенције *f* одговарају свим могућим уређеним паровима (*x*, *y*) из области дефинисаности D функције *z* = *f* (*x*, *y*) представља **скуп вредности** функције *z* = *f* (*x*, *y*).

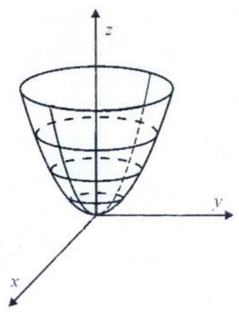
Дефиниција. Функција z : $D \xrightarrow{f(x,y)} E$ је **једнозначна** ако

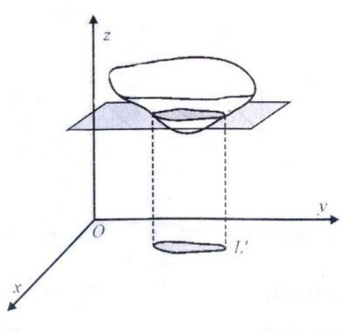
$$(\forall (x, y) \in D)\ (\exists!\ z \in D)\ z = f(x, y).$$

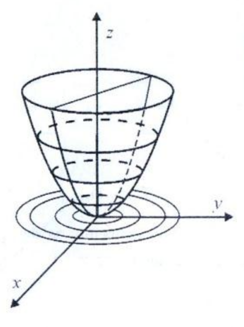
Дефиниција. Ако свакој уређеној *n*-торки (x_1, x_2, ..., x_n) ∈ G по неком закону коресподенције *f* одговара реалан број *u* = *f* (x_1, x_2, ..., x_n), кажемо да је *u* **функција промењљивих** x_1, x_2, ..., x_n.

$$R^n \supset G \xrightarrow{f(x_1, x_2, ..., x_n)} E \subset R.$$

График функције







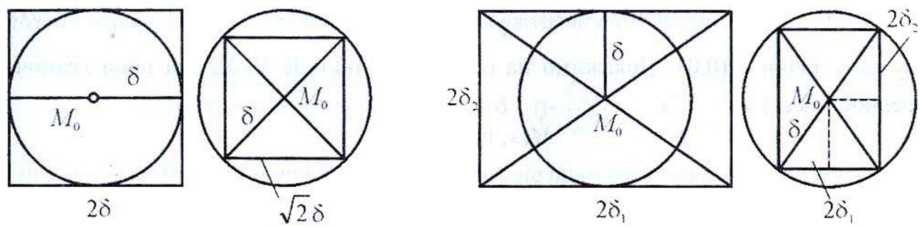
Дефиниција. **Ниво – линијом** функције *z* = *f* (*x*, *y*) назива се скуп тачака (*x*, *y*) у равни O*xy*, за које функција има исту вредност z_0, тј. важи *f* (*x*, *y*) = z_0.

- Скуп ниво – линија за више различитих константних вредности z_i чини **мрежу ниво линија** функције *z* = *f* (*x*, *y*).

Околина тачке

- **<u>Кружна околина</u>**: Скуп свих тачака M таквих да је *d*(M, M$_0$) < δ, тј. да важи $\{(x,y) : \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta\}$. Тај скуп је унутрашњост круга са центром у тачки M$_0$ и полупречником δ.

- **<u>Квадратна околина</u>**: Скуп тачака M за које важи $\{(x,y) : |x-x_0| < \delta,\ |y-y_0| < \delta\}$. Тачка M$_0$ се налази у пресеку дијагонала квадрата, а страница квадрата има дужину 2δ.



- **<u>Околина у *n*-димензионом простору</u>**:

- d(M, M$_0$) = $\sqrt{(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2+\ldots+(x_n-x_n^0)^2} = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2\right)^{\frac{1}{2}} < \delta$,
– сфера са центром у тачки M$_0$ и полупречником δ.

- $\{(x_1,x_2,\ldots,x_n) : |x_i-x_i^0| < \delta,\ i=1,2,\ldots,n\}$, – хиперкоцка странице 2δ са центром (пресеком дијагонала) у M$_0$.

(2) Гранична вредност функције више промењљивих. Непрекидност.

- **Низ тачака** $M_n(x_n, y_n)$ у равни Oxy, задаје се преко бројних низова $\{ x_n \}$ и $\{ y_n \}$.

Дефиниција. Низ тачака $M_n(x_n, y_n)$ конвергира тачки $M_0(x_0, y_0)$ ако $d(M_n, M_0)\to 0$, $n\to\infty$. Тачка M_0 је **гранична тачка** низа тачака M_n.

Теорема. Неопходан и довољан услов да низ тачака $M_n(x_n, y_n)$ конвергира тачки $M_0(x_0, y_0)$ јесте да $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$.

Доказ. (***довољан услов***): Претпоставомо да важи $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$. Како је

$$d(M_n, M_0) = \sqrt{\underbrace{(x_n - x_0)^2}_{\to 0} + \underbrace{(y_n - y_0)^2}_{\to 0}} \to 0,\ n\to\infty.$$

(***неопходан услов***): Претпоставимо $M_n \to M_0$. Из тога следи да

$d(M_n, M_0) = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \to 0$, $n\to\infty$. Како је

$$\left.\begin{aligned} |x_n - x_0| &\le \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \\ |y_n - y_0| &\le \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_n \to x_0,\ y_n \to y_0.$$

Дефиниција 1. Ако за **произвољан** низ тачака $M_n(x_n, y_n)$ из области дефинисаности, који конвергира ка тачки $M_0(x_0, y_0)$, низ одговарајућих вредности $f(x_n, y_n)$ ($\equiv f(M_n)$) увек конвергира истом броју A, тада се тај број назива **граничном вредношћу функције** $f(x, y)$ у тачки M_0.

$$A = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x, y) = \lim_{M\to M_0} f(M).$$

Непрекидност функција више промењљивих

Дефиниција. За функцију $z = f(x, y)$ ($u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$) дефинисану у тачки $M_0(x_0, y_0)$ ($M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$) и некој њеној околини , кажемо да је непрекидна у M_0 ако је

$$\lim_{M\to M_0} f(x, y) = f(x_0, y_0) \quad \left(\lim_{M\to M_0} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \right)$$

тј. ако за свако $\varepsilon>0$, постоји $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, тако да је

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$$

$$\left(\sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2} < \delta \Rightarrow \left| f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \right| < \varepsilon \right).$$

- Ако је функција више променљивих дефинисана у области G кажемо да је **непрекидна на области** ако је непрекидна у свакој тачки те области.
- Ако функција више променљивих није дефинисана у M_0 или не важи $\lim\limits_{M \to M_0} f(x,y) = f(x_0, y_0)$, тада функција има **прекид** у M_0.

Дефиниција. За функцију $z = f(x, y)$ ($u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$) кажемо да је равномерно непрекидна на области D, ако за свако $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$, постоји $\boldsymbol{\delta = \delta(\varepsilon) > 0}$, тако да за произвољне тачке P', P'' из D важи

$$d(P', P'') < \delta \Rightarrow \left| f(P') - f(P'') \right| < \varepsilon .$$

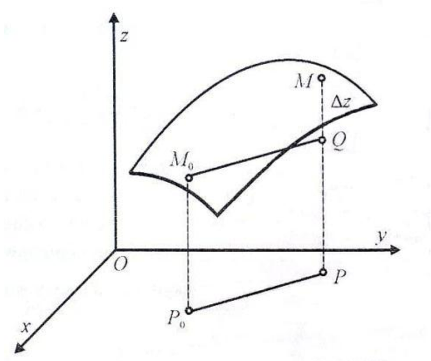
(3) Тотални и парцијални прираштаји функције више променљивих. Дефиниција парцијалних извода првог реда.

- <u>прираштај аргумента</u> x у тачки $P_0(x_0, y_0)$ је $\Delta x = x - x_0$,
- <u>прираштај аргумента</u> y у тачки $P_0(x_0, y_0)$ је $\Delta y = y - y_0$,

<u>**Дефиниција.**</u> **Тотални прираштај функције** $z = f(x, y)$ у тачки $P_0(x_0, y_0)$ је

$$\Delta z = f(P) - f(P_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0),$$

где је $P(x, y)$ са координатама $x = x_0 + \Delta x$ и $y = y_0 + \Delta y$.



