1. Довољан услов за $f''_{xy}(M) = f''_{yx}(M)$.

- **Дефинисати парцијалне изводе I реда и II реда функције** $z = f(x,y)$.

I реда:

Ако постоје коначне граничне вредности количника парцијалних прираштаја функције $f(x, y)$ у тачки $P_0(x_0, y_0)$, са одговарајућим прираштајима независне промењљиве, кад оне теже нули, тада се те граничне вредности називају парцијалним изводима функције f у тачки $P_0(x_0, y_0)$.

Ознаке:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x} = f'_x\,, \quad y = \text{const}$$

$$\lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y\,, \quad x = \text{const}$$

II реда:

За функцију $z = f(x, y)$, њени парцијални изводи $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ су такође функције 2 параметра x и y.

- Парцијални изводи, парцијалних извода су парцијални изводи другог реда функције $z = f(x, y)$:
- $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{x^2}$ –извод другог реда по x
- $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}$; $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx}$ –мешовити парцијални изводи II реда
- $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{y^2}$ –извод другог реда по y.

- **Формулисати теорему о довољном услову за** $f''_{xy}(M) = f''_{yx}(M)$.

Ако су мешовити парцијални изводи II реда f''_{xy} и f''_{yx} функције $f(x, y)$, непрекидне функције у свакој тачки области D, онда је у свакој унутрашњој тачки те области $f''_{xy} = f''_{yx}$.

- **Доказати теорему о довољном услову за $f''_{xy}(M) = f''_{yx}(M)$.**

Нека је $P(x, y)$ произвољна тачка у унутрашњости области D. Онда је и цео правоугаоник $PP_1P_2P_3$, где је $P_1(x+\Delta x, y)$ $P_2(x, y+\Delta y)$ $P_3(x+\Delta x, y+\Delta y)$, у области D, за довољно мале Δx и Δy .Посматрајмо израз

$$A = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y)$$

Нека је $\varphi(x) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$, где су y и Δy параметри.

Тада је $A = \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)$.

Према Лагранжевој теореми о средњој вредности (по x): $A = \varphi'(x+\theta\,\Delta x)\,\Delta x$, $0<\theta < 1$. При томе је $\varphi'(x) = f'_x(x, y + \Delta y) - f'_x(x, y)$.

Применом Лагранжеве теореме о средњој вредности (по y) добија се:

$$\varphi'(x) = f''_{xy}(x, y + \eta\,\Delta y)\,\Delta y,\ 0 < \eta < 1,\ \text{тј.}$$

$$A = f''_{xy}(x + \theta\,\Delta x, y + \eta\,\Delta y)\,\Delta x \Delta y,\ 0 < \theta < 1,\ \ 0 < \eta < 1$$

Слично: $\psi(y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$, x и Δx су параметри.

Тада је $A = \psi(y+\Delta y) - \psi(y)$. Ако се два пута примени Лагранжева теорема о средњој вредности (прво по x, па по y) добија се

$$A = f''_{yx}(x + \theta_1\,\Delta x, y + \eta_1\,\Delta y)\,\Delta x \Delta y,\ 0 < \theta_1 < 1,\ \ 0 < \eta_1 < 1.$$

Због непрекидности функција f''_{xy} и f''_{yx}, добија се кад $\Delta x \to 0$ $\Delta y \to 0$, да је

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

2. Довољан услов за $f''_{xy}(M) = f''_{yx}(M)$.

- **Дефинисати унутрашњу тачку скупа и отворен скуп.**

Отворен скуп

Дефиниција 2 1. *Тачка a скупа $A \subset R^n$ је унутрашња тачка скупа A ако постоји ε-околина тачке a која цела припада скупу A.*

2. *Скуп свих унутрашњих тачака скупа A је унутрашњост скупа A и означава се са $IntA$.*

Дефиниција 3 1. *Скуп A је отворен скуп ако је свака његова тачка унутрашња.*

2. *Празан скуп је отворен скуп.*

- **Формулисати теорему о довољном услову за једнакост мешовитих парцијалних извода функције $z = f(x, y)$.**

Ако су мешовити парцијални изводи II реда f''_{xy} и f''_{yx} функције $f(x, y)$, непрекидне функције у свакој тачки области D, онда је у свакој унутрашњој тачки те области $f''_{xy} = f''_{yx}$.

- **Доказати теорему о довољном услову за једнакост мешовитих парцијалних извода.**

Нека је $P(x, y)$ произвољна тачка у унутрашњости области D. Онда је и цео правоугаоник $PP_1P_2P_3$, где је $P_1(x+\Delta x, y)$ $P_2(x, y+\Delta y)$ $P_3(x+\Delta x, y+\Delta y)$, у области D, за довољно мале Δx и Δy .Посматрајмо израз

$$A = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) - f(x, y+\Delta y) + f(x, y)$$

Нека је $\varphi(x) = f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$, где су y и Δy параметри.

Тада је $A = \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)$.

Према Лагранжевој теореми о средњој вредности (по x): $A = \varphi'(x+\theta\,\Delta x)\,\Delta x$, $0<\theta<1$. При томе је $\varphi'(x) = f'_x(x, y+\Delta y) - f'_x(x, y)$.

Применом Лагранжеве теореме о средњој вредности (по y) добија се:

$\varphi'(x) = f''_{xy}(x, y+\eta\,\Delta y)\,\Delta y,\ 0<\eta<1$, тј.

$A = f''_{xy}(x+\theta\,\Delta x, y+\eta\,\Delta y)\,\Delta x\Delta y,\ 0<\theta<1,\ \ 0<\eta<1$

Слично: $\psi(y) = f(x+\Delta x, y) - f(x, y)$, x и Δx су параметри.

Тада је $A = \psi(y+\Delta y) - \psi(y)$. Ако се два пута примени Лагранжева теорема о средњој вредности (прво по x, па по y) добија се

$$A = f''_{yx}(x+\theta_1 \Delta x, y+\eta_1 \Delta y)\Delta x \Delta y,\ \ 0<\theta_1<1,\ \ 0<\eta_1<1.$$

Због непрекидности функција f''_{xy} и f''_{yx}, добија се кад $\Delta x \to 0$ $\Delta y \to 0$, да је

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

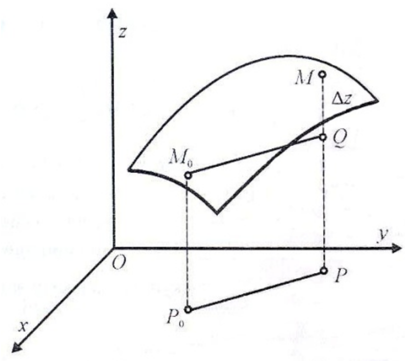
3. Дефиниција диференцијабилности функције више променљивих. Довољан услов диференцијабилности.

- **Дефинисати парцијални и тотални прираштај функције** $z = f(x, y)$**.**

Тотални прираштај функције $z = f(x, y)$ у тачки $P_0(x_0, y_0)$ је

$$\Delta z = f(P) - f(P_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0),$$

где је $P(x, y)$ са координатама $x = x_0 + \Delta x$ и $y = y_0 + \Delta y$.



- Ако се мења једна од променљивих, а друга је фиксирана, добијамо парцијалне прираштаје по x и y

$$\Delta_x f(x,y) = \Delta_x z = f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

$$\Delta_y f(x,y) = \Delta_y z = f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)$$

- **Дефинисати диференцијабилност функције** $z = f(x, y)$**.**

  Ако тотални прираштај функције $z = f(x, y)$ у тачки $M_0(x_0, y_0)$ може да се напише у облику

$$\Delta z = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y$$

  где $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ кад $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, тада је функција $z = f(x, y)$ диференцијабилна у тачки $M_0(x_0, y_0)$.

- **Доказати да, ако функција $z = f(x,y)$ има непрекидне парцијалне изводе f'_x и f'_y онда је она диференцијабилна.**

Теорема 3 *Ако су сви парцијални изводи првог реда функције f у тачки a непрекидни, тада је функција f диференцијабилна у тачки a.*

Доказ. Ради једноставности дат је доказ за $n = 2$, а аналогно се доказује и општи случај.

Ако је $a = (x,y)$, функција f има парцијалне изводе у свакој тачки $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ неке околине $U_\delta(a)$, при чему су у самој тачки a они непрекидни. Применом Лагранжове теореме (за функцију једне променљиве) на $[x, x+\Delta x]$

(односно $[x + \Delta x, x]$ ако је $\Delta x < 0$) и на $[y, y + \Delta y]$ (односно $[y + \Delta y, y]$ ако је $\Delta y < 0$) добијамо

$$\begin{aligned} \Delta f(x,y) &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y + \Delta y) - f(x,y) \\ &= f'_x(c_1, y + \Delta y)\Delta x + f'_y(x, c_2)\Delta y \\ &= (f'_x(x,y) + \alpha)\Delta x + (f'_y(x,y) + \beta)\Delta y \\ &= f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y \end{aligned}$$

где је $c_1 \in (x, x + \Delta x)$, $c_2 \in (y, y + \Delta y)$ и где су $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y)$ и $\beta = \beta(\Delta y)$ бесконачно мале величине за $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$.

Како за $\rho = |(\Delta x, \Delta y)| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ важи

$$\frac{|\alpha\Delta x + \beta\Delta y|}{\rho} \leq |\alpha|\frac{|\Delta x|}{\rho} + |\beta|\frac{|\Delta y|}{\rho} \leq |\alpha| + |\beta| \to 0$$

при $\rho \longrightarrow 0$, то је

$$\alpha\Delta x + \beta\Delta y = o(\rho), \quad \rho \to 0,$$

па је f диференцијабилна у тачки $a = (x,y)$.

Скуп свих функција $f : X \to R$ које у свакој тачки $a \in X$ имају непрекидне све парцијалне изводе првог реда означава се са $C^1(X)$. Из теореме следи да су функције из скупа $C^1(X)$ диферецијабилне.

4. Диференцијабилност и непрекидност.

- **Дефинисати граничну вредност функције** $z = f(x, y)$ **преко низа тачака .**

Ако за **произвољан** низ тачака $\mathrm{M}_n(x_n, y_n)$ из области дефинисаности, који конвергира ка тачки $\mathrm{M}_0(x_0, y_0)$, низ одговарајућих вредности $f(x_n, y_n)$ ($\equiv f(\mathrm{M}_n)$) увек конвергира истом броју A, тада се тај број назива граничном вредношћу функције $f(x, y)$ у тачки M_0.

$$A = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = \lim_{M \to M_0} f(M).$$

- **Дефинисати непрекидност и диференцијабилност функције** $z = f(x, y)$**.**

  - За функцију $z = f(x,y)$ ($u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$) дефинисану у тачки $\mathrm{M}_0(x_0,y_0)$ ($\mathrm{M}_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$) и некој њеној околини , кажемо да је непрекидна у M_0 ако је

$$\lim_{M \to M_0} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

$$\left(\lim_{M \to M_0} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \right)$$

тј. ако за свако $\varepsilon>0$, постоји $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, тако да је

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

$$\left(\sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \ldots + (x_n - x_n^0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)| < \varepsilon \right)$$

  - Ако тотални прираштај функције $z = f(x, y)$ у тачки $M_0(x_0, y_0)$ може да се напише у облику

$$\Delta z = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \alpha\, \Delta x + \beta\, \Delta y$$

где $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ кад $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, тада је функција $z = f(x, y)$ диференцијабилна у тачки $M_0(x_0, y_0)$.

- **Доказати да ако је функција $z = f(x, y)$ диференцијабилна у некој тачки, она је и непрекидна у тој тачки.**

Теорема 2 *Ако је функција f диференцијабилна у тачки $a \in X$, тада је она и непрекидна у тачки a.*

Доказ. Из претпоставке диференцијабилности и претходне теореме следи да је

$$\Delta f(a) = \sum_{k=1}^{n} f'_{x_k}(a)\Delta x_k + o(|\Delta x|), \quad \Delta x \to 0.$$

Како парцијални изводи постоје, то је

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(a) = 0,$$

односно за $\Delta x = x - a$ је

$$f(x) = f(a) + \Delta f(a) \to f(a), \quad x \to a.$$

Према томе, f је непрекидна у тачки a. ■

5. Диференцијабилност и непрекидност.

