Математика 2
Други део усменог 2011/2012

1. Дефиниција одређеног интеграла.

- Дефинисати: поделу одсечка одговарајућу броју ε, потподелу, дијаметар поделе
- Дефинисати одређени интеграл
- Формулисати и доказати теорему о вези непрекидности и интеграбилности функције

- **Подела одсечка одговарајућа броју ε**

Дефиниција. За дату функцију $y = f(x)$, поделу одсечка $[a, b]$

$$\pi[a, b] = \pi[a=x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \le \ldots \le x_{n-1} \le \xi_n \le x_n=b]$$

ћемо назвати одговарајућом броју ε (ε произвољни мали позитиван број), ако за сваки пар x' и x'' тачака које припадају истом одсечку $[x_{i-1}, x_i]$ важи неједнакост

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon \cdot$$

- **Потподела**

Дефиниција. Подела $\pi'[a, b] = \pi'[a=x'_0 \le \xi'_1 \le x'_1 \le \xi'_2 \le x'_2 \le \ldots \le x'_{p-1} \le \xi'_p \le x'_p=b]$ се назива потподелом поделе $\pi[a, b] = \pi[a=x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \le \ldots \le x_{n-1} \le \xi_n \le x_n=b]$, ако свака од тачака $x_0, \ldots, x_n$ припада скупу тачака $\{x'_0, \ldots, x'_p\}$, тј. скуп $\{x'_0, \ldots, x'_p\}$ се добија кад се скупу $\{x_0, \ldots, x_n\}$ додају неке деоне тачке; при томе су тачке ξ_k и ξ'_k одабране произвољно.

- **Дијаметар поделе**

Дефиниција. Број $d(\pi) = \max \Delta x_k$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ назива се дијаметар поделе π.

- Означимо интегралну суму функције $f(x)$ која одговара подели π одсечка $[a, b]$ са $S_\pi(f)$: $S_\pi(f) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$. Тада можемо и овако формулисати дефиницију:

Дефиниција. Реални број J се назива одређеним интегралом функције $y = f(x)$ на одсечку $[a, b]$, ако за свако произвољно мало позитивно ε постоји такав довољно мали број $\delta > 0$, да за сваку поделу π за коју је $d(\pi) < \delta$, важи неједнакост

$$|J - S_\pi(f)| < \varepsilon \cdot$$

- Из ове дефиниције да ако J постоји, тада за сваки низ подела $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n, \ldots$ одсечка $[a, b]$, у коме $d(\pi_n) \to 0;\ n \to \infty$, важи да је

$$J = \lim_{n\to\infty} S_{\pi_n}(f) \cdot$$

- **Одређен интеграл**

Дефиниција. Ако за било какву поделу одсечка $[a, b]$ на одсечке $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, ..., n$, у којој $\max [x_{i-1}, x_i] = \max \Delta x_i \to 0$ $(n\to\infty)$, и за произвољно изабране тачке ξ_i на одсечцима $[x_{i-1}, x_i]$ интегрална сума S_n тежи једној одређеној вредности S, тада се та гранична вредност назива одређени интеграл функције $f(x)$ на одсечку $[a, b]$ и означава $\int_a^b f(x)dx$.

По дефиницији $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = S = \int_a^b f(x)dx$, тј.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \max|\Delta x_k| < \delta \Rightarrow \left| S - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \right| < \varepsilon.$$

Функција $f(x)$ је интегранд, број a је доња граница интеграла, број b је горња граница интеграла, x је интеграциона промењлива, одсечак $[a, b]$ је одсечак интеграције.

- **Теорема о вези непрекидности и интеграбилности фукције**

Теорема. Ако је функција $f(x)$ непрекидна на одсечку $[a, b]$, тада је она на том интервалу и R–интеграбилна.

Доказ. Функција која је непрекидна на одсечку, је и равномерно непрекидна, тако да је $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \ |x'' - x'| < \delta, \ |f(x'') - f(x')| < \varepsilon$.

Посматрајмо низ подела π_1, π_2, ... таквих да $d(\pi_n) \to 0$, докажимо да низ $\{S_{\pi_n}\}$ конвергира. Ако је за поделу π_n са m_n подинтервала, $\varepsilon_n = \max|f(x'') - f(x')|$ за сваки пар тачака x', $x'' \in [x_{k-1}, x_k]$, $k\in\{1,..., m_n\}$, онда π_n одговара броју ε_n.

Из услова равномерне непрекидности за дато $\varepsilon > 0$, нађимо одговарајуће $\delta > 0$, а затим N_0, такво да је $\forall n \geq N_0 \Rightarrow d(\pi_n) < \delta$. Очигледно је $\varepsilon_n < \varepsilon$, $\forall n \geq N_0$ што значи да $\varepsilon_n \to 0$, кад $n\to\infty$. Како на основу претходне теореме важи $|S_{\pi_n}(f) - S_{\pi_m}(f)| < 2\varepsilon(b-a)$, низ $\{S_{\pi_n}\}$ је Кошијев, па према томе конвергира.

Одатле следи да је непрекидна функција $y = f(x)$ R–интеграбилна.

2. Особине одређеног интеграла.

- Дефинисати одређени интеграл
- Навести особине одређеног интеграла
- Доказати једну од наведених особина

Одређен интеграл

Дефиниција. Ако за било какву поделу одсечка $[a, b]$ на одсечке $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, ..., n$, у којој $\max [x_{i-1}, x_i] = \max \Delta x_i \to 0$ ($n \to \infty$), и за произвољно изабране тачке ξ_i на одсечцима $[x_{i-1}, x_i]$ интегрална сума S_n тежи једној одређеној вредности S, тада се та гранична вредност назива одређени интеграл функције $f(x)$ на одсечку $[a, b]$ и означава $\int\limits_a^b f(x)dx$.

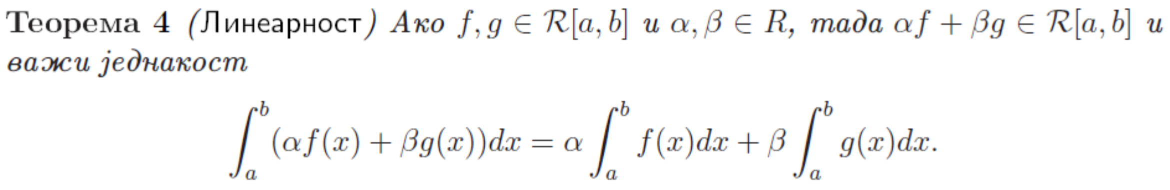
По дефиницији $$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = S = \int\limits_a^b f(x)dx,$$ тј.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \max|\Delta x_k| < \delta \Rightarrow \left| S - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \right| < \varepsilon.$$

Функција $f(x)$ је интегранд, број a је доња граница интеграла, број b је горња граница интеграла, x је интеграциона променљива, одсечак $[a, b]$ је одсечак интеграције.

Особине одређеног интеграла

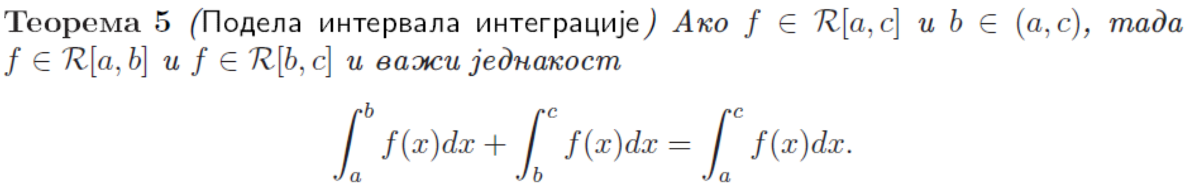
1)



Теорема 4 (Линеарност) *Ако $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ и $\alpha, \beta \in R$, тада $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}[a, b]$ и важи једнакост*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

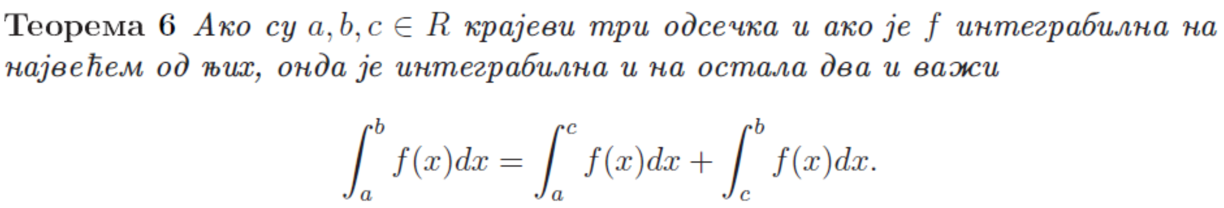
2)



Теорема 5 (Подела интервала интеграције) *Ако $f \in \mathcal{R}[a, c]$ и $b \in (a, c)$, тада $f \in \mathcal{R}[a, b]$ и $f \in \mathcal{R}[b, c]$ и важи једнакост*

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx.$$

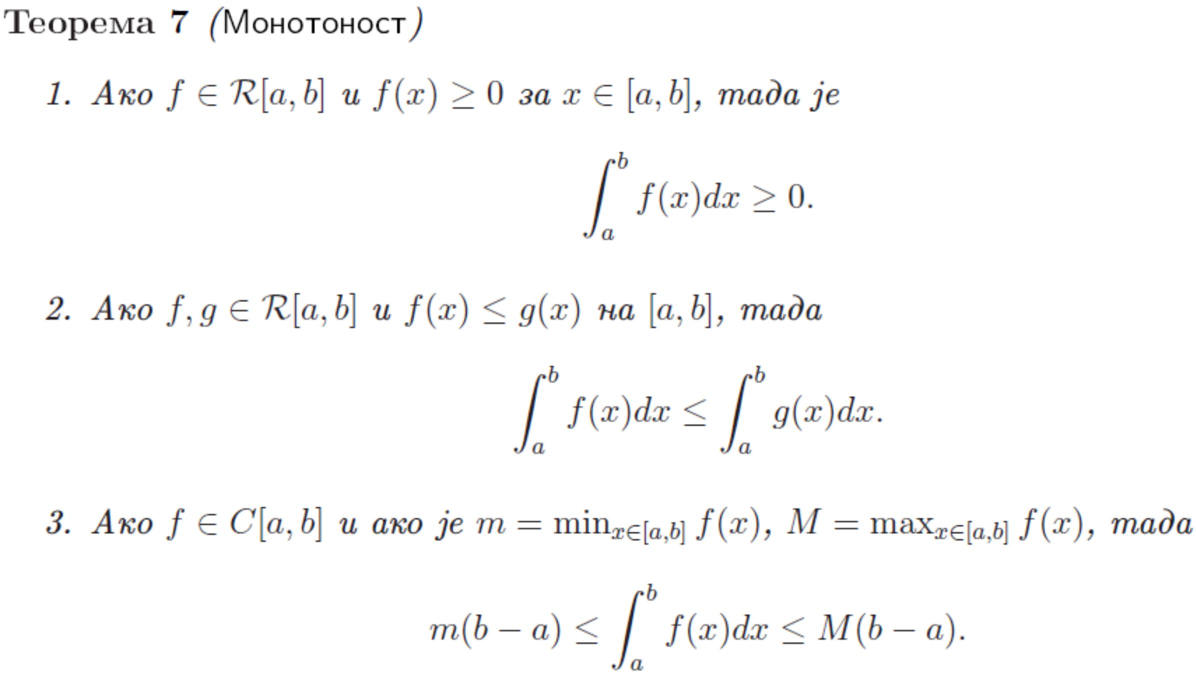
3)



Теорема 6 *Ако су $a, b, c \in R$ крајеви три одсечка и ако је f интеграбилна на највећем од њих, онда је интеграбилна и на остала два и важи*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