- Ако се мења једна од променљивих, а друга је фиксирана, добијамо **парцијалне прираштаје** по x и y

$$\Delta_x f(x, y) = \Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

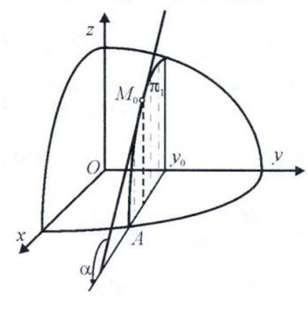
$$\Delta_y f(x, y) = \Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

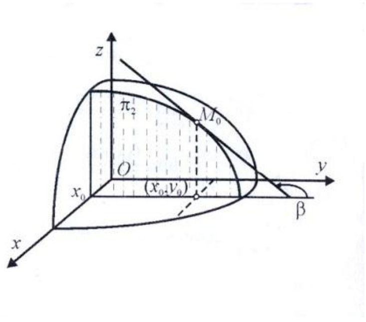
<u>**Дефиниција.**</u> Ако постоје коначне граничне вредности количника парцијалних прираштаја функције $f(x, y)$ у тачки $P_0(x_0, y_0)$, са одговарајућим прираштајима независне променљиве, кад оне теже нули, тада се те граничне вредности називају **парцијалним изводима** функције f у тачки $P_0(x_0, y_0)$.

<u>Ознаке</u>: $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x} = f'_x, \quad y = \text{const}$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y, \quad x = \text{const}$$

<u>Геометријско тумачење</u>:





<u>За функцију више променљивих</u>:

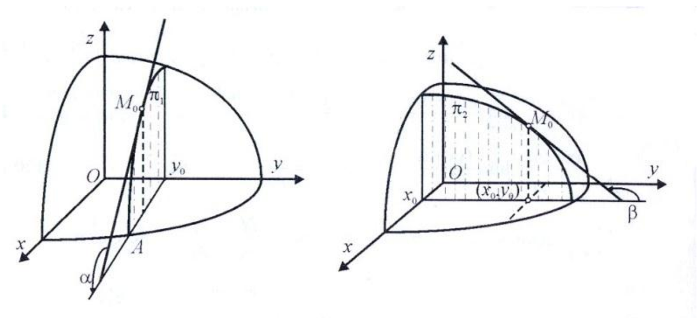
$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{\Delta x_i}, \quad x_j = \text{const}, \quad j \neq i$$

(4) Дефиниција парцијалних извода првог реда функције више промењљивих. Парцијални изводи вишег реда.

Дефиниција. Ако постоје коначне граничне вредности количника парцијалних прираштаја функције $f(x, y)$ у тачки $P_0(x_0, y_0)$, са одговарајућим прираштајима независне промењљиве, кад оне теже нули, тада се те граничне вредности називају **парцијалним изводима** функције f у тачки $P_0(x_0, y_0)$.

Ознаке:
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\frac{\partial f}{\partial x}=f'_x\,,\quad y=\text{const}$$
$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=\frac{\partial f}{\partial y}=f'_y\,,\quad x=\text{const}$$

Геометријско тумачење:



За функцију више промењљивих:
$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{f(x_1,x_2,\dots,x_i+\Delta x_i,\dots,x_n)-f(x_1,x_2,\dots,x_i,\dots,x_n)}{\Delta x_i}\,,\quad x_j=\text{const},\ \ j\neq i$$

За функцију $z = f(x, y)$, њени парцијални изводи $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ су такође функције 2 параматра x и y

Парцијални изводи, парцијалних извода су **парцијални изводи другог реда** функције $z = f(x, y)$:

- $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f''_{x^2}$ –извод другог реда по x
- $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f''_{xy}$; $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f''_{yx}$ –мешовити парц. изводи II реда
- $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f''_{y^2}$ –извод другог реда по y.

Парцијални изводи III реда су парцијални изводи по x и y за парцијалне изводе II реда.
Парцијални изводи *n*-тог реда су парцијални изводи по x и y за парцијалне изводе $(n$-$1)$-ог реда.

(5) Довољан услов за $f''_{xy}(M) = f''_{yx}(M)$. Доказ.

Теорема Ако су мешовити парцијални изводи II реда f''_{xy} и f''_{yx} функције $f(x, y)$, непрекидне функције у свакој тачки области D, онда је у свакој унутрашњој тачки те области $f''_{xy} = f''_{yx}$.

Доказ: Нека је $P(x, y)$ произвољна тачка у унутрашњости области D. Онда је и цео правоугаоник $PP_1P_2P_3$, где је $P_1(x+\Delta x, y)$, $P_2(x, y+\Delta y)$, $P_3(x+\Delta x, y+\Delta y)$, у области D, за довољно мале Δx и Δy. Посматрајмо израз:

$$A = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) - f(x, y+\Delta y) + f(x, y).$$

Нека је $\varphi(x) = f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$, где су y и Δy параметри.

Тада је $A = \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)$.

Према Лагранжевој теореми о средњој вредности (по x): $A = \varphi'(x+\theta\,\Delta x)\,\Delta x$, $0<\theta<1$. При томе је $\varphi'(x) = f'_x(x, y+\Delta y) - f'_x(x, y)$.

Применом Лагранжеве теореме о средњој вредности (по y) добија се:

$$\varphi'(x) = f''_{xy}(x, y+\eta\,\Delta y)\,\Delta y,\ \ 0<\eta<1,$$ тј.

$$A = f''_{xy}(x+\theta\,\Delta x, y+\eta\,\Delta y)\,\Delta x\Delta y,\ \ 0<\theta<1,\ \ 0<\eta<1.$$

Слично: $\psi(y) = f(x+\Delta x, y) - f(x, y)$, x и Δx су параметри.

Тада је $A = \psi(y+\Delta y) - \psi(y)$. Ако се два пута примени Лагранжева теорема о средњој вредности (прво по x, па по y) добија се

$$A = f''_{yx}(x+\theta_1\,\Delta x, y+\eta_1\,\Delta y)\,\Delta x\Delta y,\ \ 0<\theta_1<1,\ \ 0<\eta_1<1.$$

Због непрекидности функција f''_{xy} и f''_{yx}, добија се кад $\Delta x \to 0$ $\Delta y \to 0$, да је

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

(6) Дефиниција диференцијабилности функције више променљивих. Довољан услов диференцијабилности. Доказ.

Теорема 1. Ако функција $z = f(x, y)$ у некој тачки $M_0(x_0, y_0)$ и некој њеној околини има парцијалне изводе, који су непрекидни у M_0, тада

$$\Delta z = f_x'(x_0, y_0)\Delta x + f_y'(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y$$

где α, β зависе од Δx, Δy, и $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ кад $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Доказ: На основу дефиниције тоталног прираштаја

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$

$$= \underbrace{\left[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)\right]}_{\substack{\text{парцијални прираштај по } x \\ \text{у тачки } (x_0,\, y_0 + \Delta y)}} + \underbrace{\left[f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)\right]}_{\substack{\text{парцијални прираштај по } y \\ \text{у тачки } (x_0,\, y_0)}}$$

Применом Лагранжеве теореме:

$$\Delta z = f_x'(x_0 + \theta\,\Delta x, y_0 + \Delta y)\Delta x + f_y'(x_0, y_0 + \eta\,\Delta y)\Delta y$$

$$= f_x'(x_0, y_0)\Delta x + f_y'(x_0, y_0)\Delta y + \underbrace{\left[f_x'(x_0 + \theta\,\Delta x, y_0 + \Delta y) - f_x'(x_0, y_0)\right]}_{\alpha}\Delta x +$$

$$+ \underbrace{\left[f_y'(x_0, y_0 + \eta\,\Delta y) - f_y'(x_0, y_0)\right]}_{\beta}\Delta y,$$

где је $0 < \theta < 1$, $0 < \eta < 1$,

тј. добија се $\Delta z = f_x'(x_0, y_0)\Delta x + f_y'(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y$, при чему $\boldsymbol{x_0+\theta\,\Delta x \to x_0}$, $\boldsymbol{y_0+\eta\,\Delta y \to y_0}$ кад $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Због непрекидности парцијалних извода у тачки M_0, важи $f_x'(x_0 + \theta\,\Delta x, y_0 + \Delta y) \to f_x'(x_0, y_0)$ и $f_y'(x_0, y_0 + \eta\,\Delta y) \to f_y'(x_0, y_0)$

тј. $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ кад $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Теорема 2. Ако су у тачки $M_0(x_0, y_0)$ непрекидни парцијални изводи f_x' и f_y' функције $f(x, y)$, тада је и функција $f(x, y)$ непрекидна у тачки $M_0(x_0, y_0)$.

Доказ: Према теореми 1. $\Delta z = f_x'(x_0, y_0)\Delta x + f_y'(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y$ и сва четири сабирка теже нули кад $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Како је према дефиницији тоталног прираштаја

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)\ (\to 0), \text{ то је}$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Дефиниција. Ако тотални прираштај функције $z = f(x, y)$ у тачки $M_0(x_0, y_0)$ може да се напише у облику $\Delta z = f_x'(x_0, y_0)\Delta x + f_y'(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y$ где $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ кад $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, тада је функција $z = f(x, y)$ **диференцијабилна** у тачки $M_0(x_0, y_0)$.