- **Дефинисати граничну вредност функције $z = f(x, y)$ преко ε-околине тачке.**

За функцију $f(x, y)$ ($f(x_1, x_2, ..., x_n)$) која је дефинисана у некој околини тачке M_0 изузев можда у M_0 кажемо да има граничну вредност A кад тачка M конвергира тачки M_0, и пишемо

$$\lim_{M \to M_0} f(x, y) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$$

$$\lim_{M \to M_0} f(x_1, x_2, ..., x_n) = \lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ .... \\ x_n \to x_n^0}} f(x_1, x_2, ..., x_n) = A$$

ако за сваки произвољно мали позитиван број ε, постоји довољно мали позитиван број $\delta = \delta(\varepsilon)$ тако да

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - A| < \varepsilon$$

$$\left(0 < \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + ... + (x_n - x_n^0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x_1, x_2, ..., x_n) - A| < \varepsilon\right)$$

тј. ако M припада δ- околини тачке M_0, без M_0, онда $f(M)$ припада ε- околини тачке A.

- **Дефинисати непрекидност и диференцијабилност функције $z = f(x, y)$.**

За функцију $z = f(x,y)$ ($u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$) дефинисану у тачки $M_0(x_0,y_0)$ ($M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$) и некој њеној околини , кажемо да је непрекидна у M_0 ако је

$$\lim_{M \to M_0} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

$$\left(\lim_{M \to M_0} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)\right)$$

тј. ако за свако $\varepsilon>0$, постоји $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, тако да је

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow \left|f(x,y)-f(x_0,y_0)\right| < \varepsilon$$

$$\left(\sqrt{(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2+\ldots+(x_n-x_n^0)^2} < \delta \Rightarrow \left|f(x_1,x_2,\ldots,x_n)-f(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)\right| < \varepsilon\right)$$

Ако тотални прираштај функције $z = f(x, y)$ у тачки $M_0(x_0, y_0)$ може да се напише у облику

$$\Delta z = f_x'(x, y)\Delta x + f_y'(x, y)\Delta y + \alpha\, \Delta x + \beta\, \Delta y$$

где $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ кад $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, тада је функција $z = f(x, y)$ диференцијабилна у тачки $M_0(x_0, y_0)$.

- **Доказати да ако је функција $z = f(x, y)$ диференцијабилна у некој тачки, она је и непрекидна у тој тачки.**

Теорема 2 *Ако је функција f диференцијабилна у тачки $a \in X$, тада је она и непрекидна у тачки a.*

Доказ. Из претпоставке диференцијабилности и претходне теореме следи да је

$$\Delta f(a) = \sum_{k=1}^{n} f'_{x_k}(a)\Delta x_k + o(|\Delta x|), \quad \Delta x \to 0.$$

Како парцијални изводи постоје, то је

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(a) = 0,$$

односно за $\Delta x = x - a$ је

$$f(x) = f(a) + \Delta f(a) \to f(a), \quad x \to a.$$

Према томе, f је непрекидна у тачки a. ■

6. Тотални диференцијал функције више промењљивих.

- **Дефинисати диференцијабилност функције** $z = f(x, y)$.

Ако тотални прираштај функције $z = f(x, y)$ у тачки $M_0(x_0, y_0)$ може да се напише у облику

$$\Delta z = f_x'(x, y)\Delta x + f_y'(x, y)\Delta y + \alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y$$

где $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ кад $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, тада је функција $z = f(x, y)$ диференцијабилна у тачки $M_0(x_0, y_0)$.

- Свака функција која у (x_0, y_0) има непрекидне парцијалне изводе је диференцијабилна у тој тачки.
- Ако је функција диференцијабилна у (x_0, y_0) она је и непрекидна у (x_0, y_0).

- **Формулисати и доказати теорему о довољним условима за диференцијабилност функције.**

Довољни услови деференцијабилности

Нека је $X \subset R^n$ отворен скуп и нека функција $f : X \to R$ има све парцијалне изводе првог реда у околини тачке $a \in X$.

Теорема 3 *Ако су сви парцијални изводи првог реда функције f у тачки a непрекидни, тада је функција f диференцијабилна у тачки a.*

Доказ. Ради једноставности дат је доказ за $n = 2$, а аналогно се доказује и општи случај.

Ако је $a = (x, y)$, функција f има парцијалне изводе у свакој тачки $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ неке околине $U_\delta(a)$, при чему су у самој тачки a они непрекидни. Применом Лагранжове теореме (за функцију једне променљиве) на $[x, x+\Delta x]$ (односно $[x + \Delta x, x]$ ако је $\Delta x < 0$) и на $[y, y + \Delta y]$ (односно $[y + \Delta y, y]$ ако је $\Delta y < 0$) добијамо

$$\begin{aligned}
\Delta f(x,y) &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y + \Delta y) - f(x,y) \\
&= f_x'(c_1, y + \Delta y)\Delta x + f_y'(x, c_2)\Delta y \\
&= (f_x'(x,y) + \alpha)\Delta x + (f_y'(x,y) + \beta)\Delta y \\
&= f_x'(x,y)\Delta x + f_y'(x,y)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y
\end{aligned}$$

где је $c_1 \in (x, x + \Delta x)$, $c_2 \in (y, y + \Delta y)$ и где су $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y)$ и $\beta = \beta(\Delta y)$ бесконачно мале величине за $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

Како за $\rho = |(\Delta x, \Delta y)| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ важи

$$\frac{|\alpha\Delta x + \beta\Delta y|}{\rho} \le |\alpha|\frac{|\Delta x|}{\rho} + |\beta|\frac{|\Delta y|}{\rho} \le |\alpha| + |\beta| \to 0$$

па је f диференцијабилна у тачки $a = (x, y)$.

Скуп свих функција $f : X \to R$ које у свакој тачки $a \in X$ имају непрекидне све парцијалне изводе првог реда означава се са $C^1(X)$. Из теореме следи да су функције из скупа $C^1(X)$ диферецијабилне.

- **Дефинисати тотални диференцијал функције $z = f(x, y)$.**

За функцију $z = f(x, y)$ која је диференцијабилна у тачки $P_0(x_0, y_0)$, главни део тоталног прираштаја $f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$ се зове тотални диференцијал.

- <u>Ознака:</u> $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$, где пишемо $dx = \Delta x$, $\Delta x \to 0$, $dy = \Delta y$, $\Delta y \to 0$.
- Код диференцијабилне функције $\Delta z = dz + \alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y$, $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ кад $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

<u>- Код функције n променљивих</u> $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, ако су сви парцијални изводи $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, ..., n$ непрекидни у некој околини тачке $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, израз

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n$$

представља главни део прираштаја функције $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ и зове се тотални диференцијал дате функције.

7. Тотални диференцијал функције више променљивих. Диференцијали вишег реда.

- **Дефинисати тотални диференцијал функције $z = f(x, y)$.**

За функцију $z = f(x, y)$ која је диференцијабилна у тачки $P_0(x_0, y_0)$, главни део тоталног прираштаја $f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$ се зове тотални диференцијал.

- <u>Ознака:</u> $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$, где пишемо $dx = \Delta x$, $\Delta x \to 0$, $dy = \Delta y$, $\Delta y \to 0$.
- Код диференцијабилне функције $\Delta z = dz + \alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y$, $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ кад $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

<u>Код функције n променљивих</u> $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, ако су сви парцијални изводи $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, ..., n$ непрекидни у некој околини тачке $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, израз

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n$$

представља главни део прираштаја функције $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ и зове се тотални диференцијал дате функције.

- **Извести формулу за диференцијал II реда функције $z = f(x, y)$.**

Диференцијалом другог реда функције $z = f(x, y)$ назива се диференцијал, тоталног диференцијала дате функције, тј. $d^2z = d(dz)$, који се израчунава уз претпоставку да су dx и dy константни.

- Ако су dx и dy константни, $d(dx) = d(dy) = 0$, па је

$$d^2z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dy\right]dx + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy\right]dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Када су мешовити парцијални изводи непрекидни (тј. једнаки) онда је

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

- **Извести формулу за диференцијал III реда функције $z = f(x, y)$.**

Слично за $n = 3$ добија се

$$\begin{aligned} d^2 f &= \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)^2 f \\ &= f''_{xx}dx^2 + f''_{yy}dy^2 + f''_{zz}dz^2 + 2f''_{xy}dxdy + 2f''_{xz}dxdz + 2f''_{yz}dydz \\ &= (dx \;\; dy \;\; dz)\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \end{aligned}$$

8. Парцијални изводи сложене функције.

- **Дефинисати парцијалне изводе I реда функције $z = f(x, y)$.**

Ако постоје коначне граничне вредности количника парцијалних прираштаја функције $f(x, y)$ у тачки $P_0(x_0, y_0)$, са одговарајућим прираштајима независне променљиве, кад оне теже нули, тада се те граничне вредности називају парцијалним изводима функције f у тачки $P_0(x_0, y_0)$.

Ознаке:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x} = f'_x, \quad y = \text{const}$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y, \quad x = \text{const}$$

- **Дефинисати диференцијабилност функције $z = f(x, y)$.**

Ако тотални прираштај функције $z = f(x, y)$ у тачки $M_0(x_0, y_0)$ може да се напише у облику

$$\Delta z = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y$$

где $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ кад $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, тада је функција $z = f(x, y)$ диференцијабилна у тачки $M_0(x_0, y_0)$.

- **Ако су $z = F(u, v)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ диференцијабилне функције, извести формулу за z'_x. Написати формулу за z'_y.**

Ако је дата функција $z = F(u, v)$, где су u и v функције независно променљивих x и y, тј. $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, тада је z сложена функција аргумената x и y,

$$z = F[u(x, y), v(x, y)].$$

- Израчунаћемо $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ под претпоставком да $F(u, v)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ имају непрекидне парцијалне изводе (диференцијабилне су).

- Ако се аргумент y фиксира, а x има прираштај Δx, онда су прираштаји функција u и v по променљивој x: $\Delta_x u$ и $\Delta_x v$.

Прираштај функције $z = F(u, v)$, по променљивој x (због диференцијабилности)

$$\Delta_x z = \frac{\partial f}{\partial u}\Delta_x u + \frac{\partial f}{\partial v}\Delta_x v + \alpha\,\Delta_x u + \beta\,\Delta_x v,$$

дељењем са Δx добија се

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \alpha\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \beta\frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

Како су функције $u = u(x,y)$ и $v = v(x,y)$ непрекидне, ако $\Delta x \to 0$, онда $\Delta_x u \to 0$ и $\Delta_x v \to 0$, а такође $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$.

Како је $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}$,

заменом у претходном изразу се добија

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}.$$

- Слично, ако се аргумент x фиксира, а y има прираштај Δy, онда се добија

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

9. Парцијални изводи сложене функције.

- **Дефинисати парцијалне изводе I реда функције $z = f(x,y)$.**

Ако постоје коначне граничне вредности количника парцијалних прираштаја функције $f(x, y)$ у тачки $P_0(x_0, y_0)$, са одговарајућим прираштајима независне променљиве, кад оне теже нули, тада се те граничне вредности називају парцијалним изводима функције f у тачки $P_0(x_0, y_0)$.

Ознаке:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x} = f'_x, \quad y = \text{const}$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y, \quad x = \text{const}$$

- **Ако су $z = F(u,v)$, $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ диференцијабилне функције, извести формулу за z'_x. Написати формулу за z'_y.**

Ако је дата функција $z = F(u, v)$, где су u и v функције независно променљивих x и y, тј. $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, тада је z сложена функција аргумената x и y,

$$z = F[u(x,y), v(x,y)].$$

- Израчунаћемо $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ под претпоставком да $F(u, v)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ имају непрекидне парцијалне изводе (диференцијабилне су).

- Ако се аргумент y фиксира, а x има прираштај Δx, онда су прираштаји функција u и v по промењљивој x: $\Delta_x u$ и $\Delta_x v$.

Прираштај функције $z = F(u, v)$, по промењљивој x (због диференцијабилности)

$$\Delta_x z = \frac{\partial f}{\partial u}\Delta_x u + \frac{\partial f}{\partial v}\Delta_x v + \alpha\,\Delta_x u + \beta\,\Delta_x v,$$

дељењем са Δx добија се

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \alpha\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \beta\frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

Како су функције $u = u(x,y)$ и $v = v(x,y)$ непрекидне, ако $\Delta x \to 0$, онда $\Delta_x u \to 0$ и $\Delta_x v \to 0$, а такође $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$.