4)



Теорема 7 *(Монотоност)*

1. *Ако* $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *и* $f(x) \geq 0$ *за* $x \in [a,b]$, *тада је*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

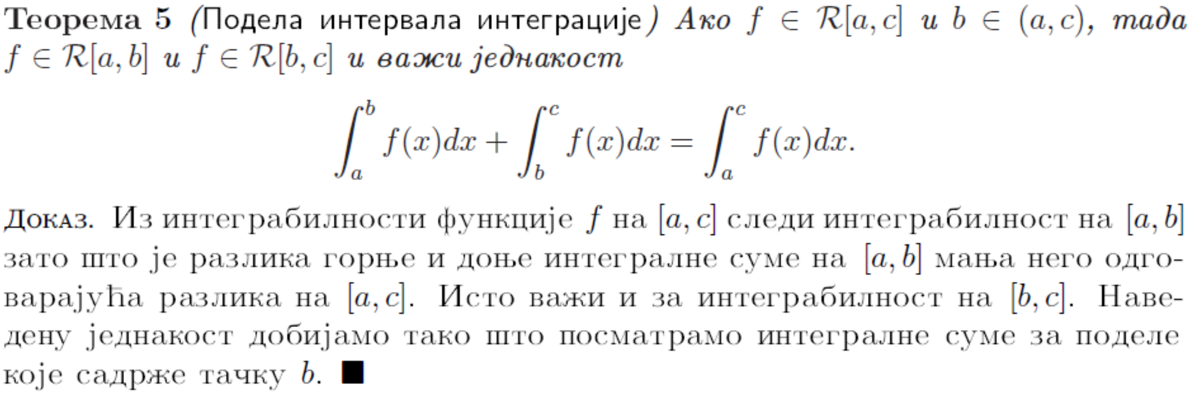
2. *Ако* $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ *и* $f(x) \leq g(x)$ *на* $[a,b]$, *тада*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

3. *Ако* $f \in C[a,b]$ *и ако је* $m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$, *тада*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

- **Доказати једну од наведених особина**



Теорема 5 *(Подела интервала интеграције) Ако* $f \in \mathcal{R}[a,c]$ *и* $b \in (a,c)$, *тада* $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *и* $f \in \mathcal{R}[b,c]$ *и важи једнакост*

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx.$$

Доказ. Из интеграбилности функције f на $[a,c]$ следи интеграбилност на $[a,b]$ зато што је разлика горње и доње интегралне суме на $[a,b]$ мања него одговарајућа разлика на $[a,c]$. Исто важи и за интеграбилност на $[b,c]$. Наведену једнакост добијамо тако што посматрамо интегралне суме за поделе које садрже тачку b. ■

---

3. Теорема о средњој вредности интеграла функције једне променљиве.

- Дефинисати одређени интеграл
- Формулисати теореме о процени вредности и о средњој вредности интеграла
- Коришћењем теореме о процени вредности интеграла доказати теорему о средњој вредности интеграла

- **Одређен интеграл**

Дефиниција. Ако за било какву поделу одсечка $[a, b]$ на одсечке $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, ..., n$, у којој $\max [x_{i-1}, x_i] = \max \Delta x_i \to 0$ $(n \to \infty)$, и за произвољно изабране тачке ξ_i на одсечцима $[x_{i-1}, x_i]$ интегрална сума S_n тежи једној одређеној вредности S, тада се та гранична вредност назива одређени интеграл функције $f(x)$ на одсечку $[a, b]$ и означава $\int_a^b f(x)dx$.

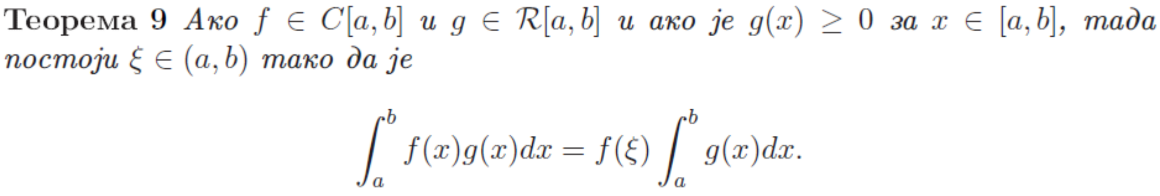
По дефиницији
$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = S = \int_a^b f(x)dx,\text{ тј.}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \max|\Delta x_k| < \delta \Rightarrow \left|S - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\right| < \varepsilon.$$

Функција $f(x)$ је интегранд, број a је доња граница интеграла, број b је горња граница интеграла, x је интеграциона променљива, одсечак $[a, b]$ је одсечак интеграције.

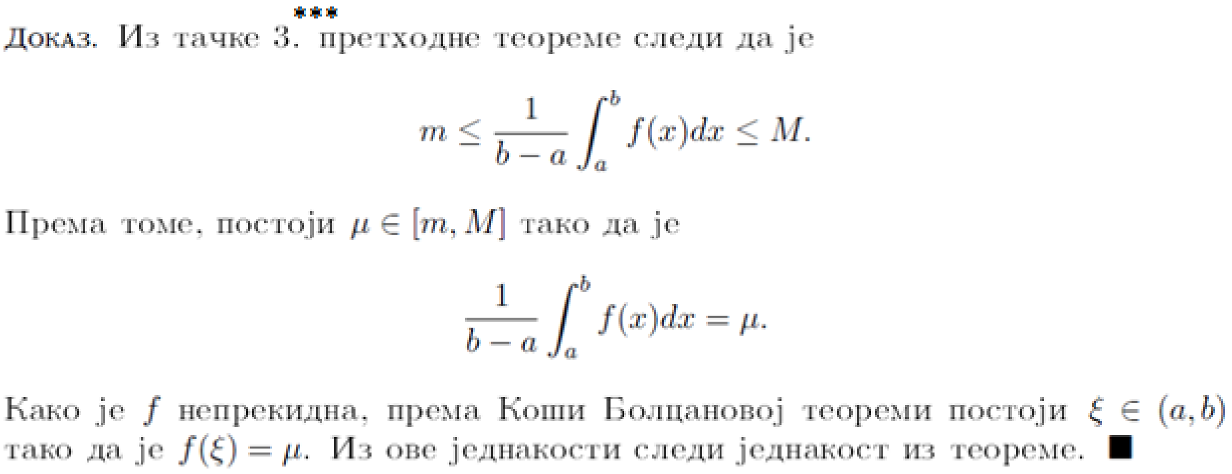
1) **Формулисати теореме о процени вредности и о средњој вредности интеграла**

Теорема (о средњој вредности). Ако је функција $f(x)$ непрекидна на одсечку $[a, b]$, тада постоји тачка ξ, $a < \xi < b$, за коју је
$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$



Теорема 9 *Ако* $f \in C[a,b]$ *и* $g \in \mathcal{R}[a,b]$ *и ако је* $g(x) \geq 0$ *за* $x \in [a,b]$, *тада постоји* $\xi \in (a,b)$ *тако да је*
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

- **<u>Коришћењем теореме о процени вредности интеграла доказати теорему о средњој вредности интеграла</u>**


Доказ. Из тачке 3.*** претходне теореме следи да је

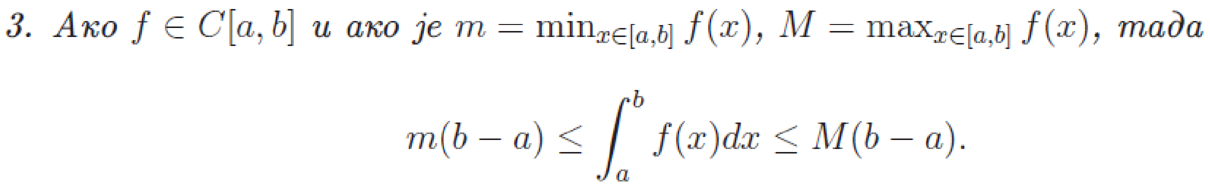
$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M.$$

Према томе, постоји $\mu \in [m, M]$ тако да је

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \mu.$$

Како је f непрекидна, према Коши Болцановој теореми постоји $\xi \in (a, b)$ тако да је $f(\xi) = \mu$. Из ове једнакости следи једнакост из теореме. ■

Тачка 3. претходне теореме – Особина монотоности ***


3. Ако $f \in C[a, b]$ *и ако је* $m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$, *тада*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

4. Теорема о подели интервала интеграције.

- Дефинисати одређени интеграл
- Формулисати теорему о подели интервала интеграције
- Доказати теорему за $a < c < b$. Доказати теорему за $a < b < c$

- **Одређен интеграл**

Дефиниција. Ако за било какву поделу одсечка $[a, b]$ на одсечке $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, ..., n$, у којој $\max [x_{i-1}, x_i] = \max \Delta x_i \to 0$ ($n \to \infty$), и за произвољно изабране тачке ξ_i на одсечцима $[x_{i-1}, x_i]$ интегрална сума S_n тежи једној одређеној вредности S, тада се та гранична вредност назива одређени интеграл функције $f(x)$ на одсечку $[a, b]$ и означава $\int_a^b f(x)dx$.

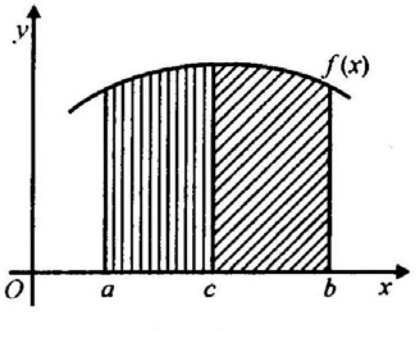
По дефиницији $$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = S = \int_a^b f(x)dx,$$ тј.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \max|\Delta x_k| < \delta \Rightarrow \left| S - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \right| < \varepsilon.$$

Функција $f(x)$ је интегранд, број a је доња граница интеграла, број b је горња граница интеграла, x је интеграциона променљива, одсечак $[a, b]$ је одсечак интеграције.

2) **Формулисати теорему о подели интервала интеграције**

Теорема (о подели интервала интеграције). За произвољне три тачке a, b, c важи једнакост $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, под претпоставком да сва три интеграла постоје.



- **Доказати теорему за a < c < b. Доказати теорему за a < b < c**

Доказ. Нека је $a < c < b$. Саставимо интегралну суму за функцију $f(x)$ на $[a, b]$, тако да је c увек једна од подеоних тачака. Тада важи

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \quad x_m = c.$$

Кад се пређе на граничну вредност, кад max $\Delta x_i \to 0$, добија се тражена једнакост за случај $a < c < b$.

Нека је $a < b < c$. На основу већ доказаног $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$, тј.

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$. Према 3) важи $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, па се и у овом случају добија $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Слично се тражена једнакост доказује за било који распоред тачака a, b, c.

5. Основна теорема диференцијалног и интегралног рачуна.

- Дефинисати примитивну функцију
- Формулисати основну теорему диференцијалног и интегралног рачуна
- Доказати основну теорему диференцијалног и интегралног рачуна

- **Дефинисати примитивну функцију**

Дефиниција. Примитивна (првобитна) функција дате функције $f(x)$, назива се функција $F(x)$ за коју је

$$F'(x) = f(x).$$

Дакле, неодређени интеграл $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ је примитивна функција интегранда $f(x)$.

- **Формулисати основну теорему диференцијалног и интегралног рачуна**

Теорема 10 *Ако $f \in \mathcal{R}[a,b]$ и ако је f непрекидна у тачки $x \in (a,b)$, тада је Φ диференцијабилна у тачки x и важи*

$$\Phi'(x) = f(x).$$

- **Доказати основну теорему диференцијалног и интегралног рачуна**

Доказ. Према дефиницији извода је $\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}$. Како је

$$\Delta\Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt,$$

применом теореме о средњој вредности за интеграле добија се $\Delta\Phi(x) = f(\xi)\Delta x$ за неко $\xi \in [x, x+\Delta x]$. Према томе

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = f(\xi),$$

па је

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = f(x). \quad \blacksquare$$

6. Њутн-Лајбницова формула.