- Свака функција која у (x_0, y_0) има непрекидне парцијалне изводе је диференцијабилна у тој тачки.

(7) Тотални диференцијал функције више променљивих. Диференцијали вишег реда.

Дефиниција. За функцију $z = f(x, y)$ која је диференцијабилна у тачки $P_0(x_0, y_0)$, главни део тоталног прираштаја $f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$ се зове **тотални диференцијал**.

- **Ознака**: $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$, где пишемо $dx = \Delta x$, $\Delta x \to 0$, $dy = \Delta y$, $\Delta y \to 0$.
- Код диференцијабилне функције $\Delta z = dz + \alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y$, $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ кад $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.
- **Код функције n променљивих** $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, ако су сви парцијални изводи $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, ..., n$ непрекидни у некој тачки $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, израз

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n$$

представља **главни део** прираштаја функције $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ и зове се **тотални диференцијал** дате функције.

- Слично као и код функције две променљиве, може се показати да је разлика $\Delta u - du$ између тоталног прираштаја и тоталног диференцијала дате функције бесконачно мала вишег реда у односу на растојање

$$\rho = d(P, P') = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \ldots + (\Delta x_n)^2}.$$

- **Правила за рад** са диференцијалима за функције u и v више променљивих:

$$d(u \pm v) = du \pm dv$$

$$d(u \cdot v) = udv + vdu$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

Такође, ако је $dz = Adx + Bdy$, тада је $A = \dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $B = \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

То се може видети ако узмемо напр. $dx = 0$, $dy = 1$ и $dx = 1$, $dy = 0$.

- На основу теореме 2. $\Delta z \approx dz$, где је $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$. Тако се добија приближна формула $f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y$.

Диференцијали вишег реда

Дефиниција. **Диференцијалом другог реда** функције $z = f(x, y)$ назива се диференцијал, тоталног диференцијала дате функције, тј. $d^2z = d(dz)$, који се израчунава уз претпоставку да су dx и dy константни.

- Ако су dx и dy константни, $d(dx) = d(dy) = 0$, па је

$$d^2z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dy\right]dx + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy\right]dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Када су мешовити парцијални изводи непрекидни (тј. једнаки) онда је

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

-**<u>Трећи дифернцијал; диференцијал *n*–тог реда</u>**: $\boldsymbol{d^3z = d(d^2z);\ d^nz = d(d^{n-1}z)}$, под претпоставком да су dx и dy константни.

За непрекидне мешовите парцијалне изводе:

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3.$$

-За функцију три параметра $u = f(x, y, z)$ други диференцијал је једнак (кад су мешовити парцијални изводи непрекидни):

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dz^2 + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}dxdz + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}dydz\right).$$

- **<u>Напомена</u>**: Ако је $d^2z = Adx^2 + 2Bdxdy + Cdy^2$, онда се може показати да је

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

(8) Потребан и довољан услов да израз *P(x,y)dx + Q(x,y)dy* представља тотални диференцијал функције. Доказ. ***не треба већ неколико година***

(9) Диференцијали вишег реда функције више променљивих

Дефиниција. **Диференцијалом другог реда** функције $z = f(x, y)$ назива се диференцијал, тоталног диференцијала дате функције, тј. $d^2z = d(dz)$, који се израчунава уз претпоставку да су dx и dy константни.

- Ако су dx и dy константни, $d(dx) = d(d\,y) = 0$, па је

$$d^2z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dy\right]dx + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy\right]dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Када су мешовити парцијални изводи непрекидни (тј. једнаки) онда је

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

-**Трећи дифернцијал; диференцијал *n*–тог реда**: $\mathbf{d^3z = d(d^2z);\ d^nz = d(d^{n-1}\,z)}$, под претпоставком да су dx и dy константни.

За непрекидне мешовите парцијалне изводе:

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3.$$

-За функцију три параметра $u = f(x, y, z)$ други диференцијал је једнак (кад су мешовити парцијални изводи непрекидни):

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dz^2 + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}dxdz + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}dydz\right).$$

- Напомена: Ако је $d^2z = Adx^2 + 2Bdxdy + Cdy^2$, онда се може показати да је

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\ C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

(10) Парцијални изводи сложене функције

Ако је дата функција $z = F(u, v)$, где су u и v функције независно промењљивих x и y, тј. $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, тада је z **сложена функција** аргумената x и y,

$$z = F[u(x, y), v(x, y)].$$

Израчунаћемо $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ под претпоставком да $F(u, v)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ имају непрекидне парцијалне изводе (диференцијабилне су).

- Ако се аргумент y фиксира, а x има прираштај Δx, онда су прираштаји функција u и v по промењљивој x: $\Delta_x u$ и $\Delta_x v$.

  Прираштај функције $z = F(u, v)$, по промењљивој x (због диференцијабилности)

  $$\Delta_x z = \frac{\partial F}{\partial u}\Delta_x u + \frac{\partial F}{\partial v}\Delta_x v + \alpha\,\Delta_x u + \beta\,\Delta_x v,$$ дељењем са Δx добија се

  $$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \alpha\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \beta\frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

  Како су функције $u = u(x,y)$ и $v = v(x,y)$ непрекидне, ако $\Delta x \to 0$, онда $\Delta_x u \to 0$ и $\Delta_x v \to 0$, а такође $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$.

  Како је $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}$, $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}$, заменом у претходном изразу се добија

  $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}.$$

- Слично, ако се аргумент x фиксира, а y има прираштај Δy, онда се добија

  $$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

- **<u>У општем случају</u>** $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, $x_i = \varphi_i(t_1, t_2, ..., t_m)$, $i = 1, 2, ..., n$, може се доказати

  $$\frac{\partial u}{\partial t_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial t_1}$$

  .... , тј.

$$\frac{\partial u}{\partial t_k} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial t_k} \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial u}{\partial t_m} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_m} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_m} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial t_m}$$

$k = 1, 2, ..., m$.

(11) Теорема о егзистенцији имплицитне функције. Доказ.

Теорема. Ако је дата једначина $F(x, y) = 0$ и ако функција $F(x, y)$ има следећа својства:

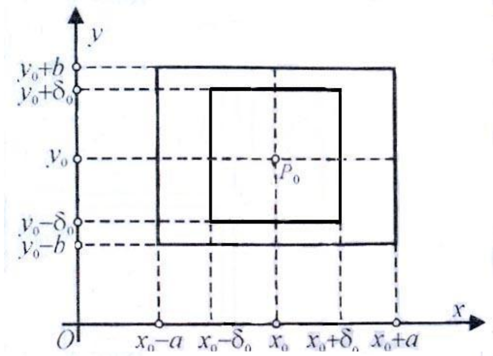
1. $\boldsymbol{F(x, y), F'_x(x, y), F'_y(x, y)}$ су дефинисане и непрекидне у правоугаонику
$$R = \{(x, y) : x_0 - a \le x \le x_0 + a,\ y_0 - b \le y \le y_0 + b\}.$$

2. $\boldsymbol{F(x_0, y_0) = 0,\ F'_y(x_0, y_0) \neq 0.}$
3. За $\boldsymbol{x = \mathrm{const}}$, $F(x, y)$ је монотоно растућа или опадајућа функција по y.

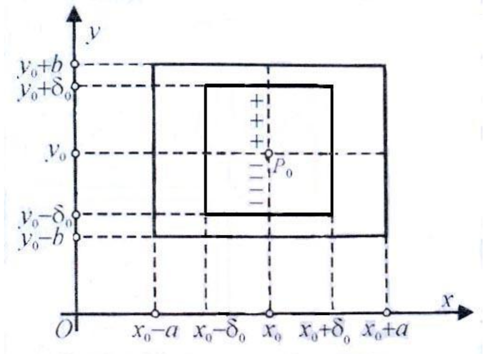
-тада ће једначином $F(x, y) = 0$ у неком правоугаонику
$$R' = \{(x, y) : x_0 - \delta \le x \le x_0 + \delta,\ y_0 - \delta_0 \le y \le y_0 + \delta_0\}$$

бити дефинисана имплицитна функција, која је <u>непрекидна</u> и <u>непрекидно диференцијабилна</u> у интервалу $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ и при томе је $y_0 = \varphi(x_0)$.