Како je $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}$,

заменом у претходном изразу се добија

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}.$$

- Слично, ако се аргумент x фиксира, а y има прираштај Δy, онда се добија

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

- **Написати формулу за сложену функцију *n* промењљивих.**

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \ldots, t_m),\ i = 1, 2, \ldots, n$$

10. Теорема о егзистенцији и диференцијабилности имплицитне функције.

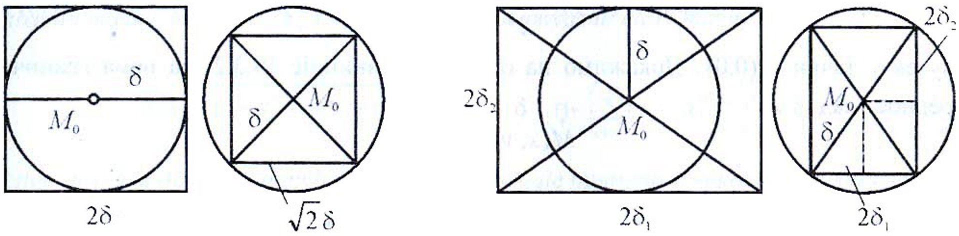
- **Дефинисати функцију две промењљивих и околину тачке $(x_0, y_0) \in R^2$.**

  - Величина z се назива функцијом промењљивих величина x и y на скупу D ако сваком уређеном пару $(x, y) \in$ D по неком закону коресподенције f одговара нека одређена вредност промењљиве z:

$$D \subset R\times R = \{(x, y): x\in R, y\in R\},\ z \in E \subset R$$

$$R\times R \supset D \xrightarrow{f(x,y)} E \subset R$$

- <u>Кружна околина:</u> Скуп свих тачака M таквих да је $d(M, M_0) < \delta$, тј. да важи $\{(x,y): \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta\}$. Тај скуп је унутрашњост круга са центром у тачки M_0 и полупречником δ.
- <u>Квадратна околина:</u> Скуп тачака M за које важи $\{(x,y): |x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta\}$. Тачка M_0 се налази у пресеку дијагонала квадрата, а страница квадрата има дужину 2δ.



- **Дефинисати имплицитно задату функцију једне променљиве и формулисати теорему о егзистенцији и диференцијабилности имплицитне функције.**

Претпоставимо да су вредности две променљиве x и y повезане једначином $F(x, y) = 0$. Ако за сваку вредност x постоји одговарајућа вредност y, тако да x, y задовољавају једначину $F(x, y) = 0$, онда она дефинише једнозначну или вишезначну функцију $y = \varphi(x)$, која идентички задовољава $F(x, \varphi(x)) = 0$.

Функција $y = \varphi(x)$ задата једначином која није решена по y је имплицитна.

<u>**Теорема.**</u> Ако је дата једначина $F(x, y) = 0$ и ако функција $F(x, y)$ има следећа својства:

1. $F(x, y)$, $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ су дефинисане и непрекидне у правоугаонику
$$R = \{(x,y): x_0 - a \le x \le x_0 + a,\ y_0 - b \le y \le y_0 + b\}.$$

2. $F(x_0, y_0) = 0$, $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

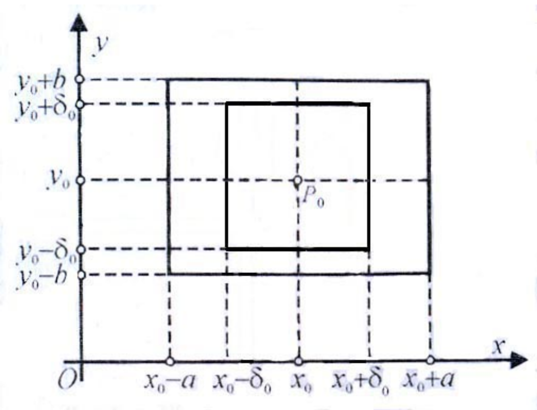
(За x = const, $F(x, y)$ је монотоно растућа или опадајућа функција по y)

тада ће једначином $F(x, y) = 0$ у неком правоугаонику
$$R' = \{(x,y): x_0 - \delta \le x \le x_0 + \delta,\ y_0 - \delta_0 \le y \le y_0 + \delta_0\}$$

бити дефинисана једнозначна имплицитна функција, која је <u>непрекидна</u> и <u>непрекидно диференцијабилна</u> у интервалу $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ и при томе је $y_0 = \varphi(x_0)$.

- **Доказати теорему о егзистенцији и диференцијабилности имплицитне функције – део о егзистенције имплицитне функције.**

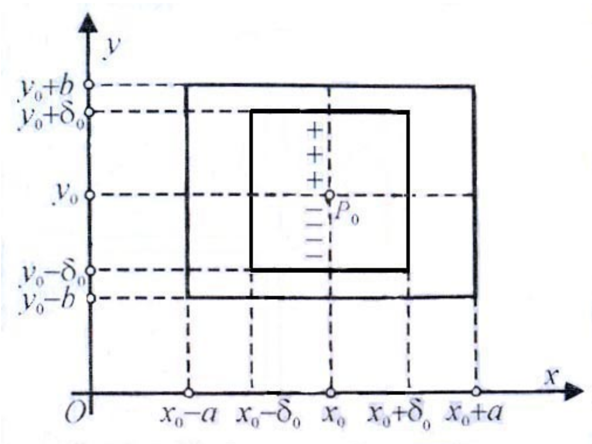
Доказ: Претпоставимо да је $F'_y(x_0, y_0) > 0$. Због непрекидности F'_y, постоји околина тачке $P_0(x_0, y_0)$, например квадрат са страницом $2\delta_0$ чије се дијагонале секу у P_0, у којој у свим тачкама важи $F'_y(x, y) > 0$.



- За $x = x_0$ функција $F(x_0, y)$ ↗ кад y варира од $y_0-\delta_0$ до $y_0+\delta_0$.

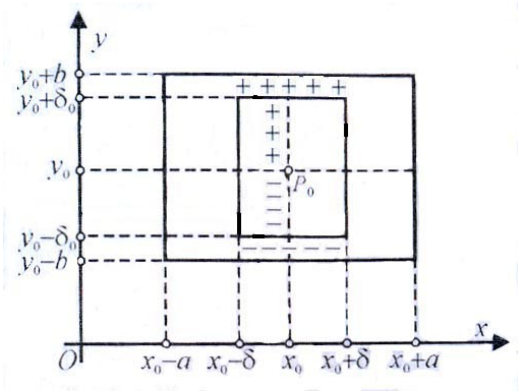
$F(x_0, y_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad F(x_0, y) < 0$ за $y_0-\delta_0 < y < y_0$

$F(x_0, y) > 0$ за $y_0 < y < y_0+\delta_0$



- $F(x_0, y_0-\delta_0) < 0$. Због непрекидности функције F, F је непрекидна по променљивој x, за фиксирано $y = y_0-\delta_0$, па у довољно малој околини $(x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)$ тачке $(x_0, y_0-\delta_0)$ важи

$F(x, y_0-\delta_0) < 0$, за свако $x \in (x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)$.



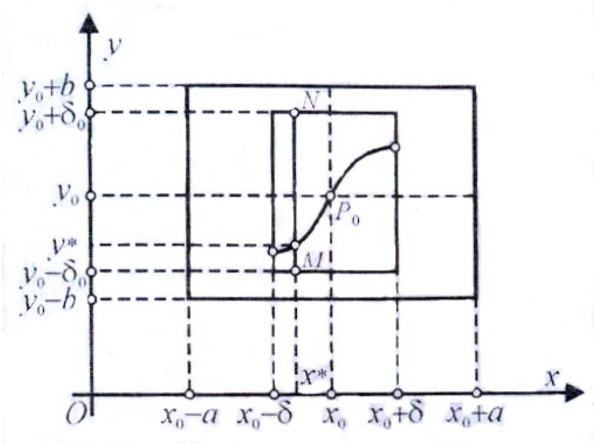
- $F(x_0, y_0+\delta_0) > 0$, слично као и малопре, за фиксирано $y = y_0+\delta_0$ постоји довољно мала околина $(x_0-\delta_2, x_0+\delta_2)$тако да

$$F(x, y_0+\delta_0) > 0, \text{ за свако } x \in (x_0-\delta_2, x_0+\delta_2).$$

За $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ важи $F(x, y_0-\delta_0) < 0$, $F(x, y_0+\delta_0) > 0$, за свако $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$.

- Ако за произвољно $x^* \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, y мењамо од $y_0-\delta_0$ до $y_0+\delta_0$, тада је $F(x^*, y)$ непрекидна функција променљиве y, која на крајевима одсечка MN ($M(x^*, y_0-\delta_0)$, $N(x^*, y_0+\delta_0)$) има вредности различитог знака. По Коши – Болцановој теореми постоји $y^* \in (y_0-\delta_0, y_0+\delta_0)$ такво да је $F(x^*, y^*) = 0$. Како је $F(x^*, y)$ ↗(по y), то је y^* јединствено.

$$\exists_1\, y = y^* \in (y_0-\delta_0, y_0+\delta_0) :\ F(x^*, y^*) = 0.$$



- Како је x^* произвољно изабрано

$$\forall\, x \in (x_0-\delta, x_0+\delta), \exists_1\, y \in (y_0-\delta_0, y_0+\delta_0) :\ F(x, y) = 0,$$

тј. на правоугаонику $R' = \{(x, y) : x_0 - \delta \le x \le x_0 + \delta,\ y_0 - \delta_0 \le y \le y_0 + \delta_0\}$,

једначина $F(x, y) = 0$ дефинише y као имплицитну функцију од x, $y = \varphi(x)$, и при том због $F(x_0, y_0) = 0$ важи $y_0 = \varphi(x_0)$.

11. Теорема о егзистенцији и диференцијабилности имплицитне функције.

- **Дефинисати функцију више промењљивих и околину тачке** $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in R^n$ **.**

Ако свакој уређеној n-торки $(x_1, x_2, ..., x_n) \in G$ по неком закону коресподенције f одговара реалан број $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, кажемо да је u функција промењљивих $x_1, x_2, ..., x_n$.

$$R^n \supset G \xrightarrow{f(x_1, x_2, ..., x_n)} E \subset R.$$

У случају да су $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in R^n$

тачке n-димензионалног простора, тада се δ околином тачке M_0 назива скуп тачака M за које је

$$d(M, M_0) = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + ... + (x_n - x_n^0)^2} = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^0)^2\right)^{\frac{1}{2}} < \delta, -$$ сфера са

центром у тачки M_0 и полупречником δ.

- **Дефинисати имплицитно задату функцију једне промењљиве и формулисати теорему о егзистенцији и диференцијабилности имплицитне функције.**

Претпоставимо да су вредности две промењљиве x и y повезане једначином $F(x, y) = 0$. Ако за сваку вредност x постоји одговарајућа вредност y, тако да x, y задовољавају једначину $F(x, y) = 0$, онда она дефинише једнозначну или вишезначну функцију $y = \varphi(x)$, која идентички задовољава $F(x, \varphi(x)) = 0$.

Функција $y = \varphi(x)$ задата једначином која није решена по y је имплицитна.

Теорема. Ако је дата једначина $F(x, y) = 0$ и ако функција $F(x, y)$ има следећа својства:

1. $F(x, y)$, $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ су дефинисане и непрекидне у правоугаонику
$$R = \{(x, y) : x_0 - a \le x \le x_0 + a,\ y_0 - b \le y \le y_0 + b\}.$$

2. $F(x_0, y_0) = 0$, $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

(За x = const, $F(x, y)$ је монотоно растућа или опадајућа функција по y)

тада ће једначином $F(x, y) = 0$ у неком правоугаонику

$$R' = \{(x, y) : x_0 - \delta \le x \le x_0 + \delta,\ y_0 - \delta_0 \le y \le y_0 + \delta_0\}$$

бити дефинисана једнозначна имплицитна функција, која је непрекидна и непрекидно диференцијабилна у интервалу $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ и при томе је $y_0 = \varphi(x_0)$.

- **Доказати теорему о егзистенцији и диференцијабилности имплицитне функције – део о диференцијабилности имплицитне функције.**

Диференцијабилност имплицитне функције.