- Дефинисати појмове неодређеног интеграла и примитивне функције
- Формулисати Њутн-Лајбницову теорему (написати Њутн-Лајбницову формулу)
- Доказати Њутн-Лајбницову теорему

- **Дефинисати појмове неодређеног интеграла и примитивне функције**

Дефиниција. Интеграл
$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$$
се назива неодређени интеграл функције $f(x)$; неодређен се зове зато што му нису обе границе одређене (фиксиране).

Дефиниција. Примитивна (првобитна) функција дате функције $f(x)$, назива се функција $F(x)$ за коју је
$$F'(x) = f(x).$$

Дакле, неодређени интеграл $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ је примитивна функција интегранда $f(x)$.

- **Формулисати Њутн-Лајбницову теорему (написати Њутн-Лајбницову формулу)**

> Теорема 9 *Нека је функција f непрекидна на $[a,b]$ и нека је F њена примитивна функција. Тада је*
> $$\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a).$$

Њутн – Лајбницова формула $\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$, тј. $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$.

- **Доказати Њутн-Лајбницову теорему**

Доказ. Како је $\Phi(x)$ такође примитивна функција за функцију f, то је

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C.$$

Из ове једнакости за $x = a$ добија се

$$0 = \int_a^a f(t)dt = F(a) + C,$$

одакле је $C = -F(a)$. Према томе,

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a),$$

одакле се за $x = b$ добија тврђење теореме. ■

---

7. Смена променљиве у одређеном интегралу.

- Дефинисати појмове неодређеног интеграла и примитивне функције
- Формулисати Њутн-Лајбницову теорему (написати Њутн-Лајбницову формулу)
- Извести формулу за смену променљиве у одређеном интегралу

- **Дефинисати појмове неодређеног интеграла и примитивне функције**

Дефиниција. Интеграл $$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

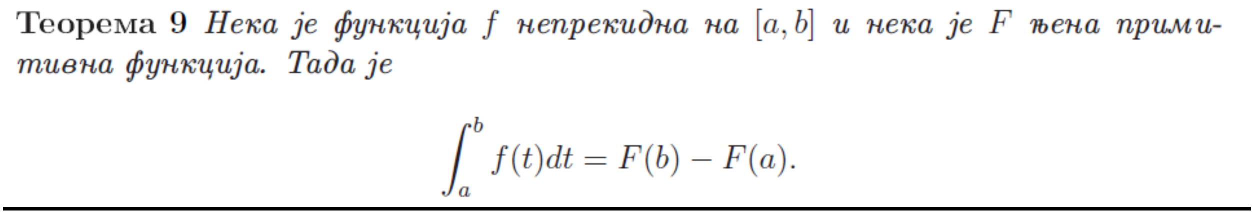
се назива неодређени интеграл функције $f(x)$; неодређен се зове зато што му нису обе границе одређене (фиксиране).

Дефиниција. Примитивна (првобитна) функција дате функције $f(x)$, назива се функција $F(x)$ за коју је

$$F'(x) = f(x).$$

Дакле, неодређени интеграл $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ је примитивна функција интегранда $f(x)$.

- **Формулисати Њутн-Лајбницову теорему (написати Њутн-Лајбницову формулу)**

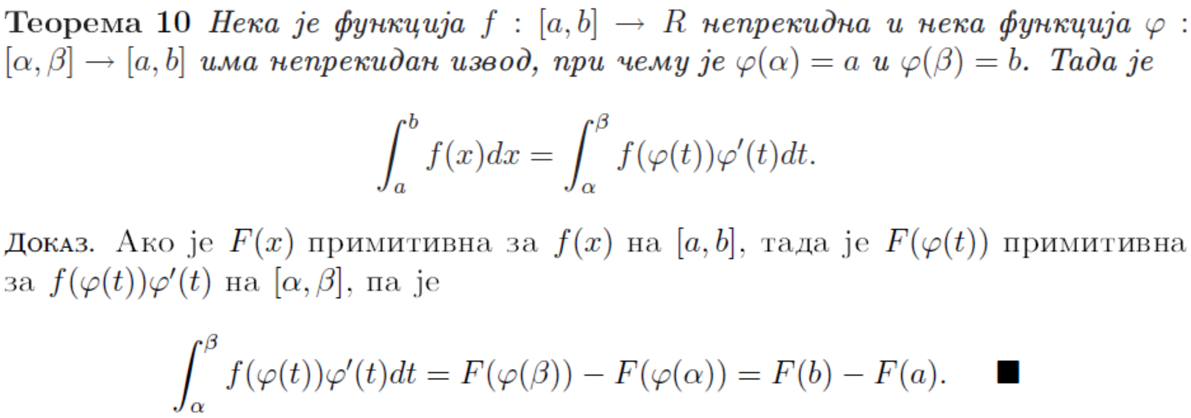


Теорема 9 *Нека је функција f непрекидна на $[a,b]$ и нека је F њена примитивна функција. Тада је*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Њутн – Лајбницова формула $\int\limits_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$, тј. $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

- **Извести формулу за смену промењиве у одређеном интегралу**



Теорема 10 *Нека је функција $f : [a,b] \to R$ непрекидна и нека функција $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ има непрекидан извод, при чему је $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$. Тада је*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Доказ. Ако је $F(x)$ примитивна за $f(x)$ на $[a,b]$, тада је $F(\varphi(t))$ примитивна за $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на $[\alpha,\beta]$, па је

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a). \quad \blacksquare$$

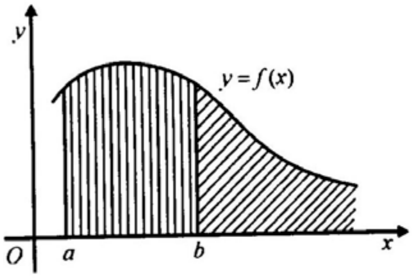
8. Уопштени интеграли са бесконачним интервалом интеграције.

- Дефинисати $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. Конвергенција и дивергенција
- Конвергенција интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ за $\alpha > 0$.

Дефиниција. Ако постоји коначна гранична вредност $\lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$, тада се она назива уопштеним или несвојственим интегралом функције *f*(*x*) на интервалу и означава са

$$\int\limits_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x)dx.$$

У том случају кажемо да интеграл постоји или конвергира. Ако интеграл нема коначну граничну вредност кад *b*→∞, тада се каже да не постоји или да дивергира.



Напомена. Аналогно се могу дефинисати уопштени интеграли

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx \qquad \text{и} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx \cdot$$

- **Интеграл:** $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^a}, a>0$

$$\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^a} = \lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b}\frac{dx}{x^a} = \frac{1}{1-a}\lim_{b\to\infty}\left(b^{1-a}-1\right), \quad a \neq 1$$

- За $a>1$ $\lim_{b\to\infty}\left(b^{1-a}-1\right) = -1$, па је у овом случају $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^a} = \lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b}\frac{dx}{x^a} = \frac{1}{a-1}$.
- За $0<a<1$ $\lim_{b\to\infty}\left(b^{1-a}-1\right) = +\infty$, па је интеграл $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^a} = +\infty$, тј. дивергира.
- Ако је $a=1$ $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^a} = \lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}(\ln x)\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}\ln b = \infty$, па $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^a}$ дивергира.

9. Уопштени интеграли са неограниченим интеграндом.

- Дефинисати уопштени интеграл са неограниченим интеграндом. Конвергенција и дивергенција уопштеног интеграла
- Конвергенција интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ за $\alpha > 0$.

Дефиниција. Ако је функција $f(x)$ непрекидна на интервалу $a \le x < b$, а $f(x) \to \infty$ кад $x \to b$, $x < b$, и ако постоји коначна гранична вредност $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ ($\varepsilon > 0$), тада се та гранична вредност назива уопштени (несвојствени) интеграл функције $f(x)$ на одсечку $[a, b]$ и означава са

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx\cdot$$

Тада кажемо да уопштени интеграл постоји, тј. конвергира. У супротном, ако интеграл нема коначну граничну вредност, он не постоји, односно дивергира.

На сличан начин, ако је функција $f(x)$ непрекидна на интервалу $a < x \le b$, и ако постоји коначна гранична вредност

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx, \text{ тада је } \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx\cdot$$

Интеграл: $\int_0^1 \frac{dx}{x^a}$, $a > 0$

- За $0 < a < 1$ $\int_0^1 \frac{dx}{x^a} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^a} = \frac{1}{1-a} \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left(\varepsilon^{1-a} - 1\right) = \frac{1}{1-a}$, интеграл конвергира.
- Може се закључити да за $a \ge 1$, интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^a}$ дивергира.

10. Интеграција простих рационалних функција.

- Израчунавање интеграла $\int \frac{dx}{x-a}$, $\int \frac{dx}{(x-a)^k}$, $\int \frac{dx}{x^2+p^2}$, $\int \frac{dx}{\left(x^2+p^2\right)^2}$
- Разложити израз $\frac{A}{(x-a)(x-b)^2(x^2+1)}$ на просте разломке, у скупу R

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C.$

2. За $k > 1$ је

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \int (x-a)^{-k}dx = -\frac{1}{k-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C.$$

5. Нека је $I_k = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^k}$ за $k > 1$ и $a \neq 0$. Како је

$$\frac{1}{(x^2+a^2)^k} = \frac{1}{a^2}\frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^k},$$

то је

$$I_k = \frac{1}{a^2}I_{k-1} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^k}.$$

Парцијалном интеграцијом, са $u = x$ и $dv = \frac{xdx}{(x^2+a^2)^k}$ добијамо да је

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^k} = -\frac{x}{2(k-1)(x^2+a^2)^{k-1}} + \frac{1}{2(k-1)}I_{k-1}.$$

Према томе,

$$I_k = \frac{x}{2a^2(k-1)(x^2+a^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2a^2(k-1)}I_{k-1}.$$

Специјално,

$$I_2 = \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^2}I_1,$$

где је

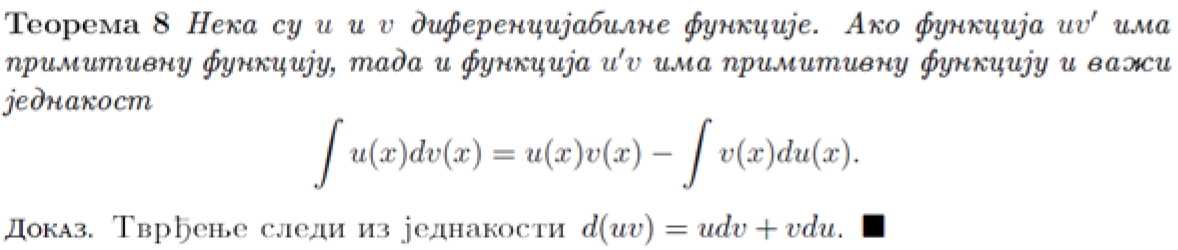
$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.$$

11. Метода парцијалне интеграције.