Доказ:



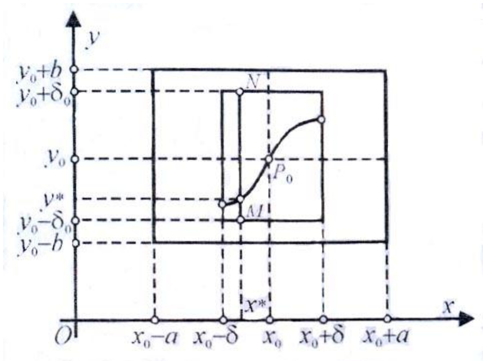
Претпоставимо да је $\boldsymbol{F'_y(x_0, y_0) > 0}$. Због непрекидности F'_y, постоји околина тачке $P_0(x_0, y_0)$, например квадрат са страницом $2\delta_0$ чије се дијагонале секу у P_0, у којој у свим тачкама важи $F'_y(x, y) > 0$.



- За $\boldsymbol{x = x_0}$ функција $F(x_0, y)$ ↗ кад y варира од $y_0-\delta_0$ до $y_0+\delta_0$.
  $F(x_0, y_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad F(x_0, y) < 0$ за $y_0-\delta_0 < y < y_0$

  $F(x_0, y) > 0$ за $y_0 < y < y_0+\delta_0$
- $\boldsymbol{F(x_0, y_0-\delta_0) < 0}$. Због непрекидности функције F, F је непрекидна по промењљивој x, за фиксирано $y = y_0-\delta_0$, па у довољно малој околини $(x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)$ тачке $(x_0, y_0-\delta_0)$ важи
$$F(x, y_0-\delta_0) < 0, \text{ за свако } x \in (x_0-\delta_1, x_0+\delta_1).$$
- $\boldsymbol{F(x_0, y_0+\delta_0) > 0}$, слично као и малопре, за фиксирано $y = y_0+\delta_0$ постоји довољно мала околина $(x_0-\delta_2, x_0+\delta_2)$тако да
$$F(x, y_0+\delta_0) > 0, \text{ за свако } x \in (x_0-\delta_2, x_0+\delta_2).$$

  За $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ важи $F(x, y_0-\delta_0) < 0$, $F(x, y_0+\delta_0) > 0$, за свако $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$.



- Ако за произвољно $x^* \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, y мењамо од $y_0-\delta_0$ до $y_0+\delta_0$, тада је $F(x^*, y)$ непрекидна функција промењљиве y, која на крајевима одсечка MN ($M(x^*, y_0-\delta_0)$, $N(x^*, y_0+\delta_0)$) има вредности различитог знака. По Коши – Болцановој теореми постоји $y^* \in (y_0-\delta_0, y_0+\delta_0)$ такво да је $F(x^*, y^*) = 0$. Како је $F(x^*, y)$ ↗(по y), то је y^* јединствено.
$$\exists_1\, y = y^* \in (y_0-\delta_0, y_0+\delta_0) : F(x^*, y^*) = 0.$$

- Како је x^* произвољно изабрано

$$\forall\, x \in (x_0-\delta,\, x_0+\delta),\ \exists_1\, y \in (y_0-\delta_0,\, y_0+\delta_0):\ F(x, y) = 0,$$

тј. на правоугаонику $R' = \{(x, y) : x_0 - \delta \le x \le x_0 + \delta,\ y_0 - \delta_0 \le y \le y_0 + \delta_0\}$,

једначина $F(x, y) = 0$ дефинише $\boldsymbol{y}$ као **имплицитну функцију** од x, $y = \varphi(x)$, и при том због $F(x_0, y_0) = 0$ важи $y_0 = \varphi(x_0)$.

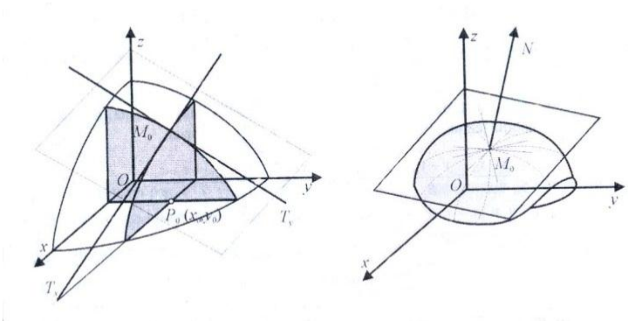
(12) Тангентна раван и нормала површи.

Ако пресечемо површ S равнима $y= y_0$ и $x= x_0$ ($(x_0, y_0) \in D$) добијамо криве L_x и L_y на површи S. Њихове тангенте у заједничкој тачки M_0 (x_0, y_0, z_0) ($M_0 \in$ S), T_x и T_y имају једначине

$$z-z_0 = A(x-x_0),\ \ y=y_0$$

$$z-z_0 = B(y-y_0),\ \ x=x_0$$

где је
$$A=\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)=\operatorname{tg}\angle(T_x,O_x),\ B=\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)=\operatorname{tg}\angle(T_y,O_y).$$



Дефиниција 1. Нека је S глатка површ, а L_x и L_y криве дуж којих равни $y= y_0$ и $x= x_0$ секу S. Раван која садржи тангенте T_x и T_y тих кривих у њиховој заједничкој тачки M_0 (x_0, y_0, z_0) зове се **тангентна раван** површи S у тачки M_0.

- На основу једначина за T_x и T_y добија се једначина тангентне равни

$$z-z_0 = A(x-x_0)+B(y-y_0)=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0}(x-x_0)+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0}(y-y_0)$$

($P_0(x_0, y_0)$ је пројекција тачке M_0 на раван Oxy).

Дефиниција 2. Права N која је у датој додирној тачки M_0 глатке површи S и њене тангентне равни, нормална на ову раван, зове се **нормала** површи S у датој тачки M_0.

- вектор правца нормале има координате (A, B, -1), па је једначина те праве

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

- Ако је глатка површ S дата једначином $F(x, y, z) = 0$ где је $z = z(x, y)$, тада

$$F'_x+F'_z\frac{\partial z}{\partial x}=0,\ \ F'_y+F'_z\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$ па је $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}$$

Према томе једначина тангентне равни површи S у M_0 је

$$F'_x(x-x_0)+F'_y(y-y_0)+F'_z(z-z_0)=0$$

а једначина нормале површи S у M_0 је

$$\frac{x-x_0}{F'_x}=\frac{y-y_0}{F'_y}=\frac{z-z_0}{F'_z}$$

При томе вредности извода F'_x, F'_y F'_z треба узети у тачки M_0.

Теорема. Ако крива L лежи на површи S, тада тангента криве L у тачки M_0 (x_0, y_0, z_0), припада тангентној равни површи S у тачки M_0.

Доказ: Нека је површ S задата са $F(x, y, z) = 0$, а крива L параметарски са

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t), \text{ тако да за } t=t_0\text{: } x(t_0)= x_0,\ y(t_0)= y_0,\ z(t_0)= z_0,$$

тј. крива пролази кроз тачку M_0. Ако L лежи на S, онда

$$F(x(t), y(t), z(t)) = 0,$$

па важи $\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}=0$, тј. $\frac{\partial F}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial F}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial F}{\partial z}\dot{z}=0\cdot$

Како ово важи за све тачке криве L, важи и за M_0, па је

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}\dot{x}_0+\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}\dot{y}_0+\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}\dot{z}_0=0\cdot$$

Лева страна једнакости је скаларни производ вектора $r\left(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0\right)$ и вектора $n\left(\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}, \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}, \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}\right)$, при чему су вредности $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$ пројекције (координате) тангентног вектора криве L у M_0, а вектор n је ортогоналан на тангентну раван површи S у тачки M_0. На основу једнакости, вектори n и r су ортогонални, а то значи да r припада тангентној равни.

(13) Векторска функција скаларног аргумента.

- Нека је дата векторска функција $r = r(x, y, z)$ дефинисана и непрекидна у некој просто повезаној области Ω простора R^3. Вектор $\mathbf{r(x, y, z)} = \overrightarrow{OM}$ је **радијус вектор** тачке $M(x, y, z)$, $M\in\Omega$.
- Ако може да се успостави веза између координата тачке $M(x, y, z)$ и неког параметра $t \in [\alpha, \beta]$, $\alpha, \beta \in R$: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, где су $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ непрекидне функције параметра t, тада су те једначине параметарске једначине криве L коју описује крај вектора

$$\mathbf{r\,(x(t), y(t), z(t)) = r\,(t),}$$

чији је почетак фиксиран за утврђену тачку 0, када се параметар t непрекидно мења на интервалу $\alpha \le t \le \beta$.