Кад $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, онда због непрекидности функција $F'_x(x, y)$ и $F'_y(x, y)$ следи да

$$\left.\begin{aligned} &F'_x(x + \theta\Delta x, y + \Delta y) \to F'_x(x, y) \\ &F'_y(x, y + \eta\Delta y) \to F'_y(x, y) \neq 0 \end{aligned}\right\}$$

Зато је $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\dfrac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = y'_x = \varphi'_x$, тј. извод је дефинисан.

Како су $F'_x(x, y)$ и $F'_y(x, y)$ непрекидне функције, непрекидне су и сложене функције $F'_x(x, y(x))$ и $F'_y(x, y(x))$ и при томе је $F'_y(x, y) \neq 0$ у интервалу $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, па је извод имплицитне функције $y = \varphi(x)$ непрекидан.

12. Имплицитно задата функција.

- **Дефинисати функцију две и три променљиве, график функције две променљиве, ниво линије.**

Величина z се назива функцијом променљивих величина x и y на скупу D ако сваком уређеном пару $(x, y) \in D$ по неком закону коресподенције f одговара нека одређена вредност променљиве z:

$$D \subset R\times R = \{(x, y): x\in R, y\in R\},\ z \in E \subset R$$
$$R\times R \supset D \xrightarrow{f(x,y)} E \subset R.$$

Ако сваком уређеном пару $(x_1, x_2, x_3) \in G$ по неком закону коресподенције f одговара реалан број $u = f(x_1, x_2, x_3)$, кажемо да је u функција променљивих x_1, x_2, x_3. $R^3 \supset G$

$$\xrightarrow{f(x_1, x_2, x_3)} E \subset R.$$

Графиком функције $z = f(x, y)$, двеју независно променљивих x и y (у Декартовом правоуглом координатном систему) назива се скуп тачака са апсцисама x и ординатама y и апликатима, одговарајућим вредностима функције z, што у одређеним случајевима представља неку површ у простору променљивих x, y и z; тада сама формула којом је задата функција $z = f(x, y)$ представља једначину те површи.

Ниво – линијом функције $z = f(x, y)$ назива се скуп тачака (x, y) у равни Oxy, за које функција има исту вредност z_0, тј. важи $f(x, y) = z_0$.

Скуп ниво – линија за више различитих константних вредности z_i чини мрежу ниво линија функције $z = f(x, y)$.

- **Дефинисати имплицитно задату функцију две променљиве.**

Теорема 4 *Нека је $X \subset R^3$ отворен скуп и нека функција $F : X \to R$ има следећа својства:*

1. *F је непрекидна функција на X,*
2. *постоји $(x_0, y_0, z_0) \in X$ за коју је $F(x_0, y_0, z_0) = 0$,*
3. *F'_z је непрекидна функција на X,*
4. *$F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.*

Тада постоји околина $U \times V$ тачке (x_0, y_0, z_0) и једнозначно одређена непрекидна функција $f : U \to V$ таква да је $f(x_0, y_0) = z_0$ и $F(x, , y, f(x, y)) = 0$ за $x \in U$.

Уз додатни услов, $F \in C^1(X)$, за функцију f важи $f \in C^1(U)$ и

$$f'_x(x,y) = -\frac{F'_x(x,y,f(x,y))}{F'_z(x,y,f(x,y))}, \quad f'_y(x,y) = -\frac{F'_y(x,y,f(x,y))}{F'_z(x,y,f(x,y))}.$$

- **Ако је функција $z = f(x,y)$ задата имплицитно са $F(x,y,z) = 0$, извести формуле за z'_x и z'_y.**

Дакле, ако је функција $f : (x, y) \to z$ дефинисана имплицитно са $F(x, y, z) = 0$, тада је (у скраћеном запису)

$$f'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad f'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Даљим диференцирањем по x, односно y, добијамо

$$f''_{x^2} = \frac{-F''_{x^2}F'^2_z + 2F''_{xz}F'_xF'_z - F''_{z^2}F'^2_x}{F'^3_z},$$

$$f''_{y^2} = \frac{-F''_{y^2}F'^2_z + 2F''_{yz}F'_yF'_z - F''_{z^2}F'^2_y}{F'^3_z},$$

$$f''_{xy} = \frac{-F''_{xy}F'^2_z + F''_{xz}F'_yF'_z + F''_{yz}F'_xF'_z - F''_{z^2}F'_xF'_y}{F'^3_z}.$$

13. Тангентна раван и нормала површи.

- **Дефинисати тангентну раван и нормалу површи, функције $z = f(x, y)$.**

Дефиниција 1. Нека је S глатка површ, а L_x и L_y криве дуж којих равни $y = y_0$ и $x = x_0$ секу S. Раван која садржи тангенте T_x и T_y тих кривих у њиховој заједничкој тачки M_0 (x_0, y_0, z_0) зове се тангентна раван површи S у тачки M_0.

- На основу једначина за T_x и T_y добија се једначина тангентне равни

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0) = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0}(x - x_0) + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0}(y - y_0)$$

($P_0(x_0, y_0)$ је пројекција тачке M_0 на раван Oxy).

Дефиниција 2. Права N која је у датој додирној тачки M_0 глатке површи S и њене тангентне равни, нормална на ову раван, зове се нормала површи S у датој тачки M_0.

- **Ако је функција $z = f(x, y)$ задата имплицитно са $F(x, y, z) = 0$, извести формуле за z'_x и z'_y.**

Дакле, ако је функција $f : (x, y) \to z$ дефинисана имплицитно са $F(x, y, z) = 0$, тада је (у скраћеном запису)

$$f'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad f'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Даљим диференцирањем по x, односно y, добијамо

$$f''_{x^2} = \frac{-F''_{x^2}F'^2_z + 2F''_{xz}F'_xF'_z - F''_{z^2}F'^2_x}{F'^3_z},$$

$$f''_{y^2} = \frac{-F''_{y^2}F'^2_z + 2F''_{yz}F'_yF'_z - F''_{z^2}F'^2_y}{F'^3_z},$$

$$f''_{xy} = \frac{-F''_{xy}F'^2_z + F''_{xz}F'_yF'_z + F''_{yz}F'_xF'_z - F''_{z^2}F'_xF'_y}{F'^3_z}.$$

- **Написати једначине тангентне равани и нормале површи за имплицитно задату функцију.**

Једначина тангентне равни површи S у M_0 је

$$F'_x(x - x_0) + F'_y(y - y_0) + F'_z(z - z_0) = 0$$

а једначина нормале површи S у M_0 је

$$\frac{x - x_0}{F'_x} = \frac{y - y_0}{F'_y} = \frac{z - z_0}{F'_z}$$

14. Тангентна раван и нормала површи.

- **Дефинисати парцијалне изводе I реда и дати њихову геометријску интерпретацију.**

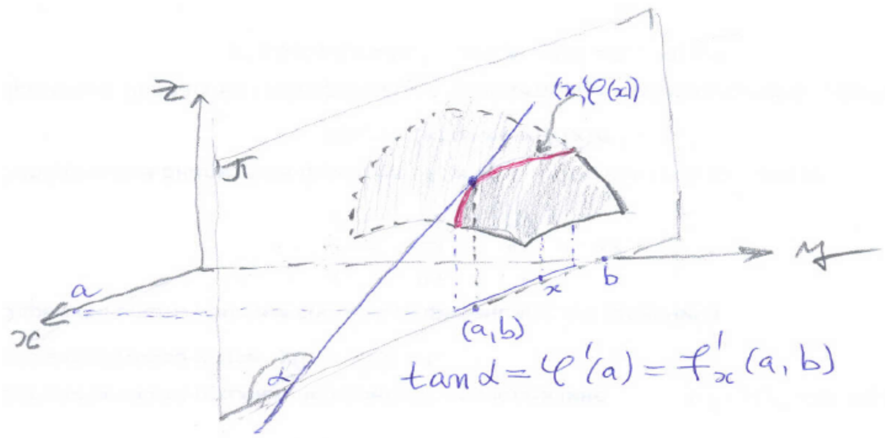
Дефиниција. Ако постоје коначне граничне вредности количника парцијалних прираштаја функције $f\ (x,\ y)$ у тачки $P_0(x_0,\ y_0)$, са одговарајућим прираштајима независне променљиве, кад оне теже нули, тада се те граничне вредности називају парцијалним изводима функције f у тачки $P_0(x_0, y_0)$.

Ознаке:
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\frac{\partial f}{\partial x}=f'_x\,,\quad y=\text{const}$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=\frac{\partial f}{\partial y}=f'_y\,,\quad x=\text{const}$$

Геометријска интерпретација

За $n = 2$ и $f : (x, y) \mapsto z$ постоји јасна геометријска интерпретација парцијалних извода f'_x и f'_y у тачки (a, b). Ако је $\varphi(x) = f(x, b)$, тада се график функције φ (крива C) добија у пресеку графика функције f (нека површ) и равни $y = b$.



Како је $f'_x(a, b) = \varphi'(a)$, то значи да $f'_x(a, b)$ одређује положај тангенте криве C у тачки $x = a$, односно у тачки $(a, b, f(a, b))$ површи (графика функције f).

Слично важи и за $f'_y(a, b)$.

- **Дефинисати тангентну раван и нормалу површи, функције $z = f(x, y)$.**

Дефиниција 1. Нека је S глатка површ, а L_x и L_y криве дуж којих равни $y= y_0$ и $x= x_0$ секу S. Раван која садржи тангенте T_x и T_y тих кривих у њиховој заједничкој тачки M_0 (x_0, y_0, z_0) зове се тангентна раван површи S у тачки M_0.

- На основу једначина за T_x и T_y добија се једначина тангентне равни

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0) = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0}(x - x_0) + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0}(y - y_0)$$

($P_0(x_0, y_0)$ је пројекција тачке M_0 на раван Oxy).

Дефиниција 2. Права N која је у датој додирној тачки M_0 глатке површи S и њене тангентне равни, нормална на ову раван, зове се нормала површи S у датој тачки M_0.

- **Ако је функција $z = f(x, y)$ задата имплицитно са $F(x, y, z) = 0$, извести формуле за z'_x и z'_y и написати једначину тангентне равни.**

Дакле, ако је функција $f : (x, y) \to z$ дефинисана имплицитно са $F(x, y, z) = 0$, тада је (у скраћеном запису)

$$f'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad f'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Даљим диференцирањем по x, односно y, добијамо

$$f''_{x^2} = \frac{-F''_{x^2}F'^2_z + 2F''_{xz}F'_xF'_z - F''_{z^2}F'^2_x}{F'^3_z},$$

$$f''_{y^2} = \frac{-F''_{y^2}F'^2_z + 2F''_{yz}F'_yF'_z - F''_{z^2}F'^2_y}{F'^3_z},$$

$$f''_{xy} = \frac{-F''_{xy}F'^2_z + F''_{xz}F'_yF'_z + F''_{yz}F'_xF'_z - F''_{z^2}F'_xF'_y}{F'^3_z}.$$

Једначина тангентне равни површи S у M_0 је

$$F'_x(x - x_0) + F'_y(y - y_0) + F'_z(z - z_0) = 0$$

15. Извод функције у смеру датог вектора.

- **Дефинисати извод функције у смеру датог вектора.**

Ако постоји гранична вредност средње брзине $\frac{\Delta u}{\Delta s}$ кад $\Delta s \to 0$, тада се та гранична вредност зове извод скаларне функције (извод скаларног поља) $u(M)$ у тачки $M(x, y, z)$ у смеру вектора s и означава

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta s}.$$

- **Написати формулу за израчунавање извода функције у смеру вектора за диференцијабилну функцију.**

Ако је функција $u(x, y, z)$ диференцијабилна у свакој тачки $M \in \Omega$, тада постоји извод у смеру произвољног вектора s, и

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

где су $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ координате вектора $s_0 = \text{ort}\, s$.

- **Извести формулу за израчунавање извода функције у смеру вектора за диференцијабилну функцију.**

Ако је функција $u(x, y, z)$ непрекидна и има непрекидне парцијалне изводе $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ у области Ω, тада је њен тотални прираштај

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z,$$

где је $\varepsilon_1 = o(\Delta s)$, $\varepsilon_2 = o(\Delta s)$, $\varepsilon_3 = o(\Delta s)$, кад $\Delta s \to 0$. После дељења израза са Δs

$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta s} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta s} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta s} + \varepsilon_3 \frac{\Delta z}{\Delta s} =$$

$$= \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma}_{\text{не зависи од } \Delta s} + \underbrace{\varepsilon_1 \cos\alpha + \varepsilon_2 \cos\beta + \varepsilon_3 \cos\gamma}_{\searrow\ 0 \text{ кад } \Delta s \to 0}.$$

То значи да постоји $\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$.