- Метода парцијалне интеграције. Доказ.
- Применом методе парцијалне интеграције и рекурентних веза израчунати

$$\int \frac{dx}{\left(x^2 + p^2\right)^n}$$

- **Метода парцијалне интеграције. Доказ**



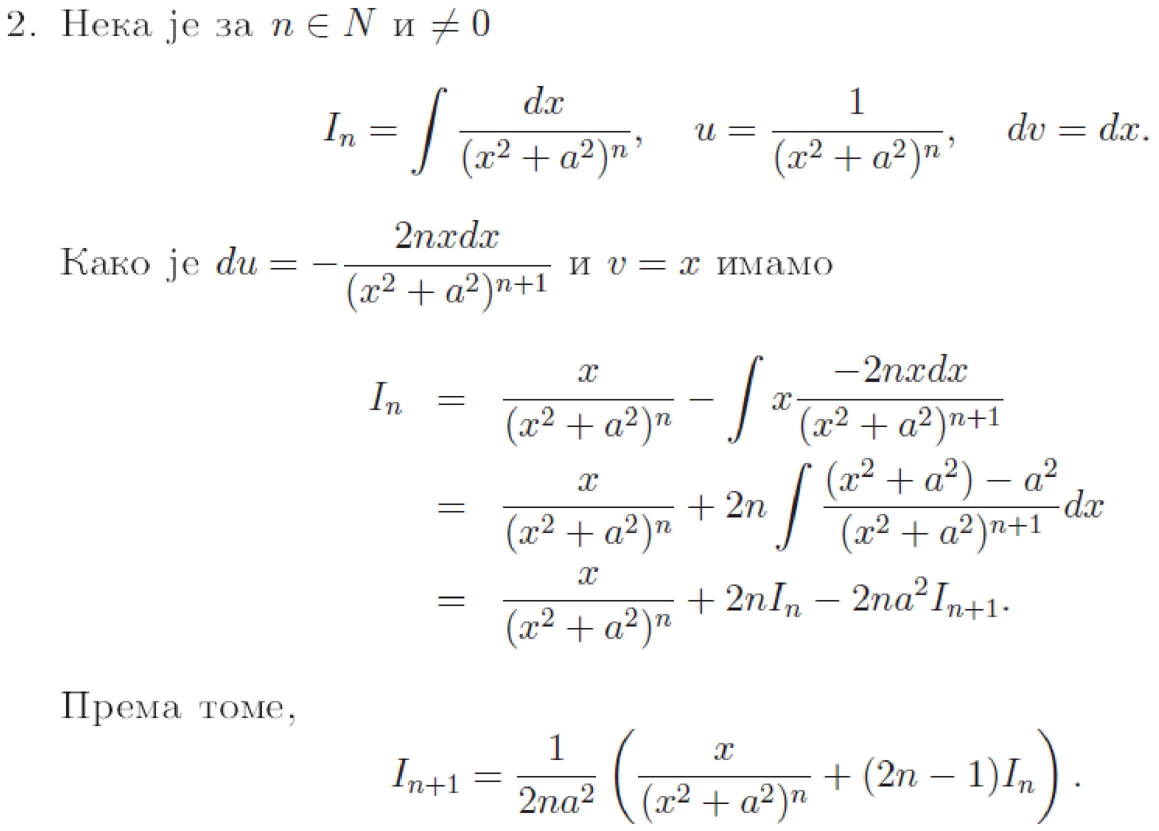
Теорема 8 *Нека су u и v диференцијабилне функције. Ако функција uv' има примитивну функцију, тада и функција $u'v$ има примитивну функцију и важи једнакост*

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

Доказ. Тврђење следи из једнакости $d(uv) = udv + vdu$. ■

- **Применом методе парцијалне интеграције и рекурентних веза израчунати**

$$\int \frac{dx}{\left(x^2 + p^2\right)^n}$$



2. Нека је за $n \in N$ и $\neq 0$

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}, \quad u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}, \quad dv = dx.$$

Како је $du = -\dfrac{2nxdx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$ и $v = x$ имамо

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} - \int x\frac{-2nxdx}{(x^2+a^2)^{n+1}} \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2I_{n+1}. \end{aligned}$$

Према томе,

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)I_n\right).$$

Напомена: Уместо а ставите ρ

12. Интеграција функција облика $R(\sin x, \cos x)$, *R* - рационална функција

- Општи случај смене при рачунању интеграла за функције $R(\sin x, \cos x)$, где је R рационална функција
- Навести смене које се користе у специјалним случајевима интеграције функција облика $R(\sin x, \cos x)$, R је рационална функција

- **Општи случај смене при рачунању интеграла за функције R(sinx,cosx), где је R рационална функција**

Претпоставимо да је дат израз који представља рационалну функцију аргумената који су тригонометријске функције. Такав израз ћемо означавати са $R(\sin x, \cos x)$, јер се све тригонометријске функције рационално изражавају преко функција sin *x*, cos *x*. Важи следећа теорема:

Теорема. Интеграл $R(\sin x, \cos x)$ трансформише се у интеграл рационалне функције сменом $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Доказ. Коришћењем тригонометријских формула

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

тј. $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$

јер је $$1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = 1+\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} - \frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

тј. $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

- Због $x = 2\operatorname{arctg} t$, важи $dx = \dfrac{1}{1+t^2}dt$.

Дакле, $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\dfrac{2t}{1+t^2}, \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)\dfrac{2}{1+t^2}dt$, интегранд је рационална функција од *t*.

- **Навести смене које се користе у специјалним случајевима интеграције функција облика R(sinx,cosx), R је рационална функција**

Интеграли специјални случајеви функција $R(\sin x, \cos x)$, се могу једноставније решити другим сменама:

1. Интеграл облика $\int R(\sin x)\cos x dx$ се најједноставније решава сменом $\sin x = t$, $\cos x\, dx = dt$, која дати интеграл своди на $\int R(t)dt$.
2. Слично, интеграл $\int R(\cos x)\sin x dx$ се може решавати сменом $\cos x = t$, $\sin x\, dx = dt$, чиме се своди на $\int R(t)dt$.
3. За интеграл облика $\int R(\mathrm{tg}\, x)dx$ погодна је смена $\mathrm{tg}\, x = t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, којом се своди на $\int R(t)\frac{dt}{1+t^2}$.
4. Смена $\mathrm{tg}\, x = t$, се користи и у случајевима кад се функције $\sin x$ и $\cos x$ појављују са парним степенима у интегранду $R(\sin x, \cos x)$.

13. Метода смене у неодређеном интегралу.

- Метода смене у неодређеном интегралу. Доказ.
- Интеграција функција облика $R(x,\sqrt{ax+b})$ и $R\left(x,x^{\frac{m}{n}},\dots,x^{\frac{r}{s}}\right)$, где је R

  рационална функција

- **Метода смене у неодређеном интегралу. Доказ.**

Ако се при одређивању интеграла $\int f(x)dx$ не може лако наћи примитивна функција, а знамо да постоји може се применити метода смене $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ мора бити непрекидна и диференцијабилна функција за коју је $\varphi\,'(t) \neq 0$ и која има своју инверзну функцију. У том случају ће бити $dx=\varphi\,'(t)dt$, па

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\cdot$$

Доказ. Тада је извод леве стране: $\left(\int f(x)dx\right)'_x = f(x)\cdot$

Извод десне стране: због $t=\varphi^{-1}(x)$, $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{\varphi'(t)}$ је

$$\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)'_x = \frac{d}{dt}\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)\cdot\frac{dt}{dx} = f[\varphi(t)]\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = f[\varphi(t)] = f(x)$$

Напомена: Смена се може увести у облику $t=\psi(x)$, тада је $dt=\psi'(x)dx\cdot$

- **Интеграција функција облика $R(x,\sqrt{ax+b})$ и $R\left(x,x^{\frac{m}{n}},\ldots,x^{\frac{r}{s}}\right)$, где је R рационална функција**

3.1 Функције облика $R(x,\sqrt{ax+b})$

Сменом $\sqrt{ax+b}=t$ имамо да је $x=\frac{1}{a}(t^2-b)$ и $dx=\frac{2}{a}tdt$, па је

$$\int R(x,\sqrt{ax+b})dx=\int R_1(t)dt.$$

3.3 Функције облика $R(x,x^{m/n},\ldots,x^{r/s})$

Сменом $x=t^k$, где је k најмањи заједнички садржалац бројева $n,\ldots,s$ добијамо

$$x^{m/n}=(t^k)^{m/n}=(t^{k/n})^m=t^{pm},\ldots,x^{r/s}=t^{qr},$$

па је

$$\int R(x,x^{m/n},\ldots,x^{r/s})dx=\int R_3(t)dt.$$

14. Методa смене у неодређеном интегралу.

- Метода смене у неодређеном интегралу. Доказ.
- Интеграција функција облика $R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$, где је R рационална функција

- **Метода смене у неодређеном интегралу. Доказ.**

Ако се при одређивању интеграла $\int f(x)dx$ не може лако наћи примитивна функција, а знамо да постоји може се применити метода смене $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ мора бити непрекидна и диференцијабилна функција за коју је $\varphi'(t) \neq 0$ и која има своју инверзну функцију. У том случају ће бити $dx=\varphi'(t)dt$, па

$$\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\cdot$$

Доказ. Тада је извод леве стране: $\left(\int f(x)dx\right)'_x=f(x)\cdot$

Извод десне стране: због $t=\varphi^{-1}(x)$, $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\varphi'(t)}$ је

$$\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)'_x=\frac{d}{dt}\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)\cdot\frac{dt}{dx}=f[\varphi(t)]\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)}=f[\varphi(t)]=f(x)$$

Напомена: Смена се може увести у облику $t=\psi(x)$, тада је $dt=\psi'(x)dx$.

- Интеграција функција облика $R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$, где је R рационална функција

3.5 Функције облика $R\left(x,\ \sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ \sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}},\dots,\ \sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$

Сменом $\frac{ax+b}{cx+d}=t^n$, где је n најмањи заједнички садржалац бројева $n_1,n_2,\dots,n_k$, своди се на интеграл рационалне функције.

15. Интеграција функција облика $R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)$, *R* - рационална функција

- Интеграција функција облика $R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)$, где је R рационална функција
- Интеграција функција облика $R\left(y,\sqrt{1-y^2}\right)$, $R\left(y,\sqrt{y^2-1}\right)$, $R\left(y,\sqrt{1+y^2}\right)$

3.11 Функције облика $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$

Поред наведених специјалних случајева и свођења, као у претходном случају, на интеграле функција $R(t,\sqrt{t^2+\alpha^2})$, $R(t,\sqrt{t^2-\alpha^2})$ и $R(t,\sqrt{\alpha^2-t^2})$, постоје и Ојлерове смене које могу да се користе у општем случају.

Прва Ојлерова смена

За $a>0$ сменом

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-x\sqrt{a}$$

добија се

$$x=\frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}}.$$

Друга Ојлерова смена

За $c > 0$ сменом

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt - \sqrt{c}$$

добија се

$$x = \frac{2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}.$$

Трећа Ојлерова смена

Ако трином ax^2+bx+c има реалне и различите нуле α и β, тада сменом

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t$$

добијамо

$$x = \frac{a\beta-\alpha t^2}{a-t^2}.$$

- **Интеграција ирационалних функција типа** $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$

Издвајањем потпуног квадрата у поткореном изразу интеграл

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$$

се своди на један од интеграла

$$(1) \quad \int R(y, \sqrt{1-y^2})dy$$

$$(2) \quad \int R(y, \sqrt{y^2-1})dy$$

$$(3) \quad \int R(y, \sqrt{1+y^2})dy.$$

(1) Увођењем смене $y = \sin z$ добија се

$$\int R(y, \sqrt{1-y^2})dy = \int R(\sin z, \cos z)\cos z\, dz.$$

(2) Смена $y = \dfrac{1}{\sin z}$ даје

$$\int R(y, \sqrt{y^2-1})dy = -\int R\left(\frac{1}{\sin z}, \frac{\cos z}{\sin z}\right)\frac{\cos z}{\sin^2 z}dz.$$

(3) Применом смене $y = \operatorname{tg} z$,

$$\int R(y, \sqrt{1+y^2})dy = \int R\left(\frac{\sin z}{\cos z}, \frac{1}{\cos z}\right)\frac{1}{\cos^2 z}dz.$$

Интеграли добијени овим сменама се могу свести на интеграле рационалних функција. Полазни интеграли су могли и директно да се сведу на рационалне функције следећим сменама:

(1) $y = \sin z = \frac{2t}{1+t^2}$,

(2) $y = \frac{1}{\sin z} = \frac{1+t^2}{2t}$

(3) $y = \operatorname{tg} z = \frac{2t}{1-t^2}$.