- Тако добијена крива L се назива **ходограф** векторске функције $r = r\,(t)$.
- Ако се векторска функција напише у развијеном облику $r(t)= x(t)\, i+ y(t)\, j+ z(t)\, k$, онда како су координате векторске функције $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ непрекидне функције по t, то је

$$\lim_{t\to t_0} x(t) = x(t_0) = x_0,\quad \lim_{t\to t_0} y(t) = y(t_0) = y_0,\quad \lim_{t\to t_0} z(t) = z(t_0) = z_0,$$

а за вектор $r_0 = x_0 i + y_0 j + z_0 k$, кажемо да је гранична вредност вектора $r = r(t)$, тј. $\lim_{t\to t_0} r(t) = r_0$. Одавде се добија

$$\lim_{t\to t_0}|r(t) - r_0| = \lim_{t\to t_0}\sqrt{(x(t)-x_0)^2 + (y(t)-y_0)^2 + (z(t)-z_0)^2} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{t\to t_0}|r(t)| = |r_0|.$$

Дефиниција. Ако су $M(t)$ и $M_1(t+ \Delta t)$ две тачке криве L са радијус векторима $r(t)$ и $r(t+ \Delta t)$, тада је $r(t+ \Delta t) - r(t) = \Delta r$ **прираштај векторске функције $r\,(t)$**, који одговара прираштају Δt параметра t, а вектор $\dfrac{\Delta r}{\Delta t} = \dfrac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t}$ представља **средњу брзину промене** векторске функције $r(t)$ на интервалу Δt и орјентисан је на ону страну на коју параметар t расте.

Дефиниција. Претпоставимо да је векторска функција $r(t)$ непрекидна у интервалу $t \in [\alpha, \beta]$. Ако постоји lim количника $\dfrac{\Delta r}{\Delta t}$ када $\Delta t \to 0$, тада се та гранична вредност зове **извод векторске функције $r(t)$** по скаларној промењљивој t. $\dfrac{dr}{dt} = \dot{r} = \lim_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\dfrac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t}$

- Вектор $\dfrac{dr}{dt}$, тј. $\dot{r}(t)$ је **тангентни вектор** криве L и има правац тангенте на ходографу, а смер на ону страну на коју параметар t расте.

Дефиниција. Ако је векторска функција $r(t)$ диференцијабилна, главни део њеног прираштаја Δr представља диференцијал векторске функције $r(t)$.

$$dr = \frac{dr}{dt}\Delta t = \dot{r}(t)\Delta t = \dot{r}(t)dt$$

(14) Скаларно поље

Дефиниција. Ако је у простору промењљивих *x*, *y*, *z* ($R^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in R\}$ у свакој тачки $M(x, y, z)$ неке просто повезане области Ω задата вредност скаларне величине *u* која зависи од координата тачке *M*, $u(x, y, z)$ тада кажемо да је у области Ω задато **скаларно поље**, а функција *u* је **скаларна функција** тачке *M*.

- Скаларна функција је **стационарна** ако $u(M)$, $M \in \Omega$ не зависи од времена. Ако *u* зависи и од *M* и од *t* она је **нестационарна**.

Дефиниција. **Ниво-површ** скаларног поља представља скуп тачака области Ω у којима функција има исту константну вредност $u(x, y, z) = C$.

- Кроз сваку тачку поља у којој је $u(x, y, z)$ непрекидна и једнозначна функција пролази по једна и само једна ниво-површ.

(15) Извод функције више промењљивих у смеру датог вектора. Веза градијента и извода у смеру датог вектора. Доказ

Нека је функцијом $u(x, y, z)$ задато поље у области Ω и нека из произвољне тачке $M(x, y, z) \in \Omega$ полази вектор s, а њему одговарајући јединични вектор је **ort** $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s_0}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Нека је $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ тачка вектора s на растојању Δs од полазне тачке M, тада $\left|\overrightarrow{MM_1}\right| = \Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$. Одавде се добија

$$\frac{\Delta x}{\Delta s} = \cos\alpha,\ \frac{\Delta y}{\Delta s} = \cos\beta,\ \frac{\Delta z}{\Delta s} = \cos\gamma, \text{ тј. } \begin{cases} \Delta x = \Delta s\cos\alpha \\ \Delta y = \Delta s\cos\beta \\ \Delta z = \Delta s\cos\gamma \end{cases}.$$

Дефиниција 1. **Средња брзина промене** скаларне функције $u = u(x, y, z)$ у смеру вектора s је изражена са $\dfrac{u(M_1) - u(M)}{\Delta s} = \dfrac{\Delta u}{\Delta s}$, где је $\Delta u = u(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - u(x, y, z)$.

Дефиниција 2. Ако постоји гранична вредност средње брзине $\dfrac{\Delta u}{\Delta s}$ кад $\Delta s \to 0$, тада се та гранична вредност зове **извод скаларне функције** (извод скаларног поља) $u(M)$ у тачки $M(x, y, z)$ **у смеру вектора** s и означава:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta s}.$$

Ако је функција $u(x, y, z)$ непрекидна и има непрекидне парцијалне изводе $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}$ у области Ω, тада је њен тотални прираштај $\Delta u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \dfrac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + \varepsilon_3\Delta z$,

где је $\varepsilon_1 = o(\Delta x)$, $\varepsilon_2 = o(\Delta y)$, $\varepsilon_3 = o(\Delta z)$, па кад $\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0$, добија се $\varepsilon_i = o(\Delta s)$, кад $\Delta s \to 0$. После дељења израза са Δs

$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta s} + \varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta s} + \varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta s} + \varepsilon_3\frac{\Delta z}{\Delta s} =$$

$$= \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma}_{\text{не зависи од } \Delta s} + \underbrace{\varepsilon_1\cos\alpha + \varepsilon_2\cos\beta + \varepsilon_3\cos\gamma}_{\to 0 \text{ кад } \Delta s \to 0}.$$

То значи да постоји $\dfrac{\partial u}{\partial s} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$. Тиме је доказана

Теорема. Ако је функција $u(x, y, z)$ диференцијабилна у свакој тачки $M \in \Omega$, тада постоји извод у смеру произвољног вектора s, и $\dfrac{\partial u}{\partial s} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$, где су $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ координате вектора $s_0 = \text{ort } s$.

Теорема. Ако је у скаларном пољу функције $u(x, y, z)$ дефинисано поље градијента

$\operatorname{grad} u = \dfrac{\partial u}{\partial x} i + \dfrac{\partial u}{\partial y} j + \dfrac{\partial u}{\partial z} k$, тада је извод $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ у смеру вектора s једнак пројекцији вектора grad u на вектор s.

Доказ. Ако је $s_0 = \operatorname{ort} s = \cos\alpha\, i + \cos\beta\, j + \cos\gamma\, k$, $\angle(\nabla u, s_0) = \varphi$, онда је

$$\begin{cases} \operatorname{grad} u \cdot s_0 = |\operatorname{grad} u| \cdot \cos\varphi \\ \operatorname{grad} u \cdot s_0 = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma = \dfrac{\partial u}{\partial s} \end{cases},$$ одакле

$\dfrac{\partial u}{\partial s} = |\operatorname{grad} u| \cdot \cos\varphi$, што значи да је $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ пројекција вектора grad u на вектор s.

(16) Градијент функције више променљивих. Веза градијента и извода у смеру датог вектора. Доказ

Можемо сматрати да је

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot \underbrace{(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)}_{=s_0}$$

што даје повод за следећу дефиницију.

Дефиниција. **Градијент** функције $u(x, y, z)$ у тачки $M(x, y, z) \in \Omega$ је вектор чије су координате вредности парцијалних извода $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ у датој тачки M:

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k,$$

где је ∇ (набла) тзв. ***Хамилтонов оператор***.

За функцију више променљивих:

Дефиниција. **Градијент** функције $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ у тачки $M(x_1, x_2, ..., x_n)\in\Omega$ је вектор

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} e_2 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n} e_n,$$

где су $e_1, e_2, ..., e_n$ вектори ортонормиране базе простора R^n.

- Ако је функција $u(x, y, z)$ диференцијабилна у свакој тачки скаларног поља области Ω, онда у свакој тачки постоји grad u, тако да је дефинисано (векторско) поље градијента у Ω.

Теорема. Ако је у скаларном пољу функције $u(x, y, z)$ дефинисано поље градијента $\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k$, тада је извод $\frac{\partial u}{\partial s}$ у смеру вектора s једнак пројекцији вектора grad u на вектор s.