16. Градијент функције. Веза градијента и извода у смеру датог вектора.

- **Дефинисати градијент функције и извод функције у смеру датог вектора.**

Ако постоји гранична вредност средње брзине $\frac{\Delta u}{\Delta s}$ кад $\Delta s \to 0$, тада се та гранична вредност зове извод скаларне функције (извод скаларног поља) $u(M)$ у тачки $M(x, y, z)$ у смеру вектора s и означава

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta s}.$$

Градијент функције $u(x, y, z)$ у тачки $M(x, y, z) \in \Omega$ је вектор чије су координате вредности парцијалних извода $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ у датој тачки M:

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k,$$

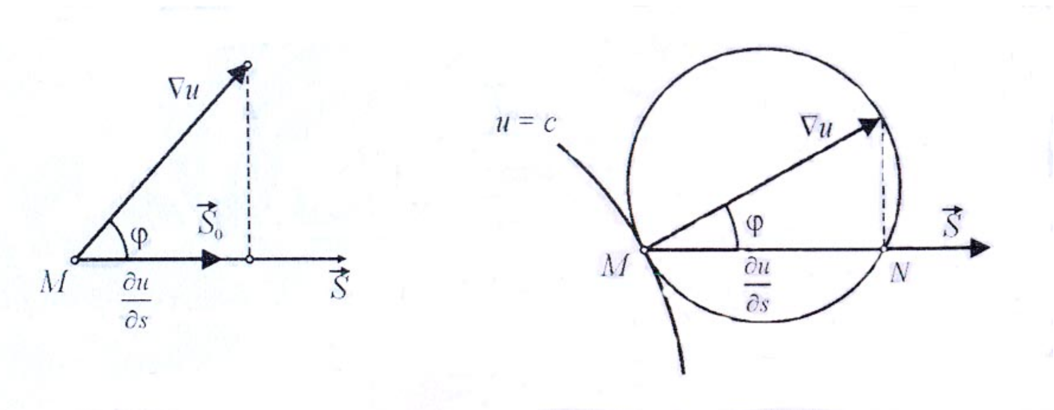
где је ∇ (набла) тзв. Хамилтонов оператор.

- **Извести везу градијента и извода у смеру вектора.**

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

- **Геометријско тумачење градијента.**

У M се конструише ∇u и сфера са пречником ∇u. Вектор s из M продире сферу у N. Ако је $\varphi = \angle(\nabla u, MN)$ онда је $MN = |\nabla u| \cdot \cos\varphi$, па је $MN = \frac{\partial u}{\partial s}$.



- $\max \frac{\partial u}{\partial s}$ се добија за φ =0, тако да је смер grad u, смер у којем функција $u(x, y, z)$ најбрже расте.
- $\min \frac{\partial u}{\partial s} = -|\mathrm{grad}\, u|$, како је тада $\varphi = \pi$, одговарајући вектор, антиградијент је $-\nabla u$.

17. Градијент функције. Особине градијента.

- **Дефинисати градијент функције.**

Градијент функције $u(x, y, z)$ у тачки $M(x, y, z) \in \Omega$ је <u>вектор</u> чије су координате вредности парцијалних извода $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ у датој тачки M:

$$\mathrm{grad}\, u = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k,$$

где је ∇ (набла) тзв. Хамилтонов оператор.

- **Навести особине градијента.**

1) $\nabla(u_1 + u_2) = \nabla(u_1) + \nabla(u_2)$.

$$\nabla(u_1 + u_2) = \frac{\partial}{\partial x}(u_1 + u_2) i + \frac{\partial}{\partial y}(u_1 + u_2) j + \frac{\partial}{\partial z}(u_1 + u_2) k =$$

$$= \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} i + \frac{\partial u_1}{\partial y} j + \frac{\partial u_1}{\partial z} k \right) + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} i + \frac{\partial u_2}{\partial y} j + \frac{\partial u_2}{\partial z} k \right) = \nabla u_1 + \nabla u_2 .$$

2) $\nabla(Cu) = C\,\nabla(u)$, C = const.

$$\nabla(Cu) = \frac{\partial}{\partial x}(Cu) i + \frac{\partial}{\partial y}(Cu) j + \frac{\partial}{\partial z}(Cu) k =$$

$$C\left(\frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k \right) = C\nabla(u) .$$

3) $\nabla(u_1 u_2) = u_2 \nabla u_1 + u_1 \nabla u_2$

$$\nabla(u_1 u_2) = \frac{\partial}{\partial x}(u_1 u_2) i + \frac{\partial}{\partial y}(u_1 u_2) j + \frac{\partial}{\partial z}(u_1 u_2) k =$$

$$= u_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} i + \frac{\partial u_1}{\partial y} j + \frac{\partial u_1}{\partial z} k \right) + u_1 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} i + \frac{\partial u_2}{\partial y} j + \frac{\partial u_2}{\partial z} k \right) = u_2 \nabla u_1 + u_1 \nabla u_2 .$$

4) $\nabla(f(u)) = f'(u)\,\nabla(u)$.

$$\nabla(f(u)) = \frac{\partial}{\partial x}(f(u))i + \frac{\partial}{\partial y}(f(u))j + \frac{\partial}{\partial z}(f(u))k =$$

$$= f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}i + \frac{\partial u}{\partial y}f'(u)j + \frac{\partial u}{\partial z}f'(u)k = f'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}i + \frac{\partial u}{\partial y}j + \frac{\partial u}{\partial z}k\right) = f'(u)\nabla u.$$

- **Веза градијента и извода у смеру датог вектора за диференцијабилну функцију.**

Теорема 1 *Ако је функција $f : X \to R$ $(X \subset R^n)$ диференцијабилна у тачки $a \in X$, тада*

1. *постоји f'_v за произвољан јединични вектор $v \in R^n$,*
2. *извод f'_v је вредност диференцијала функције f у тачки a на вектору v,*
3. *важи једнакост (веза са градијентом)*

$$f'_v(a) = grad\, f(a) \cdot v.$$

Доказ.

1. Из претпоставке диференцијабилности функције f за прираштај $h = tv$ (дуж праве одређене вектором v) имамо да је

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= f'_{x_1}h_1 + \cdots + f'_{x_n}h_n + o(|h|), \quad h \to 0 \\ &= t(f'_{x_1}v_1 + \cdots + f'_{x_n}v_n) + o(|t|), \quad t \to 0 \end{aligned}$$

Према томе,

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = f'_{x_1}v_1 + \cdots + f'_{x_n}v_n,$$

па $f'_v(a)$ постоји.

2. Тврђење следи из форме израза на десној страни претходне једнакости.

3. Тврђење следи из једнакости

$$f'_{x_1}v_1 + \cdots + f'_{x_n}v_n = grad\, f(a) \cdot v. \quad \blacksquare$$

18. Тејлорова формула функције две променљиве.

- **Формулисати теорему о средњој вредности.**

Ако је у некој околини тачке $P_0(x_0, y_0)$ функција $f(x, y)$ непрекидна и има непрекидне парцијалне изводе $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$, тада је

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta y$$

за неко $0 < \theta < 1$.

- **Доказати теорему о средњој вредности.**

Према Лагранжевој теореми за функцију једне променљиве $\Phi(t)$,

$$\Phi(1) - \Phi(0) = \Phi'(\theta)(1-0) \text{ за неко } 0 < \theta < 1.$$

Из тога следи

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta y$$

што је требало доказати.

- **Написати Тејлоров полином *n*-тог степена функције $z = f(x, y)$ која има непрекидне парцијалне изводе до *n*+1-ог реда.**

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0, y_0) + \ldots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0, y_0) + R_n$$

19. Тејлорова формула функције две промењљиве.

- **Написати Тејлоров полином *n*-тог степена функције $z = f(x, y)$ која има непрекидне парцијалне изводе до *n*+1-ог реда.**

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0, y_0) + \ldots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0, y_0) + R_n$$

- **Написати остатак Тејлоровог полинома *n*-тог степена у Лагранжевом облику.**

$$R_n(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y), \quad 0 < \theta < 1.$$

- **Извести Тејлоров полином *n*-тог степена функције $z = f(x, y)$.**

<u>**Доказ.**</u> Развијањем функције $\Phi(t)$ у Маклоренов полином, добија се

$$\Phi(t) = \Phi(0) + \frac{1}{1!}\Phi'(0)t + \frac{1}{2!}\Phi''(0)t^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\Phi^{(n)}(0)t^n + R_n^L,$$

са грешком записаном у Лагранжевом облику

$$R_n^L = \frac{1}{(n+1)!}\Phi^{(n+1)}(\theta t)t^{n+1}, \; 0 < \theta < 1.$$

За $t = 1$:

$$\Phi(1) = \Phi(0) + \frac{1}{1!}\Phi'(0) + \frac{1}{2!}\Phi''(0) + \ldots + \frac{1}{n!}\Phi^{(n)}(0) + R_n^L,$$

$$R_n^L = \frac{1}{(n+1)!}\Phi^{(n+1)}(\theta).$$

Према дефиницији функције $\Phi(t)$,

$$\Phi(1) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y), \qquad \Phi(0) = f(x_0, y_0),$$

$$\Phi'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y = df(x_0, y_0),$$

$$\Phi''(0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y\right)^{[2]} = d^2 f(x_0, y_0),$$

....

$$\Phi^{(n)}(0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y\right)^{[n]} = d^n f(x_0, y_0),$$

$$\Phi^{(n+1)}(\theta) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{P_\theta} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{P_\theta} \Delta y \right)^{[n+1]} = d^{n+1} f(P_\theta)$$
,

$P_\theta(x_0 + \theta\Delta x,\ y_0 + \theta\Delta y)$, $0 < \theta < 1$,

20. Дефиниција локалног екстремума функције више променљивих. Неопходни услови.

- **Дефинисати појам локалног екстремума за функцију *n* променљивих.**

Дефиниција. Функција $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ има у тачки $P_0(x_1^0, ..., x_n^0)$ локални максимум ако у свим тачкама из неке околине тачке P_0 има мање вредности него у тачки P_0, тј. ако за сваку тачку

$$P(x_1, ..., x_n) \in S(P_0, \delta) \quad \textbf{важи} \quad u(x_1, x_2, ..., x_n) < u(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$$

(где је $S(P_0, \delta) = \{(x_1, x_2, ..., x_n): \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + ... + (x_n - x_n^0)^2} < \delta\}$),

а локални минимум ако у свим тачкама околине има веће вредности него у P_0, тј.

ако за сваку тачку $P(x_1, ..., x_n) \in S(P_0, \delta)$ **важи** $u(x_1, x_2, ..., x_n) > u(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$.

Локални максимуми и минимуми су локални екстремуми.

Напомена: У претходној дефиницији су уведени тзв. строги максимум и минимум. У случају да важи $u(x_1,x_2,...,x_n) \le u(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$, односно $u(x_1,x_2,...,x_n) \ge u(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$, тачка $P_0(x_1^0, ..., x_n^0)$ је тачка нестрогог максимума, односно минимума.

- **Формулисати и доказати теорему о неопходним условима за екстремум функције *n* променљивих.**

Теорема. Ако функција $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ има екстремум у тачки $P_0(x_1^0, ..., x_n^0)$ и ако су јој парцијални изводи непрекидни у тој тачки, онда су сви парцијални изводи функције $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ у тачки P_0 једнаки нули, тј.

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) = 0, \quad \forall\ j = 1, ..., n.$$

Доказ. Фиксирајмо све променљиве $x_i = x_i^0$, $i = 1, ..., n$, осим једне (произвољне) x_j. Тада је $u(x_1^0, ..., x_{j-1}^0, x_j, x_{j+1}^0 ..., x_n^0)$ у околини тачке P_0 функција једне променљиве $f(x_j)$, са екстремумом за $x_j = x_j^0$. Према теореми о неопходном услову функције једне променљиве, њен извод у тој тачки је једнак 0. Како је извод функције $f(x_j)$ за $x_j = x_j^0$, једнак парцијалном изводу функције $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ по променљивој x_j у тачки P_0 и како је избор променљиве произвољан, тврђење важи.