16. Израчунавање дужине лука криве.

- Написати формулу за израчунавање дужине лука криве $y = f(x)$, $a \le x \le b$
- Доказ – извођење формуле
- Написати формулу за рачунање лука криве задате параметарски

- **Написати формулу за израчунавање дужине лука криве *y=f(x), a ≤ x ≤b***

Дужина лука криве $y = f(x)$ над одсечком $x \in [a, b]$ једнака вредности одређеног интеграла

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Слично, дужина лука криве $y = f(x)$ над одсечком $[a, x]$ променљиве дужине је

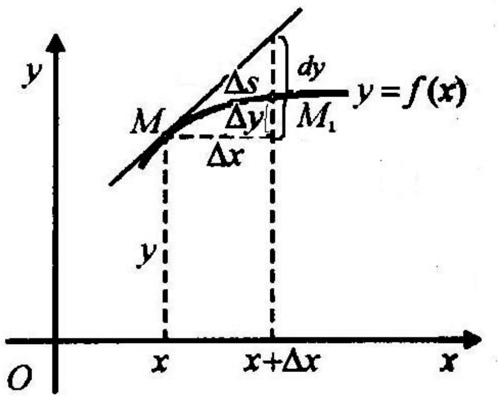
$$s = \int_a^x \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

- **Доказ. Извођење формуле.**

За део Δs лука криве $y = f(x)$ између тачака $M(x, y)$ и $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$ важи

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \le \Delta s \le \sqrt{(\Delta x)^2 + (dy)^2} + (dy - \Delta y),$$

где је $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ дужина одсечка MM_1.



Ако је *f*(*x*) непрекидно диференцијабилна функција, онда се може показати, уз претпоставку да је Δ*x*>0, да је

$$\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \le \frac{\Delta s}{\Delta x} \le \sqrt{1+\left(\frac{dy}{\Delta x}\right)^2} + \frac{\varepsilon}{\Delta x},$$

јер је за диференцијабилне функције *dy* – Δу = *o*(Δ*x*). Преласком на граничне вредности добија се

$$\lim_{\Delta x\to 0}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \le \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta x} \le \lim_{\Delta x\to 0}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{\Delta x}\right)^2},\ \varepsilon = o(\Delta x),$$

значи $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, тј. $ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx\cdot$

Према томе ако се формирају одговарајуће интегралне суме, добија се да је дужина лука криве *y* = *f*(*x*) над одсечком *x*∈[*a*, *b*] једнака вредности одређеног интеграла

$$s = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx\cdot$$

Слично, дужина лука криве *y* = *f*(*x*) над одсечком [*a*, *x*] променљиве дужине је

$$s = \int_a^x \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx\cdot$$

- **<u>Написати формулу за рачунање дужине лука криве задате параметарски</u>**

Ако је једначина криве дата у параметарском облику $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),$ $\alpha \le t \le \beta,$ тада се дужина лука дате криве рачуна помоћу интеграла

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2}\ \varphi'(t)dt, \quad \text{тј.} \quad s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\ dt \cdot$$

17. Израчунавање запремине ротационог тела.

- Написати формулу за израчунавање запремине тела V_x добијеног ротацијом око Ox осе
- Извођење формуле за запремину V_x ротационог тела
- Написати формулу за израчунавање запремине тела V_y добијеног ротацијом око Oy осе

- **<u>Написати формулу за израчунавање запремине тела V_x добијеног ротацијом око Ox осе</u>**

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \int_a^b y^2 dx$$

- **<u>Извођење формуле за запремину V_x ротационог тела</u>**

Ако је Ω неко (тродимензионо) тело за које нам је позната површина сваког пресека са равнима ортогоналним на осу *Ox*, тада ће та површина зависити од положаја пресечне равни, тј. од x, $P = P(x)$.
Ако поставимо равни $x = x_0 = a$, $x = x_1$, $x = x_2$, ... , $x = x_n = b$, где је $x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n$, тада смо тело Ω разложили на слојеве који представљају тзв. елементарне цилиндре, чија је запремина

$$V_k = P(\xi_k)\Delta x_k,\ x_{k-1} \le \xi_k \le x_k,$$

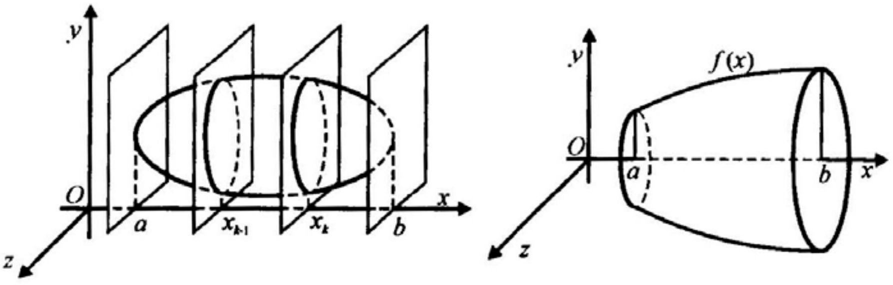
где је површина попречног пресека $P(\xi_k)$ основа цилиндра, а Δx_k његова висина.

Запремина свих ових цилиндара ће бити

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} P(\xi_k)\Delta x_k,$$

а гранична вредност интегралне суме кад $n \to \infty$, тј. кад max $\Delta x_k \to 0$, уколико постоји, представља запремину датог тела Ω

$$V_n = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b P(x)dx\cdot$$



Запремина ротационог тела

Ако је Ω тело образовано ротацијом око осе *Ox* криволинијског трапеза ограниченог кривом *y* = *f*(*x*), осом *Ox* и правама *x* = *a*, *x* = *b*, онда је попречни пресек круг чија је површина

$$P = \pi\left[f(x)\right]^2 = \pi\, y^2$$

па ће његова запремина бити

$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi\int_a^b y^2 dx\cdot$$

- **<u>Написати формулу за израчунавање запремине тела V_y добијеног ротацијом око Oy осе</u>**

$$V = \pi\int_a^b [f(y)]^2 dy = \pi\int_a^b x^2 dy$$

18. Израчунавање површине ротационе површи.

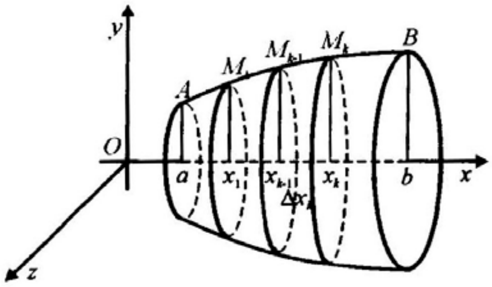
- Написати формулу за израчунавање површине површи P_x добијене ротацијом око Ox осе
- Извођење формуле за површину P_x ротационе површи
- Написати формулу за израчунавање површине површи P_y добијене ротацијом око Oy осе

- **Написати формулу за израчунавање површине површи P_x добијене ротацијом око Ox осе**

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

- **Извођење формуле за површину P_x ротационе површи**

- Нека је дата површ образована ротацијом криве $y = f(x)$ око осе Ox и нека је $f(x)$ непрекидна и диференцијална функција у свим тачкама одсечка $[a, b]$.



Свака тетива лука Δs_k, $k = 1, ..., n$ при ротацији образује конусну површ чија је

површина $\Delta P_k = 2\pi \frac{y_{k-1} + y_k}{2} \Delta s_k$,

где је $\Delta s_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2} \cdot \Delta x_k$.

Према Лагранжевој теореми

$$\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(\xi_k),\ x_{k-1} \le \xi_k \le x_k,$$

па је $\Delta s_k = \sqrt{1+\left(f'(\xi_k)\right)^2} \cdot \Delta x_k$, $\Delta P_k = 2\pi \frac{y_{k-1} + y_k}{2} \sqrt{1+\left(f'(\xi_k)\right)^2} \cdot \Delta x_k$,

а укупна површина ротационе површи израчуната на овај начин је

$$P_n = \pi \sum_{k=1}^{n} \left(f(x_{k-1}) + f(x_k)\right)\sqrt{1+\left(f'(\xi_k)\right)^2} \cdot \Delta x_k .$$

Преласком на граничну вредност добија се

$$P=\lim_{\substack{\max\Delta x_k\to 0\\(n\to\infty)}}\pi\sum_{k=1}^{n}2\left(f(\xi_k)\right)\sqrt{1+\left(f'(\xi_k)\right)^2}\cdot\Delta x_k$$

тј.

$$P=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx\cdot$$

- **<u>Написати формулу за израчунавање површине површи P_y добијене ротацијом око Oy осе</u>**

$$P=2\pi\int_a^b f(y)\sqrt{1+\left(f'(y)\right)^2}dy$$

19. Дефиниција и особине двојног интеграла.

- Дефиниција двојног интеграла. Геометријско тумачење
- Навести особине двојног интеграла
- Доказати једну од особина двојног интеграла

- **<u>Дефиниција двојног интеграла. Геометријско тумачење.</u>**

Нека је $f(x, y)$ (непрекидна) функција у затвореној просто повезаној области D и нека је D на произвољан начин подељена на елементарне области $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, ..., \Delta\sigma_n$. Ако постоји гранична вредност интегралне суме V_n када највећи пречник елементарних области тежи ка нули (ознака $d(\Delta\sigma_k)$), тада се та гранична вредност назива двојним интегралом функције $f(x, y)$ на области D и означава

$$\lim_{\substack{\max d(\Delta\sigma_k)\to 0\\(n\to\infty)}}\sum_{k=1}^{n}f(P_k)\Delta\sigma_k=\iint_D f(P)d\sigma\cdot$$

Постојање граничне вредности за непрекидне функције гарантује следећа теорема:

<u>Теорема.</u> За n-ту интегралну суму V_n која одговара коначној области D и непрекидној функцији $f(x, y)$, постоји гранична вредност кад највећи пречник елементарних области $\Delta\sigma_k$ ($k = 1, ..., n$) тежи ка нули (тј. $n\to\infty$). Та гранична вредност не зависи од од начина поделе области D на елементарне области, ни од избора тачака P_k.

Ако је $f(x, y) \geq 0$, $\forall(x, y) \in D$, тада двојни интеграл геометријски представља запремину вертикалног цилиндричног тела, чија је доња основа D, а горња S.

$$V = \iint_D f(x, y) d\sigma \cdot$$

Кад је $f(x, y) \leq 0$, $\forall(x, y) \in D$, тада је двојни интеграл негативан и једнак $-V$, јер одговарајуће тело лежи испод равни Oxy.

- **Навести особине двојног интеграла**

Теорема 4 *(Линеарност) Ако* $f, g \in \mathcal{R}(D)$ *и* $\alpha, \beta \in R$, *тада* $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(D)$, *при чему је*

$$\iint_D (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)) d\sigma = \alpha \iint_D f(x,y) d\sigma + \beta \iint_D g(x,y) d\sigma.$$

Теорема 5 *(Адитивност) Ако* $f \in \mathcal{R}(D)$ *и ако је* $D = A \cup B$, *при чему* A *и* B *немају заједничких унутрашњих тачака, тада је*

$$\iint_D f(x,y) d\sigma = \iint_A f(x,y) d\sigma + \iint_B f(x,y) d\sigma.$$

Теорема 6 *1. Ако* $f \in \mathcal{R}(D)$ *и* $f(P) \geq 0$, *тада* $\iint_D f(P) d\sigma \geq 0$.