Доказ. Ако је $s_0 = \operatorname{ort} s = \cos\alpha\, i + \cos\beta\, j + \cos\gamma\, k$, $\angle(\nabla u, s_0) = \varphi$, онда је

$$\begin{cases} \operatorname{grad} u \cdot s_0 = |\operatorname{grad} u| \cdot \cos\varphi \\ \operatorname{grad} u \cdot s_0 = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma = \frac{\partial u}{\partial s}, \end{cases}$$ одакле

$\frac{\partial u}{\partial s} = |\operatorname{grad} u| \cdot \cos\varphi$, што значи да је $\frac{\partial u}{\partial s}$ пројекција вектора grad u на вектор s.

Теорема. Смер градијента функције grad u се у свакој тачки $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$ подудара са смером нормале на ниво површ скаларног поља која пролази кроз ту тачку.

Доказ. Једначина ниво-површи кроз M_0 је $u(x_0, y_0, z_0) = u(M_0) = u_0$, а једначина нормале на ниво-површ кроз M_0 је

$N: \dfrac{x-x_0}{\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}} = \dfrac{y-y_0}{\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}} = \dfrac{z-z_0}{\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}}$ при чему је век. нормале $\vec{n}\left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}, \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}, \left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}\right) = \nabla u$

Особине градијента:

1. $\boxed{\nabla(u_1 + u_2) = \nabla(u_1) + \nabla(u_2)}$.

$$\nabla(u_1+u_2) = \frac{\partial}{\partial x}(u_1+u_2)i + \frac{\partial}{\partial y}(u_1+u_2)j + \frac{\partial}{\partial z}(u_1+u_2)k =$$

$$= \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}i + \frac{\partial u_1}{\partial y}j + \frac{\partial u_1}{\partial z}k\right) + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}i + \frac{\partial u_2}{\partial y}j + \frac{\partial u_2}{\partial z}k\right) = \nabla u_1 + \nabla u_2.$$

2. $\boxed{\nabla(Cu) = C\,\nabla(u),\ C = \mathrm{const}}$.

$$\nabla(Cu) = \frac{\partial}{\partial x}(Cu)i + \frac{\partial}{\partial y}(Cu)j + \frac{\partial}{\partial z}(Cu)k =$$

$$C\left(\frac{\partial u}{\partial x}i + \frac{\partial u}{\partial y}j + \frac{\partial u}{\partial z}k\right) = C\nabla(u).$$

3. $\boxed{\nabla(u_1 u_2) = \mathbf{u}_2\nabla\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1\nabla\mathbf{u}_2}$

$$\nabla(u_1u_2) = \frac{\partial}{\partial x}(u_1u_2)i + \frac{\partial}{\partial y}(u_1u_2)j + \frac{\partial}{\partial z}(u_1u_2)k =$$

$$= u_2\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}i + \frac{\partial u_1}{\partial y}j + \frac{\partial u_1}{\partial z}k\right) + u_1\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}i + \frac{\partial u_2}{\partial y}j + \frac{\partial u_2}{\partial z}k\right) = u_2\nabla u_1 + u_1\nabla u_2.$$

4. $\boxed{\nabla(f(u)) = f'(u)\,\nabla(u)}$.

$$\nabla(f(u)) = \frac{\partial}{\partial x}(f(u))i + \frac{\partial}{\partial y}(f(u))j + \frac{\partial}{\partial z}(f(u))k =$$

$$= f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}i + \frac{\partial u}{\partial y}f'(u)j + \frac{\partial u}{\partial z}f'(u)k = f'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}i + \frac{\partial u}{\partial y}j + \frac{\partial u}{\partial z}k\right) = f'(u)\nabla u.$$

(17) Тејлорова и Маклоренова формула функције више промењљивих.

- ***R:*** Функција једне промењљиве $y = f(x)$, која околини неке тачке x_0 има непрекидне изводе закључно са изводом реда n+1, може се апроксимирати **Тејлоровим полиномом *n*-тог степена** у околини те тачке:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n,$$

где је $x = x_0 + \Delta x$, што се другачије може записати:

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n + R_n.$$

Функција са два или више параметара, која у околини неке тачке $P_0(x_0, y_0)$ ($P_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$) има непрекидне парцијалне изводе до реда n+1, може се, такође, апроксимирати полиномом n-тог степена.

- ***R*²:** Уочимо помоћну функцију $\Phi(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$, $0 \le t \le 1$, при чему сматрамо да су x_0, Δx, y_0, Δy. Тачка $P_t(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$ за свако $t \in [0,1]$ припада одсечку P_0P_1, $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

Ако претпоставимо да функција $f(x, y)$ у околини тачке $P_0(x_0, y_0)$ има непрекидне парцијалне изводе до n+1 реда, онда се за изводе помоћне функције $\Phi(t)$ добија:

- $$\Phi'(t) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_t}\Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_t}\Delta y$$

- $$\Phi''(t) = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{P_t}\Delta x^2 + 2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{P_t}\Delta x\Delta y + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{P_t}\Delta y^2 = \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_t}\Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_t}\Delta y\right)^{[2]}$$

Индуктивно се закључује

- $$\Phi^{(n)}(t) = \left.\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right|_{P_t}\Delta x^n + \binom{n}{1}\left.\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}\right|_{P_t}\Delta x^{n-1}\Delta y + \binom{n}{2}\left.\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2}\partial y^2}\right|_{P_t}\Delta x^{n-2}\Delta y^2 + \ldots + \left.\frac{\partial^n f}{\partial y^n}\right|_{P_t}\Delta y^n =$$
$$= \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_t}\Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_t}\Delta y\right)^{[n]}.$$

Теорема 1. <u>(о средњој вредности)</u> Ако је у некој околини тачке $P_0(x_0, y_0)$ функција $f(x, y)$ непрекидна и има непрекидне парцијалне изводе $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$, тада је

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta y,$$

за неко $0 < \theta < 1$.

Доказ. Према Лагранжевој теореми за функцију једне променљиве $\Phi(t)$,

$$\Phi(1)-\Phi(0)=\Phi'(\theta)(1-0) \text{ за неко } 0<\theta<1.$$

Из тога следи

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta y,$$

што је требало доказати.

Теорема 2. (Тејлорова формула) Ако су у околини тачке (x_0, y_0) парцијални изводи функције $f(x, y)$ до n+1 реда непрекидни, тада је

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+\frac{1}{1!}df(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0)+\ldots+\frac{1}{n!}d^nf(x_0,y_0)+R_n,$$

при чему је $R_n=\dfrac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(P_\theta)$, а $P_\theta(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)$, $0<\theta<1$.

Доказ. Развијањем функције $\Phi(t)$ у Маклоренов полином, добија се

$$\Phi(t)=\Phi(0)+\frac{1}{1!}\Phi'(0)t+\frac{1}{2!}\Phi''(0)t^2+\ldots+\frac{1}{n!}\Phi^{(n)}(0)t^n+R_n^L,$$

са грешком записаном у Лагранжевом облику $R_n^L=\dfrac{1}{(n+1)!}\Phi^{(n+1)}(\theta t)t^{n+1}$, $0<\theta<1$.

За $t=1$:
$$\Phi(1)=\Phi(0)+\frac{1}{1!}\Phi'(0)+\frac{1}{2!}\Phi''(0)+\ldots+\frac{1}{n!}\Phi^{(n)}(0)+R_n^L,$$

$$R_n^L=\frac{1}{(n+1)!}\Phi^{(n+1)}(\theta).$$

Према дефиницији функције $\Phi(t)$,

$$\Phi(1)=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y), \qquad \Phi(0)=f(x_0,y_0),$$

$$\Phi'(0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y=df(x_0,y_0),$$

$$\Phi''(0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y\right)^{[2]}=d^2f(x_0,y_0),$$

....

$$\Phi^{(n)}(0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y\right)^{[n]}=d^nf(x_0,y_0),$$

$$\Phi^{(n+1)}(\theta)=\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_\theta}\Delta x+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_\theta}\Delta y\right)^{[n+1]}=d^{n+1}f(P_\theta),$$

$P_\theta(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)$, $\quad 0<\theta<1$, одакле следи тврђење.

- $\boldsymbol{R^m}$: Тејлорова формула n-тог степена за функцију са m промењљивих има исти облик као и за функцију две промењљиве

$$f(x_1^0+\Delta x_1,\ldots,x_m^0+\Delta x_m)=f(x_1^0,\ldots,x_m^0)+\frac{1}{1!}df(x_1^0,\ldots,x_m^0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_1^0,\ldots,x_m^0)+\ldots$$

$$+\frac{1}{n!}d^nf(x_1^0,\ldots,x_m^0)+R_n,$$

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{P_\theta}\Delta x_1+\ldots+\left.\frac{\partial f}{\partial x_m}\right|_{P_\theta}\Delta x_m\right)^{[n+1]},$$

$$P_\theta(x_1^0+\theta\Delta x_1,\ldots,x_m^0+\theta\Delta x_m),\ 0<\theta<1.$$

Такође, се може доказати да је $R_n=o(\Delta\rho)^n$, кад $\Delta x_1\to 0,\ldots,\Delta x_m\to 0$, где је $\Delta\rho=\sqrt{\Delta x_1^2+\ldots+\Delta x_m^2}$.