Последица. Ако функција $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ има непрекидне парцијалне изводе у целој области дефинисаности, сви кандидати за екстремум се налазе међу решењима система

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \quad i = 1, ..., n \cdot$$

Решења система се називају стационарне тачке.

Напомена 1: Услов није довољан!

На пример, изводи функције $z = y^2 - x^2$, су $\frac{\partial z}{\partial x} = -2x$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$ па је једина стационарна тачка (0, 0). Међутим, у тој тачки функција нема екстремум, јер важи $|y| > |x| \Rightarrow y^2 - x^2 > 0, \quad |y| < |x| \Rightarrow y^2 - x^2 < 0 \cdot$

Напомена 2: Услов није потребан, ако функције нема парцијалне изводе.

На пример, функција $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ има строги минимум у тачки (0, 0). Њени изводи су једнаки $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, за $(x, y) \neq (0, 0)$. За $(x, y) = (0, 0)$ се добија

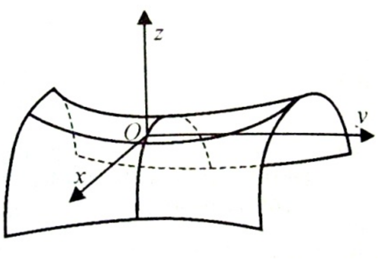
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \Delta x > 0 \\ -1, & \Delta x < 0 \end{cases},$$

и слично $\frac{\partial z}{\partial y} = \begin{cases} 1, & \Delta y > 0 \\ -1, & \Delta y < 0 \end{cases}$, тј. парцијални изводи нису дефинисани.

- **Дефинисати појмове критичне и стационарне тачке.**

Ако функција $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ има непрекидне парцијалне изводе у целој области дефинисаности, сви кандидати за екстремум се налазе међу решењима система

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \quad i = 1, ..., n \cdot$$



Решења система се називају стационарне тачке.

Тачке у којима су сви парцијални изводи функције $u = u(x_1, ..., x_n)$ једнаки нули, или у којима бар један од парцијалних извода не постоји, су критичне тачке те функције.

21. Неопходни и довољан услов за локални екстремум функције више промењљивих.

- **Формулисати теорему о неопходним условима за екстремум функције n промењљивих.**

Теорема. Ако функција $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ има екстремум у тачки $P_0(x_1^0, \dots , x_n^0)$ и ако су јој парцијални изводи непрекидни у тој тачки, онда су сви парцијални изводи функције $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ у тачки P_0 једнаки нули, тј.

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = 0, \quad \forall\ j = 1, \dots, n$$

- **Формулисати теорему о довољним условима за екстремум функције две промењљиве.**

***R*^{2}:** **Теорема.** Претпоставимо да у некој околини области D којој припада тачка $P_0(x_0, y_0)$, функција $z = f(x, y)$ има непрекидне парцијалне изводе закључно са изводима трећег реда и претпоставимо да је P_0 стационарна тачка, тј. $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} = 0$, $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0} = 0$. Ако означимо $A = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{P_0}$, $B = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{P_0}$, $C = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{P_0}$, онда:

(1) Ако је $A \cdot C - B^2 > 0$ и $A < 0$, функција $f(x, y)$ у P_0 има максимум.
(2) Ако је $A \cdot C - B^2 > 0$ и $A > 0$, функција $f(x, y)$ у P_0 има минимум.
(3) Ако је $A \cdot C - B^2 < 0$, функција $f(x, y)$ у P_0 нема екстремум.
(4) Ако је $A \cdot C - B^2 = 0$, тада је за одређивање карактера стационарне тачке потребно испитивање извода вишег реда.

- **Доказати теорему о довољним условима за екстремум функције две промењљиве.**

Доказ. Из Тејлоровог полинома другог реда у околини P_0, (Пеанов обл. остатка):

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}}_{=\mathbf{0}} \Delta x + \underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}}_{=\mathbf{0}} \Delta y +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{P_0} \Delta x^2 + 2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{P_0} \Delta x \Delta y + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{P_0} \Delta y^2 \right) + \alpha \Delta\rho^2,$$

где $\alpha \to 0$, кад $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$.

Ако је $\varphi = \angle(O_x, P_0 P)$, онда је $\Delta x = \Delta\rho \cos\varphi$, $\Delta y = \Delta\rho \sin\varphi$, па је

$$\Delta f = \frac{1}{2!}(A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2) + \alpha\Delta\rho^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\Delta\rho^2 (\underline{A\cos^2\varphi} + \underline{2B\cos\varphi}\sin\varphi + C\sin^2\varphi + 2\alpha) \qquad / \cdot \frac{A}{A}$$

$$\underline{+\frac{B^2}{A}}\sin^2\varphi - \frac{B^2}{A}\sin^2\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\Delta\rho^2\left(\frac{(A\cos\varphi + B\sin\varphi)^2 + (AC - B^2)\sin^2\varphi}{A} + 2\alpha\right)$$

(1) $\underline{A \cdot C - B^2 > 0,\ A < 0}$: именилац разломка је мањи од 0, а бројилац је већи, јер је збир две величине које су ≥ 0, а не могу бити истовремено 0 (ако је $\sin\varphi = 0$ онда је $\cos\varphi = \pm 1$). Бројилац је непрекидна функција од φ на сегменту $[0,2\pi]$ па достиже минимум $m>0 \Longrightarrow$ бројилац је већи или једнак од $m>0$. Како је $A < 0$, разломак је мањи или једнак од од $m/A<0$.

Зато се може написати $\Delta f \le \frac{1}{2}\Delta\rho^2(m/A + 2\alpha) < 0$, где $\alpha \to 0$, кад $\Delta\rho \to 0$, а m не зависи од $\Delta\rho$. Добија се да је за довољно мало $\Delta\rho$ $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) < 0$, тј. $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) < f(x_0, y_0)$, из чега следи да је P_0 тачка строгог максимума.

(2) $\underline{A \cdot C - B^2 > 0,\ A > 0}$: слично се добија да је $\Delta f \ge \frac{1}{2}\Delta\rho^2(m/A + 2\alpha) > 0$, тј. $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) > f(x_0, y_0)$, па је P_0 тачка строгог минимума.

(3) $\underline{A \cdot C - B^2 < 0}$: ако претпоставимо да је $A > 0$, онда

- за $\varphi = 0$ се добија $\Delta f = \frac{1}{2}\Delta\rho^2(A + 2\alpha) > 0$
- ако је $B = 0 \Rightarrow C < 0$, па је за $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\Delta f = \frac{1}{2}\Delta\rho^2(C + 2\alpha) < 0$

ако је $B \neq 0$, и ако је $\varphi = \varphi_0$, $\operatorname{tg}\varphi_0 = -\frac{A}{B}$, онда је

$$\Delta f = \frac{1}{2}\Delta\rho^2\left(\frac{(AC - B^2)\sin^2\varphi_0}{A} + 2\alpha\right) < 0$$

Δf мења знак у зависности од φ, што значи да нема екстремум у тачки P_0.

- слично се добија и за $A < 0$.
- ако је $A = 0$, онда мора бити $B \neq 0$, а $\Delta f = \frac{1}{2}\Delta\rho^2[\sin\varphi(2B\cos\varphi + C\sin\varphi) + 2\alpha]\cdot$

Када је φ довољно мало, и мења знак, и $\sin\varphi$ такође мења знак, док израз у малој загради, који је тада приближно једнак $2B$, не мења. За $\Delta\rho \to 0$, важи $\alpha \to 0$, па α не утиче на знак израза Δf. Следи да је, у том случају, знак израза Δf исти као и знак $\sin\varphi$, тј. φ. Како Δf мења знак у зависности од угла, P_0 није тачка екстремума.

(4) $\underline{A\cdot C - B^2 = 0}$:

- $A \neq 0 \Rightarrow \Delta f = \frac{1}{2}\Delta\rho^2\left(\frac{(A\cos\varphi + B\sin\varphi)^2}{A} + 2\alpha\right)$. Ако је $\varphi = \varphi_0$, $A\cos\varphi_0 + B\sin\varphi_0 = 0$, па знак Δf зависи од α.
- $A = 0 \Rightarrow B = 0$, па је $\Delta f = \frac{1}{2}\Delta\rho^2(C\sin^2\varphi + 2\alpha)$. За $\varphi = 0$, знак Δf зависи од α.

Напомена: Ако за функцију $z = f(x, y)$ формирамо матрицу других парцијалних извода у тачки $P_0(x_0, y_0)$,

$$\nabla^2 f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{P_0} \\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{P_0} & \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{P_0} \end{bmatrix},$$

онда су њени главни минори $D_1 = A$ и $D_2 = A\cdot C - B^2$, а услови теореме се своде на проверу знака за D_1 и D_2, под условом да је $D_2 \neq 0$.

22. Квадратна форма, матрица других извода (Хесеова матрица).

- **Дефинисати појамове квадратне форме, позитивно и негативно дефинисане форме.**

Дефиниција. Сума облика $Q(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ назива се квадратна форма.

Векторски запис: $Q(x_1,\dots,x_n) = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = x^T A\, x$.

Дефиниција. За квадратну форму се каже да је позитивно дефинисана ако важи $Q(x_1,\dots,x_n) > 0$ кад год је $(x_1,\dots,x_n) \neq (0,\dots,0)$, а негативно дефинисана ако је $Q(x_1,\dots,x_n) < 0$ кад год је $(x_1,\dots,x_n) \neq (0,\dots,0)$.

- **Дефинисати матрицу других извода (Хесеову матрицу).**

Нека је Q квадратна форма чији су коефицијенти a_{ij} дати са

$$a_{ij} = f''_{x_i x_j}(M),$$

а променљиве $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$. Ако је $\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$, тада је

$$d^2 f(M) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f''_{x_i x_j} \Delta x_i \Delta x_j = \Delta x \cdot A \cdot \Delta x^T = Q(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n).$$

Матрица $A = (a_{ij})$ је позната као ***Хесеова*** матрица функције f у тачки M и означава се и са $f''(M)$.

- **Формулисати и доказати теорему о довољним условима за екстремум функције *n* промењљивих, преко другог диференцијала као квадратне форме.**

Нека у некој околини тачке $P_0(x_1^0,\ x_2^0,\ \dots,\ x_n^0)$ функција $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ има непрекидне парцијалне изводе до реда 2 и нека је P_0 стационарна тачка. Нека је $a_{ij} = \left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{P_0}$ и

нека је $Q(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) = d^2 f(x_1^0, \dots, x_n^0) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Delta x_i \Delta x_j$.

(1) Ако је квадратна форма Q позитивно дефинисана, функција f у тачки P_0 има строги минимум.

(2) Ако је квадратна форма Q негативно дефинисана, функција f у тачки P_0 има строги максимум.

(3) Ако квадратна форма Q мења знак, функција f у тачки P_0 нама екстремум.

Доказ. $$\Delta f = f(x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, \dots, x_n^0) = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{P_\theta} \Delta x_i \Delta x_j \right],$$

при томе $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{P_\theta} = a_{ij} + \alpha_{ij}$, $\alpha_{ij} \to 0$ кад $\Delta x_1 \to 0, \dots, \Delta x_n \to 0$ (непр. изводи у P_0).

Одатле се добија $$\Delta f = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Delta x_i \Delta x_j + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \Delta x_i \Delta x_j \right] =$$

$$= \frac{\Delta \rho^2}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} h_i h_j \right],$$

где је $h_i = \dfrac{\Delta x_i}{\Delta\rho}$, $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \ldots + \Delta x_n^2}$. При том важи $h_1^2 + \ldots + h_n^2 = 1$.

Како је $Q(h_1,\ldots,h_n)$ непрекидна функције на затвореном ограниченом скупу $B = \{(h_1,\ldots,h_n) : h_1^2 + \ldots + h_n^2 = 1\}$, она на B достиже свој минимум m и максимум M.

(1) Ако је Q позитивно дефинисана квадратна форма, биће $Q(h_1,\ldots,h_n) \geq m > 0$ (јер $\mathbf{0} \notin B$). Како $\alpha_{ij} \to 0$, за $\Delta\rho$ довољно мало ($\Delta\rho \neq 0$), $\Delta f \geq \dfrac{\Delta\rho^2}{2}(m+\alpha) > 0$, тј. у P_0 је минимум.