2. Ако $f, g \in \mathcal{R}(D)$ *и* $f(P) \leq g(P)$ *за* $P \in D$, *тада је*

$$\iint_D f(P) d\sigma \leq \iint_D g(P) d\sigma.$$

Теорема 7 *(Процена вредности двојног интеграла) Ако* $f \in \mathcal{R}(D)$ *и ако је* $m \leq f(P) \leq M$ *за* $P \in D$, *тада*

$$m\sigma(D) \leq \iint_D f(P) d\sigma \leq M\sigma(D),$$

где је $\sigma(D)$ *површина области* D.

Теорема 8 *(Средња вредност двојног интеграла) Ако је* f *непрекидна функција на затвореној области* D, *тада постоји унутрашња тачка* Q *области* D, *таква да је*

$$\iint_D f(P) d\sigma = f(Q) \cdot \sigma(D).$$

- **Доказати једну од особина двојног интеграла**

Теорема 6 *1. Ако* $f \in \mathcal{R}(D)$ *и* $f(P) \geq 0$, *тада* $\iint_D f(P)d\sigma \geq 0$.

2. Ако $f, g \in \mathcal{R}(D)$ *и* $f(P) \leq g(P)$ *за* $P \in D$, *тада је*

$$\iint_D f(P)d\sigma \leq \iint_D g(P)d\sigma.$$

Доказ. 1. Из $f(P) \geq 0$ следи да је $S_n(f, \Pi) \geq 0$ за сваку поделу Π, па и у случају када $\lambda(\Pi) \to 0$.

2. Како је $g(P) - f(P) \geq 0$, из 1. следи

$$\iint_D g(P)d\sigma - \iint_D f(P)d\sigma = \iint_D (g(P) - f(P))d\sigma \geq 0. \quad \blacksquare$$

20. Дефиниција и особине тројног интеграла.

- Дефиниција тројног интеграла. Дефиниција n – димензионог интеграла
- Навести особине тројног интеграла
- Доказати једну од особина тројног интеграла

- **Дефиниција тројног интеграла. Дефиниција n–димензиног интеграла.**

Нека је $f(x, y, z)$ (непрекидна) функција у затвореној просто повезаној области Ω која је на произвољан начин подељена на елементарне области $\Delta\omega_k$. Изаберимо произвољне тачке $P_k \in \Delta\omega_k$ и означимо одговарајуће вредности дате функције са $f(P_k)$, $k = 1, \ldots, n$. Ако постоји гранична вредност суме $\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta\omega_k$ када највећи пречник елементарних области $\Delta\omega_k$ такође тежи нули (тј. $n \to \infty$) тада се та гранична вредност назива тројни интеграл функције $f(x, y, z)$ по области Ω и означава се

$$\lim_{\substack{\max d(\Delta\omega_k) \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta\omega_k = \iiint_{\Omega} f(P)d\omega$$

n-димензиони интеграл

$$J = \iint\limits_{W} \ldots \int f(P)dW$$ (када је W просто повезана затворена n-димензиона област)

- **Навести особине тројног интеграла**

Теорема 12 *(Линеарност) Ако* $f, g \in \mathcal{R}(T)$ *и* $\alpha, \beta \in R$, *тада* $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(T)$, *при чему је*

$$\iiint_T (\alpha f(P) + \beta g(P))dV = \alpha \iiint_T f(P)dV + \beta \iiint_T g(P)dV.$$

Теорема 13 *(Адитивност) Ако* $f \in \mathcal{R}(T)$ *и ако је* $T = A \cup B$, *при чему* A *и* B *немају заједничких унутрашњих тачака, тада је*

$$\iiint_T f(P)dV = \iiint_A f(P)dV + \iiint_B f(P)dV.$$

Теорема 14 *1. Ако* $f \in \mathcal{R}(T)$ *и* $f(P) \geq 0$, *тада* $\displaystyle\iiint_T f(P)dV \geq 0$.

2. Ако $f, g \in \mathcal{R}(T)$ *и* $f(P) \leq g(P)$ *за* $P \in T$, *тада је*

$$\iiint_T f(P)dV \leq \iiint_T g(P)dV.$$

Теорема 15 *(Процена вредности тројног интеграла) Ако* $f \in \mathcal{R}(T)$ *и ако је* $m \leq f(P) \leq M$ *за* $P \in T$, *тада*

$$m \cdot V(T) \leq \iiint_T f(P)dV \leq M \cdot V(T),$$

где је $V(T)$ *запремина области* T.

Теорема 16 *(Средња вредност тројног интеграла) Ако је* f *непрекидна функција на затвореној области* T, *тада постоји унутрашња тачка* Q *области* T, *таква да је*

$$\iiint_T f(P)dV = f(Q) \cdot V(T).$$

- **Доказати једну од особина троједног интеграла**

Теорема 14 *1. Ако $f \in \mathcal{R}(T)$ и $f(P) \ge 0$, тада $\iiint_T f(P)dV \ge 0$.*

2. Ако $f, g \in \mathcal{R}(T)$ и $f(P) \le g(P)$ за $P \in T$, тада је

$$\iiint_T f(P)dV \le \iiint_T g(P)dV.$$

Доказ. 1. Из $f(P) \ge 0$ следи да је $S_n(f, \Pi) \ge 0$ за сваку поделу Π, па и у случају када $\lambda(\Pi) \to 0$.

2. Како је $g(P) - f(P) \ge 0$, из 1. следи

$$\iiint_T g(P)dV - \iiint_T f(P)dV = \iiint_T (g(P) - f(P))dV \ge 0. \quad \blacksquare$$

21. Свођење двојног на двоструки интеграл.

- Дефиниција двојног интеграла.
- Свођење двојног на двоструки интеграл за правоугаону област
- Свођење двојног на двоструки интеграл за произвољну просто повезану област

- **Дефиниција двојног интеграла.**

Нека је $f(x, y)$ (непрекидна) функција у затвореној просто повезаној области D и нека је D на произвољан начин подељена на елементарне области $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, ..., \Delta\sigma_n$. Ако постоји гранична вредност интегралне суме V_n када највећи пречник елементарних области тежи ка нули (ознака $d(\Delta\sigma_k)$), тада се та гранична вредност назива двојним интегралом функције $f(x, y)$ на области D и означава

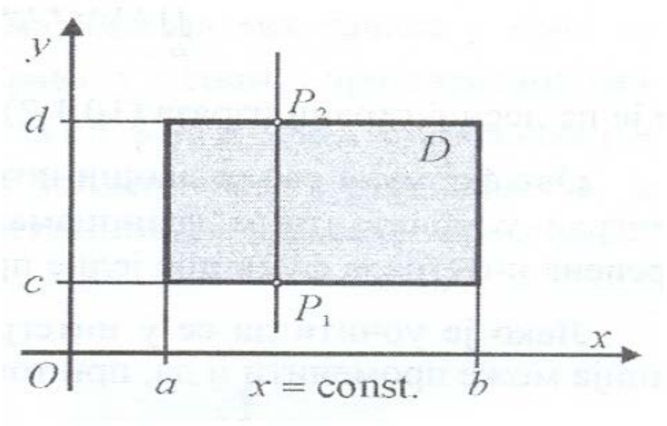
$$\lim_{\substack{\max d(\Delta\sigma_k)\to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta\sigma_k = \iint_D f(P)d\sigma \cdot$$

- **<u>Свођење двојног на двоструки интеграл за правоугаону област.</u>**

3.1 Правоугаона област

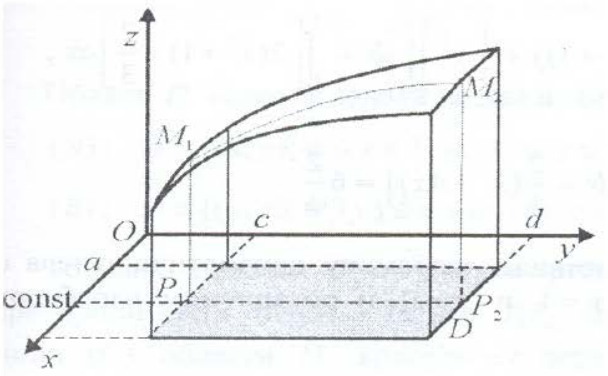
Нека је област интеграције правоугаоник,

$$D = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}.$$



Имајући у виду геометријско тумачење двојног интеграла (запремина), видимо да би један начин интеграције могао бити дат са

$$I = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$



Теорема 9 *(Свођење двојног на двоструки интеграл) Ако* $f \in \mathcal{R}([a,b] \times [c,d])$, $I \in \mathcal{R}[a,b]$ *и* $J \in \mathcal{R}[c,d]$, *тада важи*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy.$$

Поновљени једноструки интеграли у претходном тврђењу се пишу и у облику

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy, \quad \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx$$

и зову ***двоструки интеграли***. Ако је $f(x,y) = g(x)h(y)$, тада је

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b g(x)dx \cdot \int_c^d h(y)dy.$$

То се може и строго доказати полазећи од дефиниције двојног интеграла. Нека је

$$I(x) == \int_c^d f(x,y)dy, \quad J(y) = \int_a^b f(x,y)dx.$$

- **Свођење двојног на двоструки интеграл за произвољну просто повезану област.**

3.3 Произвољна област

Ако област D може да се разложи на трапезоидне области, онда за израчунавање двојног интеграла дате функције на области D могу да се примене претходне формуле. На свакој трапезоидној области двојни интеграл се рачуна свођењем на двоструки, а затим се применом теореме о адитивности налази двојни интеграл на области D.

22. Свођење тројног на троструки интеграл.

- Дефиниција тројног интеграла. Дефиниција n – димензионог интеграла
- Свођење тројног интеграла на троструки

Дефиниција тројног интеграла. Дефиниција n–димензионалног интеграла.

Нека је $f(x, y, z)$ (непрекидна) функција у затвореној просто повезаној области Ω која је на произвољан начин подељена на елементарне области $\Delta\omega_k$. Изаберимо произвољне тачке $P_k \in \Delta\omega_k$ и означимо одговарајуће вредности дате функције са $f(P_k)$, $k = 1, \ldots, n$. Ако постоји гранична вредност суме $\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta\omega_k$ када највећи пречник елементарних области $\Delta\omega_k$ такође тежи нули (тј. $n\to\infty$) тада се та гранична вредност назива тројни интеграл функције $f(x, y, z)$ по области Ω и означава се

$$\lim_{\substack{\max d(\Delta\omega_k)\to 0\\ (n\to\infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta\omega_k = \iiint_{\Omega} f(P)d\omega\cdot$$

n-димензиони интеграл

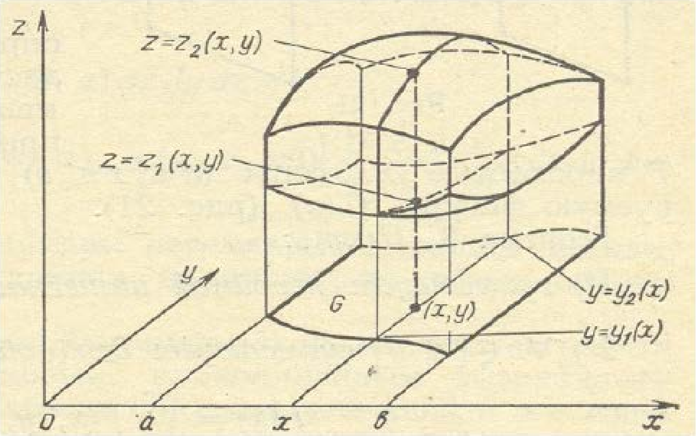
$J = \iint\limits_{W}\ldots\int f(P)dW$ (када је W просто повезана затворена n-димензиона област)

6 Свођење тројног интеграла на троструки

Нека је област интеграције T одређена са

$$T = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D,\ z_1(x, y) \leq z(x, y) \leq z_2(x, y)\},$$

где су z_1 и z_2 непрекидне функције на $D \subset R^2$.