(18) Дефиниција локалног екстремума функције више променљивих. Неопходни услови. Доказ.

Дефиниција. Функција $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ има у тачки $P_0(x_1^0, ..., x_n^0)$ **локални максимум** ако у свим тачкама из неке околине тачке P_0 има мање вредности него у тачки P_0, тј. ако за свaку тачку

$$P(x_1, ..., x_n) \in S(P_0, \delta) \quad \text{важи} \quad u(x_1, x_2, ..., x_n) < u(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$$

(где је $S(P_0, \delta) = \{(x_1, x_2, ..., x_n): \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \ldots + (x_n - x_n^0)^2} < \delta\}$),

а **локални минимум** ако у свим тачкама околине има веће вредности него у P_0, тј.

ако за свaку тачку $P(x_1, ..., x_n) \in S(P_0, \delta)$ важи $u(x_1, x_2, ..., x_n) > u(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$.

Локални максимуми и минимуми су **локални екстремуми**.

Теорема. (***неопходан услов***) Ако функција $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ има екстремум у тачки $P_0(x_1^0, ..., x_n^0)$ и ако су јој парцијални изводи непрекидни у тој тачки, онда су сви парцијални изводи функције $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ у тачки P_0 једнаки нули, тј.

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = 0, \quad \forall\ j = 1, \ldots, n.$$

Доказ. Фиксирајмо све променљиве $x_i = x_i^0,\ i = 1, \ldots, n$, осим једне (произвољне) x_j. Тада је $u(x_1^0, \ldots, x_{j-1}^0, x_j, x_{j+1}^0 \ldots, x_n^0)$ у околини тачке P_0 функција једне променљиве $f(x_j)$, са екстремумом за $x_j = x_j^0$. Према теореми о неопходном услову функције једне променљиве, њен извод у тој тачки је једнак 0. Како је извод функције $f(x_j)$ за $x_j = x_j^0$, једнак парцијалном изводу функције $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ по променљивој x_j у тачки P_0 и како је избор променљиве произвољан, тврђење важи.

Последица. Ако функција $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ има непрекидне парцијалне изводе у целој области дефинисаности, сви кандидати за екстремум се налазе међу решењима система

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Решења система се називају **стационарне тачке**.

(19) Довољан услов за локални екстремум функције више променљивих. Силвестеров критеријум.

R^2: **Теорема.** Претпоставимо да у некој околини области D којој припада тачка $P_0(x_0, y_0)$, функција $z = f(x, y)$ има непрекидне парцијалне изводе закључно са изводима трећег реда и претпоставимо да је P_0 стационарна тачка, тј. $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} = 0$, $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0} = 0$. Ако означимо $A = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{P_0}$, $B = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{P_0}$, $C = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{P_0}$, онда:

(1) Ако је $A \cdot C - B^2 > 0$ и $A < 0$, функција $f(x, y)$ у P_0 има максимум.

(2) Ако је $A \cdot C - B^2 > 0$ и $A > 0$, функција $f(x, y)$ у P_0 има минимум.

(3) Ако је $A \cdot C - B^2 < 0$, функција $f(x, y)$ у P_0 нема екстремум.

(4) Ако је $A \cdot C - B^2 = 0$, тада је за одређивање карактера стационарне тачке потребно испитивање извода вишег реда.

Доказ. Из Тејлоровог полинома другог реда у околини P_0, (Пеанов обл. остатка):

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}}_{=0} \Delta x + \underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}}_{=0} \Delta y +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{P_0} \Delta x^2 + 2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{P_0} \Delta x \Delta y + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{P_0} \Delta y^2 \right) + \alpha \Delta \rho^2,$$

где $\alpha \to 0$, кад $\Delta \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$.

Ако је $\varphi = \angle(O_x, P_0P)$, онда је $\Delta x = \Delta \rho \cos \varphi$, $\Delta y = \Delta \rho \sin \varphi$, па је

$$\Delta f = \frac{1}{2!}(A\Delta x^2 + 2B\Delta x \Delta y + C\Delta y^2) + \alpha \Delta \rho^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\Delta \rho^2 (\underline{A\cos^2 \varphi} + \underline{2B\cos\varphi \sin\varphi} + C\sin^2\varphi + 2\alpha) \qquad / \cdot \frac{A}{A}$$

$$+ \frac{B^2}{A}\sin^2\varphi - \frac{B^2}{A}\sin^2\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\Delta \rho^2 \left(\frac{(A\cos\varphi + B\sin\varphi)^2 + (AC - B^2)\sin^2\varphi}{A} + 2\alpha \right)$$

(1) $\boxed{A\cdot C-B^2>0}$, $A<0$: именилац разломка је мањи од 0, а бројилац је већи, јер је збир две величине које су ≥ 0, а не могу бити истовремено 0:

$$A\cos\varphi+B\sin\varphi=0 \;\Rightarrow\; \operatorname{tg}\varphi=-\frac{A}{B}\vee\cos\varphi=0;$$

$$(AC-B^2)\sin^2\varphi=0 \;\Rightarrow\; \sin\varphi=0.$$

Зато се може написати $\Delta f=\frac{1}{2}\Delta\rho^2(-m^2+2\alpha)$, где $\alpha\to 0$, кад $\Delta\rho\to 0$, а m не зависи од $\Delta\rho$. Добија се да је за довољно мало $\Delta\rho$ $\Delta f=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)<0$, тј. $f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)<f(x_0,y_0)$, из чега следи да је P_0 тачка максимума.

(2) $\boxed{A\cdot C-B^2>0}$, $A>0$: слично се добија да је $\Delta f=\frac{1}{2}\Delta\rho^2(m^2+2\alpha)$, тј. $f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)>f(x_0,y_0)$, па је P_0 тачка минимума.

(3) $\boxed{A\cdot C-B^2<0}$: ако претпоставимо да је $A>0$, онда

- за $\varphi=0$ се добија $\Delta f=\frac{1}{2}\Delta\rho^2(A+2\alpha)>0$
- ако је $B=0\Rightarrow C<0$, па је за $\varphi=\frac{\pi}{2}$, $\Delta f=\frac{1}{2}\Delta\rho^2(C+2\alpha)<0$

  ако је $B\neq 0$, и ако је $\varphi=\varphi_0$, $\operatorname{tg}\varphi_0=-\frac{A}{B}$, онда је

  $$\Delta f=\frac{1}{2}\Delta\rho^2\left(\frac{(AC-B^2)\sin^2\varphi_0}{A}+2\alpha\right)<0$$

Δf мења знак у зависности од φ, што значи да нема екстремум у тачки P_0.

- слично се добија и за $A<0$.
- ако је $A=0$, онда мора бити $B\neq 0$, а

  $\Delta f=\frac{1}{2}\Delta\rho^2[\sin\varphi(2B\cos\varphi+C\sin\varphi)+2\alpha]$. Када је φ довољно мало, и мења знак, и $\sin\varphi$ такође мења знак, док израз у малој загради, који је тада приближно једнак $2B$, не мења. За $\Delta\rho\to 0$, важи $\alpha\to 0$, па α не утиче на знак израза Δf. Следи да је, у том случају, знак израза Δf исти као и знак $\sin\varphi$, тј. φ. Како Δf мења знак у зависности од угла, P_0 није тачка екстремума.

(4) $\boxed{A\cdot C-B^2=0}$:

- $A\neq 0\Rightarrow\Delta f=\frac{1}{2}\Delta\rho^2\left(\frac{(A\cos\varphi+B\sin\varphi)^2}{A}+2\alpha\right)$. Ако је $\varphi=\varphi_0$, $A\cos\varphi+B\sin\varphi=0$, па знак Δf зависи од α.
- $A=0\Rightarrow B=0$, па је $\Delta f=\frac{1}{2}\Delta\rho^2(C\sin^2\varphi+2\alpha)$. За $\varphi=0$, знак Δf зависи од α.

R^n: **Дефиниција.** Сума облика $Q(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ назива се квадратна форма.

Векторски запис: $Q(x_1,\dots,x_n)=\begin{bmatrix}x_1 & \dots & x_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ \dots\\ x_n\end{bmatrix}=x^TA\,x\cdot$

Напомена: Свакој квадратној форми одговара тачно једна симетрична матрица $Q=\frac{1}{2}(A+A^T)$, тако да је $Q(x_1,\dots,x_n)=x^TQ\,x$.