(2) Ако је Q негативно дефинисана квадратна форма, биће $Q(h_1,\ldots,h_n) \leq M < 0$ (јер $\mathbf{0} \notin B$). За $\Delta\rho$ довољно мало ($\Delta\rho \neq 0$), биће $\Delta f \leq \dfrac{\Delta\rho^2}{2}(M+\alpha) < 0$, тј. у P_0 је максимум.

(3) Ако Q мења знак, мења га и Δf.

23. Квадратна форма.

- **Дефинисати појамове квадратне форме, позитивно и негативно дефинисане форме.**

Дефиниција. Сума облика $Q(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ назива се квадратна форма.

Векторски запис: $$Q(x_1,\ldots,x_n) = [x_1 \ \ldots \ x_n]\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n\end{bmatrix} = x^T A\, x.$$

Дефиниција. За квадратну форму се каже да је позитивно дефинисана ако важи $Q(x_1,\ldots,x_n) > 0$ кад год је $(x_1,\ldots,x_n) \neq (0,\ldots,0)$, а негативно дефинисана ако је $Q(x_1,\ldots,x_n) < 0$ кад год је $(x_1,\ldots,x_n) \neq (0,\ldots,0)$.

- **Формулисати Силвестеров критеријум.**

Теорема. (Силвестерова) Нека је $Q(x_1,\ldots,x_n)$ дата квадратна форма и Q одговарајућа симетрична матрица.

- $Q(x_1,\ldots,x_n)$ је позитивно дефинисана форма акко $D_1 > 0, \ldots, D_n > 0$.
- $Q(x_1,\ldots,x_n)$ је негативно дефинисана форма акко $D_1 < 0, \ldots, (-1)^n D_n > 0$ ($D_1, \ldots, D_n$ су главни минори матрице Q).

- **Доказати Силвестеров критеријум за n = 2.**

$$\Delta f = f(x_1^0+\Delta x_1,\dots,x_n^0+\Delta x_n)-f(x_1^0,\dots,x_n^0)=\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\bigg|_{P_\theta}\Delta x_i\Delta x_j\right],$$

при томе $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\Big|_{P_\theta}=a_{ij}+\alpha_{ij}$, $\alpha_{ij}\to 0$ кад $\Delta x_1\to 0,\dots,\Delta x_n\to 0$ (непр. изводи у P_0).

Одатле се добија $\Delta f=\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\Delta x_i\Delta x_j+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\Delta x_i\Delta x_j\right]=$

$$=\frac{\Delta\rho^2}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}h_ih_j+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}h_ih_j\right],$$

где је $h_i=\frac{\Delta x_i}{\Delta\rho}$, $\Delta\rho=\sqrt{\Delta x_1^2+\dots+\Delta x_n^2}$. При том важи $h_1^2+\dots+h_n^2=1$.

Како је $Q(h_1,\dots,h_n)$ непрекидна функције на затвореном ограниченом скупу $B=\{(h_1,\dots,h_n):h_1^2+\dots+h_n^2=1\}$, она на B достиже свој минимум m и максимум M.

(4) Ако је Q позитивно дефинисана квадратна форма, биће $Q(h_1,\dots,h_n)\ge m>0$ (јер $\mathbf{0}\notin$ B). Како $\alpha_{ij}\to 0$, за $\Delta\rho$ довољно мало ($\Delta\rho\neq 0$), $\Delta f\ge\frac{\Delta\rho^2}{2}(m+\alpha)>0$, тј. у P_0 је минимум.

(5) Ако је Q негативно дефинисана квадратна форма, биће $Q(h_1,\dots,h_n)\le M<0$ (јер $\mathbf{0}\notin$ B). За $\Delta\rho$ довољно мало ($\Delta\rho\neq 0$), биће $\Delta f\le\frac{\Delta\rho^2}{2}(M+\alpha)<0$, тј. у P_0 је максимум.

(6) Ако Q мења знак, мења га и Δf.

Последица. Ако је A матрица која одговара форми Q (A = $\nabla^2 f(x_1^0,\dots,x_n^0)$; када је A симетрична, $Q = A$) и D_1, ..., D_n су њени главни минори, онда важи:

(1) $D_1>0,\dots,D_n>0 \;\Rightarrow\; P_0$ је строги минимум.

(2) $D_1<0,\dots,(-1)^n D_n>0 \;\Rightarrow\; P_0$ је строги максимум.

24. Довољан услов за локални екстремум функције више променљивих.

- **Диференцијал II реда као квадратна форма.**

Нека је Q квадратна форма чији су коефицијенти a_{ij} дати са

$$a_{ij} = f''_{x_i x_j}(M),$$

а променљиве $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$. Ако је $\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$, тада је

$$d^2 f(M) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f''_{x_i x_j} \Delta x_i \Delta x_j = \Delta x \cdot A \cdot \Delta x^T = Q(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n).$$

Матрица $A = (a_{ij})$ је позната као ***Хесеова*** матрица функције f у тачки M и означава се и са $f''(M)$.

Према томе, $d^2 f(M)$ је квадратна форма прираштаја независних променљивих у тачки M са Хесовом матрицом,

$$d^2 f(M) = \Delta x \cdot f''(M) \cdot \Delta x^T.$$

То значи да позитивна и негативна дефинитност другог диференцијала зависе до Хесеове матрице.

На основу Силвестеровог критеријума имамо да је други диференцијал $d^2 f(M)$

1. позитивно дефинитан ако и само ако су сви главни минори матрице $A = f''(M)$ позитивни,

$$A_1 > 0, \quad A_2 > 0, \quad A_3 > 0, \; \ldots, \; A_n > 0$$

2. негативно дефинитан ако и само ако главни минори матрице A наизменично мењају знак,

$$A_1 < 0, \quad A_2 > 0, \quad A_3 < 0, \; \ldots, \; (-1)^n A_n > 0$$

- **Формулисати теорему о довољним условима за екстремум функције две променљиве.**

Нека је, у случају функције две променљиве, $df(M) = 0$ и

$$a = f''_{x^2}(M), \quad b = f''_{xy}(M), \quad c = f''_{y^2}(M), \quad D = ac - b^2.$$

Теорема 3 *Функција f у тачки M*

1. има локални минимум ако је $D > 0$ и $a > 0$,

2. има локални максимум ако је $D > 0$ и $a < 0$,

3. нема локални екстремум ако је $D < 0$.

- **Доказати теорему о довољним условима за екстремум функције две променљиве.**

Доказ. Хесеова матрица и диференцијал другог реда функције f у тачки M могу да се изразе преко a, b и c

$$f''(M) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

$$d^2 f(M) = adx^2 + 2bdxdy + cdy^2.$$

1. Из теореме о довољном услову за локални екстремум следи да је у M локални минимум ако је $d^2 f(M)$ позитивно дефинитан. На основу Силвестеровог критеријума то је испуњено ако су главни минори Хесеове матрице позитивни. Дакле, ако је $a > 0$ и $ac - b^2 > 0$, функција f у тачки M има строги локални минимум.

2. Слично као у 1. следи из Силвестеровог критеријума и теореме о довољном услову за локални максимум.

3. Из једнакости

$$d^2 f(M) = a\left(dx + \frac{b}{a}dy\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{a}\right)dy^2$$

следи да је $d^2 f(M) < 0$ за $dx + \frac{b}{a}dy = 0$ и $d^2 f(M) > 0$ за $dy = 0$ $(dx \neq 0)$. Према томе, $d^2 f(M)$ мења знак, па према теореми о довољном услову за локални екстремум функција f у тачки M нема локални екстремум. ∎

У случају $D = 0$ не можемо ништа закључити. Функција може а и не мора да има локални екстремум (примери за то су наведени раније).

25. Условни екстремум функције више промењљивих. Неопходни услови.

- **Дефинисати појам условног екстремума за функцију *n* промењљивих са *m* услова.**

Уколико тражимо екстремуме функције $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ при условима облика $g_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, ... , $g_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, може се формирати одговарајућа Лагранжова функција

$$L(x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_m) = f(x_1,...,x_n) + \lambda_1 g_1(x_1,...,x_n) + ... + \lambda_m g_m(x_1,...,x_n)$$

- **Формулисати и доказати теорему о неопходним условима за условни екстремум функције две промењљиве.**

3.1 Теорема о неопходном услову

Нека је $A \subset R^2$ отворен скуп, $M(a,b) \in A$ и нека су функције $f, \varphi : A \to R$ непрекидно диференцијабилне у околини тачке M.

Теорема 1 *Ако функција f у тачки M има локални екстремум при услову $\varphi(x,y) = 0$ и ако је $\nabla\varphi(M) \neq 0$, тада постоји $\lambda \in R$ за које важи*

$$\begin{aligned} f'_x(a,b) + \lambda\varphi'_x(a,b) &= 0, \\ f'_y(a,b) + \lambda\varphi'_y(a,b) &= 0, \\ \varphi(a,b) &= 0. \end{aligned}$$

Доказ. Из услова $\nabla\varphi(M) \neq 0$ следи да је бар један од парцијалних извода функције φ у тачки M различит од нуле. Нека је $\varphi'_y(a,b) \neq 0$.

На основу теореме о имплицитној функцији једнакост $\varphi(x,y) = 0$ у некој околини тачке $x = a$ дефинише имплицитно дату функцију $y = h(x)$ која је непрекидно диференцијабилна и за коју важи

$$h'(x) = -\frac{\varphi'_x(x,y)}{\varphi'_y(x,y)}.$$

Ако f у тачки M има локални екстремум при услову $\varphi(x,y) = 0$, тада функција $g(x) = f(x,h(x))$ има локални екстремум у тачки $x = a$. Како је g и диференцијабилна (композиција диференцијабилних), то је $g'(a) = 0$ (неопходан услов за локални екстремум диференцијабилне функције једне променљиве).

Диференцирањем функције g добијамо

$$\begin{aligned} g'(a) &= f'_x(a,b) + f'_y(a,b)h'(a) \\ &= f'_x(a,b) - f'_y(a,b)\frac{\varphi'_x(a,b)}{\varphi'_y(a,b)} \\ &= f'_x(a,b) - \frac{f'_y(a,b)}{\varphi'_y(a,b)}\varphi'_x(a,b). \end{aligned}$$

Увођењем

$$\lambda = -\frac{f'_y(a,b)}{\varphi'_y(a,b)}$$

добијамо

$$f'_y(a,b) + \lambda\varphi'_y(a,b) = 0,$$

а из једнакости $g'(a) = 0$ добијамо

$$f'_x(a,b) + \lambda\varphi'_x(a,b) = 0.$$

Слично се доказује и у случају $\varphi'_x(a,b) \neq 0$. ■

- **Формулисати теорему о неопходним условима за условни екстремум функције *n* променљивих са *m* услова.**

Нека је $P_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$ екстремум функције $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при условима $g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \dots, g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$. Ако претпоставимо да функције $f, g_1, \dots, g_m$ имају парцијалне изводе првог реда у околини тачке P_0 и да је $\operatorname{rang}\left[\left.\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right|_{P_0}\right]_{m\times n} = m$, онда постоје вредности $\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0$ $(\lambda_0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0))$, тако да важи

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial L}{\partial x_1}\right|_{(P_0,\lambda_0)} = \left.\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{P_0} + \lambda_1^0 \left.\dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}\right|_{P_0} + \ldots + \lambda_m^0 \left.\dfrac{\partial g_m}{\partial x_1}\right|_{P_0} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left.\dfrac{\partial L}{\partial x_n}\right|_{(P_0,\lambda_0)} = \left.\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{P_0} + \lambda_1^0 \left.\dfrac{\partial g_1}{\partial x_n}\right|_{P_0} + \ldots + \lambda_m^0 \left.\dfrac{\partial g_m}{\partial x_n}\right|_{P_0} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1}\right|_{(P_0,\lambda_0)} = g_1(x_1^0, \ldots, x_n^0) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left.\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_m}\right|_{(P_0,\lambda_0)} = g_m(x_1^0, \ldots, x_n^0) = 0. \end{cases}$$

26. Условни екстремум функције више промењљивих. Геометријско тумачење условног екстремума функције $z = f(x, y)$.