Теорема 17 *Ако* $f \in \mathcal{R}(T)$ *и ако за свако* $(x, y) \in D$ *постоји интеграл*

$$I(x, y) = \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz,$$

тада је

$$\iiint_T f(x, y, z)dxdydz = \iint_D I(x, y)dxdy,$$

односно

$$\iiint_T f(x, y, z)dxdydz = \iint_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz.$$

Ако је D трапезоидна област, на пример,

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ y_1 \leq y \leq y_2\},$$

тада је

$$\iiint_T f(x, y, z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz.$$

Према томе, ако се двојни интеграл своди на двоструки, тада се тројни интеграл за претпостављено тело T своди на троструки интеграл. Исто важи и ако област D може да се разложи на трапезоидне области, као и ако област интеграције тројног интеграла може да се разложи на области типа претпостављене области T.

23. Смена промењљивих у двојном интегралу. Поларне координате.

- Општи случај смене у двојном интегралу
- Специјални случај смене у двојном интегралу: поларне координате

<u>Општи случај смене у двојном интегралу</u>

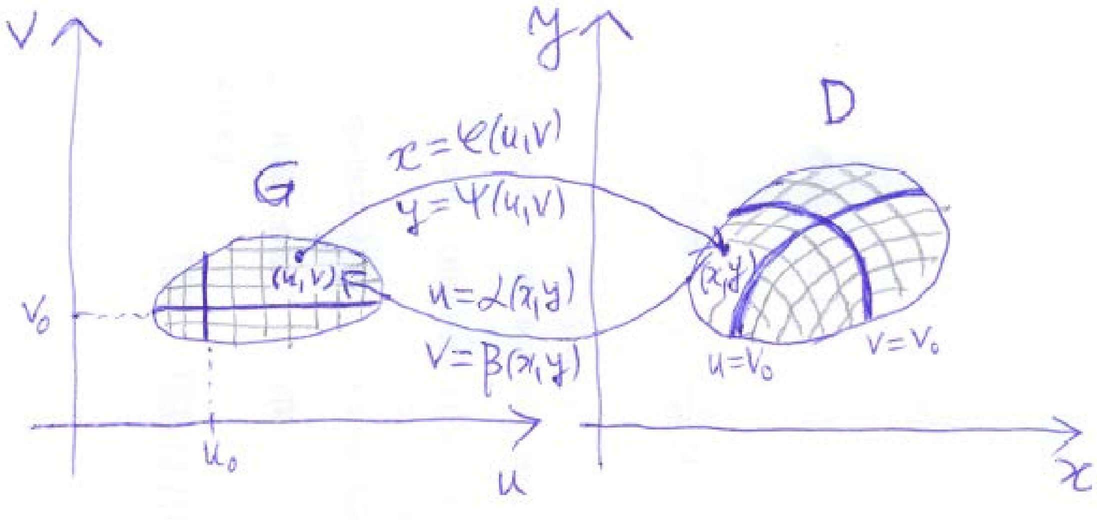
Теорема 1 *Ако* $f \in \mathcal{R}(D)$ *и ако пресликавање* $G \to D$ *испуњава услове 1.-3., тада је*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_G g(u,v)|J|dudv,$$

при чему је

$$g(u,v) = f(\varphi(u,v), \psi(u,v)).$$

Оваквом сменом се са декартових координата (x, y) прелази на нове координате (u, v) (у општем случају, криволинијске).



При томе је

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}$$

и

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}.$$

Коефицијент деформације је $|J|$, а елемент површине је дат са

$$d\sigma = dxdy = |J|dudv.$$

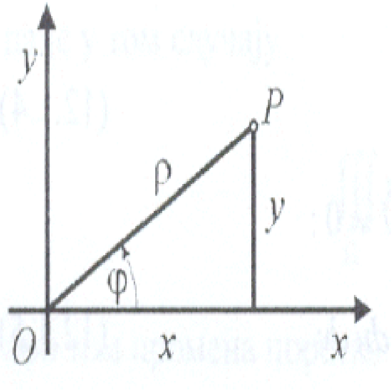
Некада је природније увести најпре смене $u = \alpha(x, y)$, $v = \beta(x, y)$, а затим из њих одредити функције φ и ψ за смене $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$. При томе, Јакобијан може да се добије и из релације

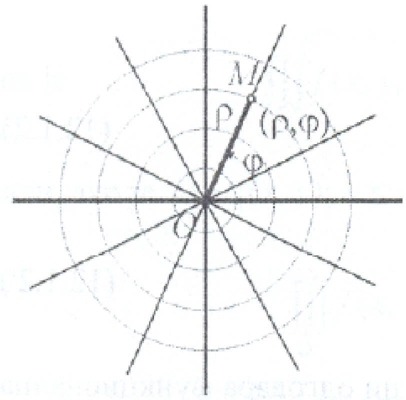
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1.$$

- **Специјални случај смене у двојном интегралу – поларне координате**

Поларне координате су (ρ, φ), при чему

$$\rho \in [0, \infty), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$





Везе декартових (x, y) и поларних координата су

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi.$$

Јакобијан је дат са

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho,$$

а коефицијент деформације је $|J|$.

Елемент површине је

$$d\sigma = \rho d\rho d\varphi.$$

Према томе,

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_G g(\rho, \varphi)\rho d\rho d\varphi,$$

при чему је

$$g(\rho, \varphi) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi).$$

24. Смена промењљивих у тројном интегралу. Цилиндричне координате.

- Општи случај смене у тројном интегралу
- Специјални случај смене у тројном интегралу: цилиндричне координате

• <u>Општи случај смене у тројном интегралу</u>

Теорема 2 *Ако* $f \in \mathcal{R}(D)$ *и ако пресликавање* $G \to D$ *испуњава услове 1.-3., тада је*

$$\iiint_D f(x,y,z) = \iiint_G g(u,v,w)|J|dudvdw,$$

при чему је

$$g(u,v,w) = f(\alpha(u,v,w), \beta(u,v,w), \gamma(u,v,w)).$$

Оваквом сменом се са декартових координата (x,y,z) прелази на нове координате (u,v,w) (у општем случају, криволинијске).

При томе је

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{bmatrix}$$

и

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}.$$

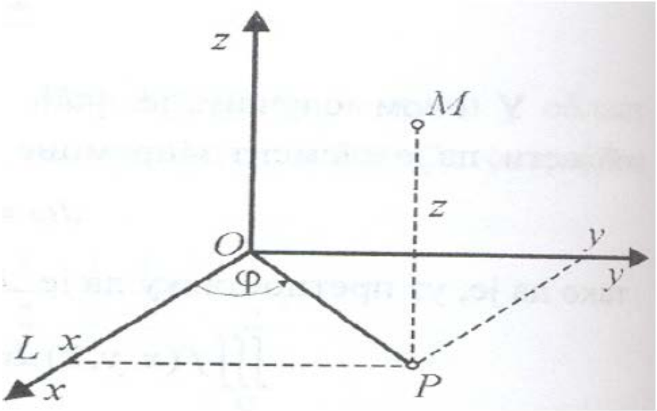
Коефицијент деформације је $|J|$, а елемент запремине је дат са

$$dV = dxdydz = |J|dudvdw.$$

- **Специјални случај смене у тројном интегралу – цилиндричне координате**

Цилиндричне координате су (ρ, φ, z), при чему

$$\rho \in [0, \infty), \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad z \in R.$$



Везе декартових (x, y, z) и цилиндричних координата су

$$x = \rho \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\varphi, \quad z = z.$$

Јакобијан је дат са

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho,$$

а коефицијент деформације је $|J|$.

Елемент запремине је

$$dV = \rho d\rho d\varphi d\theta.$$

Према томе,

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_G g(\rho, \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz,$$

при чему је

$$g(\rho, \varphi, z) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z).$$

25. Смена промењљивих у тројном интегралу. Сферне координате.

- Општи случај смене у тројном интегралу
- Специјални случај смене у тројном интегралу: сферне координате

- **Општи случај смене у тројном интегралу**

Теорема 2 *Ако* $f \in \mathcal{R}(D)$ *и ако пресликавање* $G \to D$ *испуњава услове 1.-3., тада је*

$$\iiint_D f(x,y,z) = \iiint_G g(u,v,w)|J|dudvdw,$$

при чему је

$$g(u,v,w) = f(\alpha(u,v,w), \beta(u,v,w), \gamma(u,v,w)).$$

Оваквом сменом се са декартових координата (x,y,z) прелази на нове координате (u,v,w) (у општем случају, криволинијске).

При томе је

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{bmatrix}$$

и

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}.$$

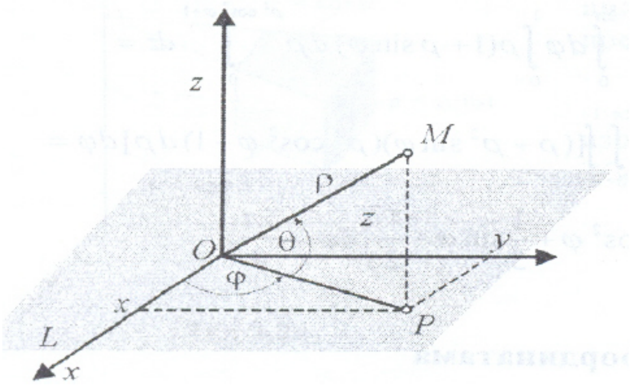
Коефицијент деформације је $|J|$, а елемент запремине је дат са

$$dV = dxdydz = |J|dudvdw.$$

- **Специјални случај смене у тројном интегралу – сферне координате**

Сферне координате су (ρ, φ, θ), пру чему

$$\rho \in [0, \infty), \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \theta \in [-\pi/2, \pi/2].$$



Везе декартових (x, y, z) и сферних координата су

$$x = \rho \cos\theta \cos\varphi, \quad y = \rho \cos\theta \sin\varphi, \quad z = \rho \sin\theta.$$

Јакобијан је дат са

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\rho\cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta & 0 & \rho\cos\theta \end{vmatrix} \\ &= \rho^2\cos\theta(\cos^2\varphi\cos^2\theta + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \sin^2\theta\cos^2\varphi + \cos^2\theta\sin^2\varphi) \\ &= \rho^2\cos\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \\ &= \rho^2\cos\theta, \end{aligned}$$

а коефицијент деформације је $|J|$.

Елемент запремине је

$$dV = dxdydz = |J|d\rho d\varphi d\theta = \rho^2\cos\theta d\rho d\varphi d\theta.$$

Према томе,

$$\iiint_D f(x, y, z)dxdydz = \iiint_G g(\rho, \varphi, \theta)\rho^2\cos\theta d\rho d\varphi d\theta,$$

при чему је

$$g(\rho, \varphi, \theta) = f(\rho\cos\theta\cos\varphi, \rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta).$$

26. Примене двојних и тројних интеграла.

- Навести могуће примене двојног интеграла
- Навести могуће примене тројног интеграла
- Извести формулу за израчунавање површине криве површи.