(Ако је *A* симетрична матрица онда је *Q* = *A*).

Дефиниција. За квадратну форму се каже да је позитивно дефинисана ако важи $Q(x_1,\dots,x_n)>0$ кад год је $(x_1,\dots,x_n)\neq(0,\dots,0)$, а негативно дефинисана ако је $Q(x_1,\dots,x_n)<0$ кад год је $(x_1,\dots,x_n)\neq(0,\dots,0)$.

Пример. Форма $Q(x_1,x_2)=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$ није позитивно дефинисана, јер је $Q(x_1,-x_1)=0,\ \forall(x_1,-x_1)$, док форма $Q(x_1,x_2)=x_1^2+2x_1x_2+3x_2^2$ јесте, јер је *Q* = 0 само за $(x_1,x_2)=(0,0)$, а када је $(x_1,x_2)\neq(0,0)$ онда је *Q* > 0.

Теорема. **(Силвестерова)** Нека је $Q(x_1,\dots,x_n)$ дата квадратна форма и *Q* одговарајућа симетрична матрица.

- $Q(x_1,\dots,x_n)$ је **позитивно дефинисана форма** акко $D_1>0,\dots,D_n>0$.
- $Q(x_1,\dots,x_n)$ је **негативно дефинисана форма** акко $D_1<0,\dots,(-1)^nD_n>0$ ($D_1,\dots,D_n$ су главни минори матрице *Q*).

Напомена: Услов *A* > 0, $A\cdot C-B^2>0$ значи да је квадратна форма $d^2f=A\Delta x^2+2B\Delta x\Delta y+C\Delta y^2$ позитивно дефинисана. Слично, ако је *A* < 0, $A\cdot C-B^2>0$, други диференцијал је негативно дефинисана форма.

(20) Дефиниција условног екстремума функције више промењљивих. Неопходни услови условног ексремума функције f: (x, y) → z. Доказ.

При одређивању екстремума неке функције која зависи од више независно промењљивих, често се појављују и неки допунски услови. Екстремуми који задовољавају још неке допунске услове називају се **условним екстремумима**.

Биће описане методе за тражење екстремума функције $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ при условима облика $g_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \ldots, \; g_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$.

Експлицитно решавање

Уколико важи: $$\operatorname{rang}\left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right]_{m\times n} = m,$$ нпр. $$\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \neq 0,$$

и ако је могуће претставити m промењљивих преко преосталих

$$x_1 = \lambda_1(x_{m+1}, \ldots, x_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_m = \lambda_m(x_{m+1}, \ldots, x_n)$$

тражење условног екстремума се своди на тражење безусловног екстремума функције

$$F(x_{m+1}, \ldots, x_n) = f(\lambda_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \ldots, \lambda_m(x_{m+1}, \ldots, x_n), x_{m+1}, \ldots, x_n).$$

Лагранжова метода

R^2: Неопходни услови

Нека је дата функција $z = f(x, y)$ и услов $\varphi(x, y) = 0$, тако да $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ имају непрекидне парцијалне изводе у околини тачке (x_0, y_0), која је условни екстремум ($\varphi(x_0, y_0) = 0$) и да важи $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Према теореми о имплицитно задатој функцији, условом $\varphi(x, y) = 0$ је задата функција $y = y(x)$, тако да је $z = f(x, y(x))$, па у тачки екстремума (x_0, y_0) важи

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Диференцирањем услова $\varphi(x, y) = \varphi(x, y(x)) = 0$, добија се (за све вредности x, y које задовољавају услов)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Одатле за тачку (x_0, y_0) важи,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

односно

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\cdot\frac{dy}{dx}=0.$$

Изаберимо $\lambda = \lambda_0$, тако да буде задовољен услов

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda_0\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0.$$

У том случају важи и $$\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda_0\frac{\partial \varphi}{\partial x}=0.$$

Дакле у тачкама екстремума важе услови

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)+\lambda_0\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0,y_0)=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+\lambda_0\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0,y_0)=0\\ \varphi(x_0,y_0)=0\end{array}\right\}$$

, чиме је доказана следећа теорема:

Теорема. Неопходан услов да функција $z = f(x, y)$ при услову $\varphi(x, y) = 0$ има екстремум у некој тачки (x_0, y_0), под претпоставком да $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ имају непрекидне парцијалне изводе у околини тачке (x_0, y_0), и да је $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$, јесте да постоји такав реалан број λ_0, да вредности x_0, y_0, λ_0 задовољавају систем једначина

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)+\lambda_0\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0,y_0)=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+\lambda_0\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0,y_0)=0\\ \varphi(x_0,y_0)=0\end{array}\right\}.$$

Напомена. Нека је $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$ тзв. Лагранжова функција. Њени парцијални изводи су $\dfrac{\partial L}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial L}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=\varphi(x,y)$, што значи да се неопходни услови за условне екстремуме, из горње теореме, могу написати

$$\frac{\partial L}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial L}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial L}{\partial \lambda}=0.$$

R^n: Уколико тражимо екстремуме функције $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ при условима облика $g_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, ..., g_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, може се формирати одговарајућа Лагранжова функција

$$L(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_m) = f(x_1,\ldots,x_n) + \lambda_1 g_1(x_1,\ldots,x_n) + \ldots + \lambda_m g_m(x_1,\ldots,x_n).$$

Следећа теорема даје неопходне услове за условни екстремум функције f при задатим условима:

Теорема. Нека је $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ екстремум функције $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ при условима $g_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \ldots, g_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$. Ако претпоставимо да функције $f, g_1, ..., g_m$ имају парцијалне изводе првог реда у околини тачке P_0 и да је $\operatorname{rang}\left[\left.\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right|_{P_0}\right]_{m\times n} = m$, онда постоје вредности $\lambda_1^0,\ldots,\lambda_m^0$ ($\lambda_0 = (\lambda_1^0,\ldots,\lambda_m^0)$), тако да важи

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial L}{\partial x_1}\right|_{(P_0,\lambda_0)} = \left.\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{P_0} + \lambda_1^0 \left.\dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}\right|_{P_0} + \ldots + \lambda_m^0 \left.\dfrac{\partial g_m}{\partial x_1}\right|_{P_0} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left.\dfrac{\partial L}{\partial x_n}\right|_{(P_0,\lambda_0)} = \left.\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{P_0} + \lambda_1^0 \left.\dfrac{\partial g_1}{\partial x_n}\right|_{P_0} + \ldots + \lambda_m^0 \left.\dfrac{\partial g_m}{\partial x_n}\right|_{P_0} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1}\right|_{(P_0,\lambda_0)} = g_1(x_1^0,\ldots,x_n^0) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left.\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_m}\right|_{(P_0,\lambda_0)} = g_m(x_1^0,\ldots,x_n^0) = 0. \end{cases}$$

(21) Довољан услов за условни ексремум функције више променљивих. Доказ.

Нека функција $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ са условима $g_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \ldots, g_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ има у тачки $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ условни екстремум и испуњава услове претходне теореме. Нека је тачка $P(x_1^0 + \Delta x_1, \ldots, x_n^0 + \Delta x_n)$ таква да су у њој испуњени услови $g_1 = 0, \ldots, g_m = 0$. Онда је

$$\Delta u = f(x_1^0 + \Delta x_1, \ldots, x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0) = f(x_1^0 + \Delta x_1, \ldots, x_n^0 + \Delta x_n) +$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underbrace{g_i(x_1^0 + \Delta x_1, \ldots, x_n^0 + \Delta x_n)}_{=0} - f(x_1^0, \ldots, x_n^0) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underbrace{g_i(x_1^0, \ldots, x_n^0)}_{=0} = \Delta_x L,$$

где је $\Delta_x L$ прираштај Лагранжове функције, само по променљивим x_i. Применом Тејлорове формуле (под претпоставком да функције имају друге парц. изводе)

$$\Delta_x L \approx \frac{1}{2} d_x^2 L,$$

из чега следи **теорема о довољним условима за условни екстремум**:

Теорема. Нека функције $f, g_1, \ldots, g_m$ имају парцијалне изводе до другог реда и нека је $(x_1^0, \ldots, x_n^0, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0)$ ((P_0, λ_0)) стационарна тачка Лагранжеве функције. Ако је

(1) $d_x^2 L\big|_{P_0} > 0$ онда је P_0 **условни минимум (строги)**;

(2) $d_x^2 L\big|_{P_0} < 0$ онда је P_0 **условни максимум (строги)**.