- **Дефинисати појам условног екстремума за функцију *n* промењљивих са *m* услова.**

Уколико тражимо екстремуме функције $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при условима облика $g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \ldots, g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, може се формирати одговарајућа Лагранжова функција

$$L(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_m) = f(x_1,\ldots,x_n) + \lambda_1 g_1(x_1,\ldots,x_n) + \ldots + \lambda_m g_m(x_1,\ldots,x_n)$$

- **Формулисати и доказати теорему о неопходним условима за условни екстремум функције 2 промењљиве.**

3.1 Теорема о неопходном услову

Нека је $A \subset R^2$ отворен скуп, $M(a,b) \in A$ и нека су функције $f, \varphi : A \to R$ непрекидно диференцијабилне у околини тачке M.

Теорема 1 *Ако функција f у тачки M има локални екстремум при услову $\varphi(x,y) = 0$ и ако је $\nabla\varphi(M) \neq 0$, тада постоји $\lambda \in R$ за које важи*

$$\begin{aligned} f'_x(a,b) + \lambda\varphi'_x(a,b) &= 0, \\ f'_y(a,b) + \lambda\varphi'_y(a,b) &= 0, \\ \varphi(a,b) &= 0. \end{aligned}$$

Доказ. Из услова $\nabla\varphi(M) \neq 0$ следи да је бар један од парцијалних извода функције φ у тачки M различит од нуле. Нека је $\varphi'_y(a,b) \neq 0$.

На основу теореме о имплицитној функцији једнакост $\varphi(x,y) = 0$ у некој околини тачке $x = a$ дефинише имплицитно дату функцију $y = h(x)$ која је непрекидно диференцијабилна и за коју важи

$$h'(x) = -\frac{\varphi'_x(x,y)}{\varphi'_y(x,y)}.$$

Ако f у тачки M има локални екстремум при услову $\varphi(x,y) = 0$, тада функција $g(x) = f(x, h(x))$ има локални екстремум у тачки $x = a$. Како је g и диференцијабилна (композиција диференцијабилних), то је $g'(a) = 0$ (неопходан услов за локални екстремум диференцијабилне функције једне променљиве).

Диференцирањем функције g добијамо

$$\begin{aligned} g'(a) &= f'_x(a,b) + f'_y(a,b)h'(a) \\ &= f'_x(a,b) - f'_y(a,b)\frac{\varphi'_x(a,b)}{\varphi'_y(a,b)} \\ &= f'_x(a,b) - \frac{f'_y(a,b)}{\varphi'_y(a,b)}\varphi'_x(a,b). \end{aligned}$$

Увођењем

$$\lambda = -\frac{f'_y(a,b)}{\varphi'_y(a,b)}$$

добијамо

$$f'_y(a,b) + \lambda\varphi'_y(a,b) = 0,$$

а из једнакости $g'(a) = 0$ добијамо

$$f'_x(a,b) + \lambda\varphi'_x(a,b) = 0.$$

Слично се доказује и у случају $\varphi'_x(a,b) \neq 0$. ■

- **Геометријско тумачење условног екстремума функције $z = f(x,y)$.**

Координате a и b и број λ представљају решења система

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) + \lambda\varphi'_x(x,y) &= 0, \\ f'_y(x,y) + \lambda\varphi'_y(x,y) &= 0, \\ \varphi(x,y) &= 0. \end{aligned}$$

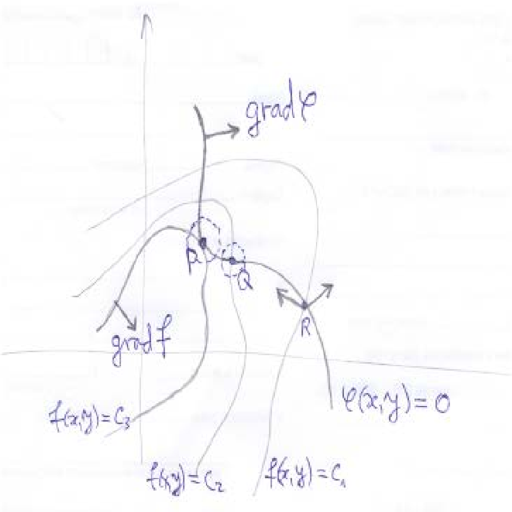
Овај систем може да се запише и у облику

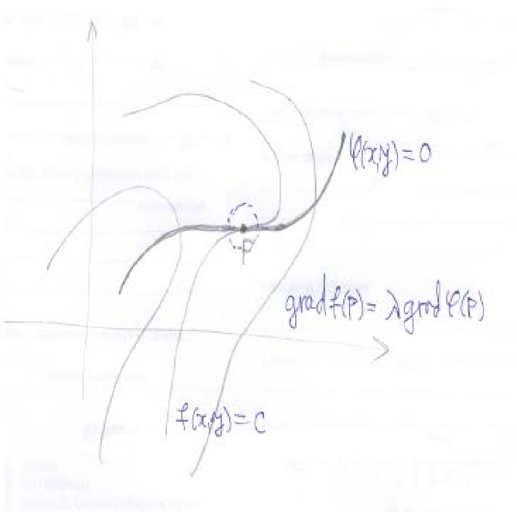
$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= -\lambda \cdot \nabla\varphi(x,y), \\ \varphi(x,y) &= 0. \end{aligned}$$

Ако су у тачки условног екстремума испуњени услови претходне теореме, тада се ниво линија и крива одређена условом $\varphi = 0$ у тој тачки додирују.

На слици лево су приказане три тачке P, Q и R и три ниво линије уз претпоставку да је $c_1 < c_2 < c_3$ (у складу са градијентом функције f). У тачки P је условни локални екстремум (максимум), док у тачкама Q и R нема условног локалног екстремума обзиром да у свакој околини на кривој има тачака са мањом и тачака са већом вредношћу функције него у посматраној тачки.

На слици десно је дата тачка P у којој је испуњен неопходан услов за локални екстремум на кривој одређеној условом $\varphi = 0$ (колинеарност градијената функција f и φ), али у којој ипак није условни локални екстремум (при истим претпоставкама за ниво линије као на слици лево).





27. Условни екстремум функције више променљивих. Неопходни и довољни услови.

- **Дефинисати појам условног екстремума за функцију *n* променљивих са *m* услова.**

Уколико тражимо екстремуме функције $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ при условима облика $g_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \dots, g_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, може се формирати одговарајућа Лагранжова функција

$$L(x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_m) = f(x_1,\dots,x_n) + \lambda_1 g_1(x_1,\dots,x_n) + \dots + \lambda_m g_m(x_1,\dots,x_n)$$

- **Формулисати теорему о неопходним условима за условни екстремум.**

Нека је $P_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$ екстремум функције $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ при условима $g_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \dots, g_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$. Ако претпоставимо да функције $f, g_1, \dots, g_m$ имају парцијалне изводе првог реда у околини тачке P_0 и да је $\operatorname{rang}\left[\left.\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right|_{P_0}\right]_{m\times n} = m$, онда постоје вредности $\lambda_1^0,\dots,\lambda_m^0$ $(\lambda_0 = (\lambda_1^0,\dots,\lambda_m^0))$, тако да важи

$$\begin{cases}
\left.\frac{\partial L}{\partial x_1}\right|_{(P_0,\lambda_0)} = \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{P_0} + \lambda_1^0 \left.\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\right|_{P_0} + \dots + \lambda_m^0 \left.\frac{\partial g_m}{\partial x_1}\right|_{P_0} = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\left.\frac{\partial L}{\partial x_n}\right|_{(P_0,\lambda_0)} = \left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{P_0} + \lambda_1^0 \left.\frac{\partial g_1}{\partial x_n}\right|_{P_0} + \dots + \lambda_m^0 \left.\frac{\partial g_m}{\partial x_n}\right|_{P_0} = 0 \\
\left.\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}\right|_{(P_0,\lambda_0)} = g_1(x_1^0,\dots,x_n^0) = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\left.\frac{\partial L}{\partial \lambda_m}\right|_{(P_0,\lambda_0)} = g_m(x_1^0,\dots,x_n^0) = 0
\end{cases}$$

- **Формулисати и доказати теорему о довољним условима за условни екстремум.**

Теорема. Нека функције f, g_1, ..., g_m имају парцијалне изводе до другог реда и нека је $(x_1^0,\dots,x_n^0,\lambda_1^0,\dots,\lambda_m^0)$ $((P_0,\lambda_0))$ стационарна тачка Лагранжеве функције. Ако је

i) $d_x^2 L\big|_{P_0} > 0$ онда је P_0 условни минимум (строги);

ii) $d_x^2 L\big|_{P_0} < 0$ онда је P_0 условни максимум (строги).

Доказ: Нека функција $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ са условима $g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \dots, g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ има у тачки $P_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$ условни екстремум и испуњава услове претходне теореме. Нека је тачка $P(x_1^0+\Delta x_1,\dots,x_n^0+\Delta x_n)$ таква да су у њој испуњени услови $g_1 = 0, \dots, g_m = 0$. Онда је

$$\Delta u = f(x_1^0+\Delta x_1,\dots,x_n^0+\Delta x_n) - f(x_1^0,\dots,x_n^0) = f(x_1^0+\Delta x_1,\dots,x_n^0+\Delta x_n) +$$

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \underbrace{g_i(x_1^0+\Delta x_1,\dots,x_n^0+\Delta x_n)}_{=0} - f(x_1^0,\dots,x_n^0) - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i \underbrace{g_i(x_1^0,\dots,x_n^0)}_{=0} = \Delta_x L,$$

где је $\Delta_x L$ прираштај Лагранжове функције, само по променљивим x_i. Применом Тејлорове формуле (под претпоставком да функције имају друге парц. изводе)

$$\Delta_x L \approx \frac{1}{2} d_x^2 L$$

28. Условни екстремум функције више променљивих. Довољни услови.

- **Дефинисати појам условног екстремума функције *n* променљивих са *m* услова.**

Уколико тражимо екстремуме функције $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при условима облика $g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \dots, g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, може се формирати одговарајућа Лагранжова функција

$$L(x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_m) = f(x_1,\dots,x_n) + \lambda_1 g_1(x_1,\dots,x_n) + \dots + \lambda_m g_m(x_1,\dots,x_n)$$

Дефинисати Јакобијеву матрицу која одговара условима. Дефинисати Јакобијан.

Дефиниција. Нека је дат скуп функција $y_i = y_i(x_1,\dots,x_n),\ i = 1,\dots,m$, које у некој тачки x^0 $(x^0 = (x_1^0,\dots x_n^0))$ имају све парцијалне изводе првог реда. Тада се матрица, састављена од парцијалних извода тих функција у тачки x^0,

$$\left[\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right]=\begin{bmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n}\end{bmatrix}, \quad i=1,\ldots,m, \quad j=1,\ldots,n$$

назива Јакобијевом матрицом датог скупа функција у тачки x^0.

Ако је $m = n$, детерминанта Јакобијеве матрице се назива јакобијаном и означава са

$$\frac{\partial(y_1,\ldots,y_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)} \quad \text{или} \quad \frac{D(y_1,\ldots,y_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)}.$$

- **Дефинисати тангентни простор. Формулисати теорему о довољним условима за условни екстремум.**

Нека је S глатка површ, а L_x и L_y криве дуж којих равни $y= y_0$ и $x= x_0$ секу S. Раван која садржи тангенте T_x и T_y тих кривих у њиховој заједничкој тачки M_0 (x_0, y_0, z_0) зове се тангентна раван површи S у тачки M_0.

На основу једначина за T_x и T_y добија се једначина тангентне равни

$$z-z_0 = A(x-x_0)+B(y-y_0)=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0}(x-x_0)+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0}(y-y_0)$$

($P_0(x_0, y_0)$ је пројекција тачке M_0 на раван Oxy).

Теорема. Нека функције f, g_1, ..., g_m имају парцијалне изводе до другог реда и нека је $(x_1^0,\ldots,x_n^0,\lambda_1^0,\ldots,\lambda_m^0)$ $((P_0,\lambda_0))$ стационарна тачка Лагранжеве функције. Ако је

i) $\left.d_x^2 L\right|_{P_0} > 0$ онда је P_0 условни минимум (строги);

ii) $\left.d_x^2 L\right|_{P_0} < 0$ онда је P_0 условни максимум (строги).