- **Навести могуће примене двојног интеграла**

Запремина цилиндричног тела

Запремина цилиндричног тела чија је једна основа фигура D у равни Oxy, а друга основа површ $z = f(x, y)$ дата је са

$$V = \iint_D f(x, y)dxdy.$$

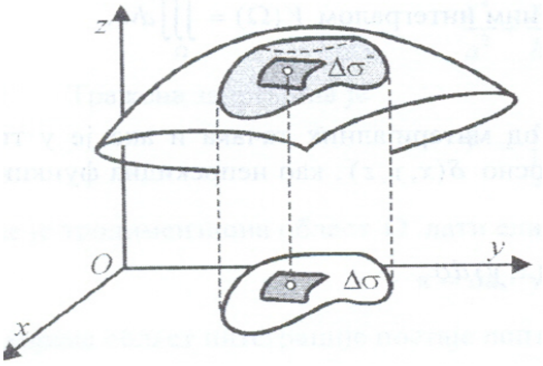
Површина раванске фигуре

Површину $\sigma(D)$ фигуре D можемо добити ако у двојном интегралу на D узмемо функцију $f(x, y) = 1$. Дакле,

$$\sigma(D) = \iint_D dxdy.$$

Површина дела површи

Нека је површ дата са $z = f(x, y)$.



Подели Π области D одговара подела Π^* дате површи над облашћу D. Ако су σ_k^* $(k = 1, 2, \ldots, n)$ површине делова поделе Π^*, тражена површина P је дата са

$$P = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^*,$$

под условом да све наведене површине постоје. Међутим, површине σ_k^* није могуће у општем случају одредити, нити утврдити да ли постоје. Уместо њих можемо узети површине P_k одговарајућих делова тангентних равни у изабраним тачкама делова површи.

Претпоставимо да је дата подела (Π, M_i) области D и да је P_i површина дела тангентне равни у тачки M_i над делом D_i. Нека је

$$P(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} P_i.$$

- **<u>Навести могуће примене тројниг интеграла</u>**

Ако је $f(x, y, z) = 1$ на телу T, тада је $S_n(f, \Pi) = \sigma(T)$ за сваку поделу Π. Према томе, запремина V мерљивог тела T је дата са

$$V = \iiint_T dxdydz.$$

Ако се области D и Ω састоје од материјалних тачака и ако је у тим областима дефинисана густина $\delta(x, y)$, односно $\delta(x, y, z)$, као непрекидна функција координата тачке, тада је **маса** области D

$$M(D) = \iint\limits_D \delta(x, y)\, d\delta’$$

а **маса** области Ω $$M(\Omega) = \iiint\limits_\Omega \delta(x, y, z)\, dw\cdot$$

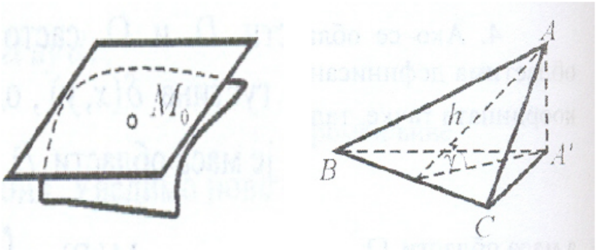
Извести формулу за израчунавање површине криве површи

Теорема 3 *Ако $z'_x, z'_y \in C(D)$, тада површина дела површи над D постоји и дата је са*

$$P = \iint_D \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} dxdy.$$

Доказ. Једначина тангенте у $M_i(x_i, y_i, z_i)$ је

$$z - z_i = z'_x(M_i)(x - x_i) + z'_y(M_1)(y - y_i).$$



Како је угао γ између тангентне равни и равни xOy једнак углу између нормале тангентне равни и z осе и како је

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2_x(M_i) + z'^2_y(M_i)}},$$

то је

$$P_i = \frac{\sigma_i}{\cos\gamma} = \sqrt{1 + z'^2_x(M_i) + z'^2_y(M_i)}\,\sigma_i.$$

Збир $P(\Pi)$ је интегрална сума двојног интеграла за функцију

$$g = \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}$$

на области D. Из претпоставке теореме следи да је g непрекидна на D, па интегрална сума конвергира интегралу. Према томе,

$$P = \lim_{\lambda(\Pi)\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(M_i)\sigma_i = \iint_D g(x, y)dxdy = \iint_D \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} dxdy. \quad \blacksquare$$

27. Појам бесконачног бројног реда. Конвергенција реда.

- Дефинисати низ парцијалних сума
- Дефинисати бројни ред и конвергенцију реда
- Доказати да је неопходни услов за конвергенцију реда да општи члан тежи нули кад $n \to \infty$

- **Дефинисати низ парцијалних сума**
- Низом делимичних сума реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ назива се низ $\{s_n\}$ чији је општи члан

  $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $n = 1, 2, 3, \ldots$; s_n је (делимична) парцијална сума тог реда.

- **Дефинисати бројни ред и конвергенцију реда**

Израз облика $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ или $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називамо бесконачним бројним редом;

a_1, a_2, a_3, ... су чланови бесконачног реда; a_n је општи члан тог реда.

Бесконачни ред $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ назива се конвергентним (дивергентним) ако конвергира (дивергира) низ његових делимичних сума $\{s_n\}$. Сума конвергентног реда је број

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot$$

Ако је ред $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ конвергентан и има суму s, тада се пише $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

- **Доказати да је неопходни услов за конвергенцију реда да општи члан тежи нули када n →∞**

Теорема. Ако је ред $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ конвергентан, тада његов општи члан $a_n \to 0$ кад $n \to \infty$.

Доказ. Ако ред конвергира, конвергира и његов низ делимичних сума, $\lim_{n\to\infty} s_n = s$,

па је $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = s - s = 0 \cdot$

28. Редови са ненегативним члановима. Критеријуми упоређивања.

- Услов за конвергенцију реда са ненегативним члановима, изражен преко низа делимичних сума
- Навести критеријуме упоређивање прве и друге врсте
- Доказати да је неопходни услов за конвергенцију реда да општи члан тежи нули кад $n \to \infty$

- **Услов за конвергенцију реда са ненегативним члановима, изражен преко низа делимичних сума**

Теорема 4 *Нека су* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *редови са ненегативним члановима и нека је* $a_n \leq b_n$ *за* $n \geq n_0$.

1. *Ако ред* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *конвергира, тада и ред* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *конвергира.*
2. *Ако ред* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *дивергира, тада и ред* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *дивергира.*

- **Навести критеријуме упоређивања прве и друге врсте**

Теорема 1. (Критеријум упоређивања прве врсте) Нека је ред $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ конвергентан, а ред $\sum_{k=0}^{\infty} d_k$ дивергентан и нека су оба, редови са позитивним члановима. Ако чланови неког датог реда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ са позитивним члановима задовољавају услов $a_n \leq c_n$, за све $n > m$ $(m \in N)$, тада је ред $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ конвергентан. Ако $a_n \geq d_n$ за све $n > m$ $(m \in N)$, тада је ред $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ дивергентан.

Теорема 2. (Критеријум упоређивања друге врсте) Нека је ред $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ конвергентан, а ред $\sum_{k=0}^{\infty} d_k$ дивергентан и нека су оба, редови са позитивним члановима. Ако за чланове реда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ с позитивним члановима за $\forall n \geq m$ $(m \in N)$, важи $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{c_{n+1}}{c_n}$, тада је ред $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ конвергентан; ако је за $\forall n \geq m$ $(m \in N)$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{d_{n+1}}{d_n}$, тада је ред $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ дивергентан.

- **Доказати да је неопходни услов за конвергенцију реда да општи члан тежи нули када n →∞**

Теорема. Ако је ред $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ конвергентан, тада његов општи члан $a_n \to 0$ кад $n \to \infty$.

Доказ. Ако ред конвергира, конвергира и његов низ делимичних сума, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, па је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = s - s = 0\cdot$

29. Алтернативни редови. Лајбницов критеријум конвергенције реда.

- Дефинисати алтернативни ред и формулисати Лајбницов критеријум конвергенције
- Доказати Лајбницов критеријум конвергенције
- Дефинисати апсолутну и условну конвергенцију

- **Дефиницати алтернативни ред и формулисати Лајбницов критеријум конвергенције**

Алтернативним редовима се називају редови облика

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k, \quad a_k > 0, \quad \forall k \in N'$$

где је $\{a_k\}$ монотоно опадајући низ позитивних бројева.

Алтернативни ред $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots$,у којем чланови $a_k > 0$ монотоно опадају ($a_k > a_{k+1}$, $\forall k = 0, 1, 2, \ldots$) и теже нули, назива се Лајбницовим редом.

Теорема. (Лајбницов критеријум) Лајбницов ред конвергира и његова сума $s < a_0$.

- **Доказати Лајбницов критеријум конвергенције**

Доказ. За Лајбницов ред, делимична сума са непарним индексом $2n + 1$ је једнака

$$s_{2n+1} = a_0 - (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) - \ldots - (a_{2n-1} - a_{2n}) - a_{2n+1},$$

што значи да је је $s_{2n+1} < a_0, \;\; n \in N$. С друге стране,

$$s_{2n+1} = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_{2n} - a_{2n+1}),$$

из чега следи да монотоно неопада. Зато постоји гранична вредност, за коју важи

$$a_0 - a_1 < \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = s < a_0 \cdot$$

За парне чланове низа делимичних сума важи

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty}(s_{2n+1} - a_{2n+1}) = s$$

чиме је доказан Лајбницов критеријум конвергенције.

- **Дефинисати апсолутну и условну конвергенцију**

За конвергентан ред $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ кажемо да је апсолутно конвергентан, ако конвергира и ред $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$. У супротном, када ред $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ дивергира, за конвергентан ред $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ кажемо да условно конвергира.

30. Интегрални критеријум конвергенције бројног реда.

- Формулисати интегрални критеријум конвергенције бројног ред
- Доказати интегрални критеријум конвергенције бројног ред

- **Формулсати интегрални критеријум конвергенције бројног реда**

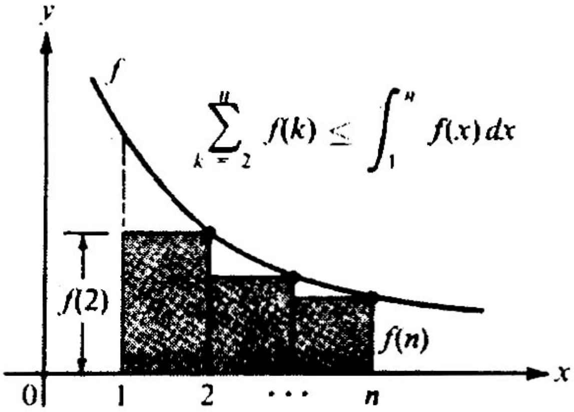
Теорема. Ако је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дати ред са позитивним монотоно опадајућим члановима, а $f(x)$ за $x \geq 1$ непрекидна позитивна монотоно опадајућа функција таква да је $\forall n, f(n) = a_n$, тада ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира ако и само ако несвојствени интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ постоји (конвергира).

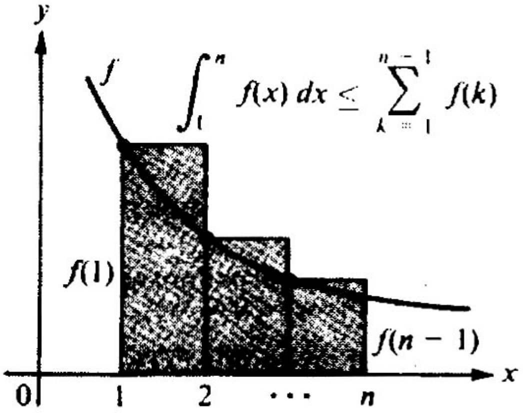
Ако интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ не постоји, тада је ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергентан.

- **Доказати интегрални критеријум конвергенције бројног реда**

Доказ. Како је *f*(*x*) опадајућа функција, важи

$$f(2)+f(3)+\ldots+f(n)\le\int\limits_{1}^{n}f(x)dx\le f(1)+f(2)+\ldots+f(n-1)\cdot$$





Ако интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}f(x)dx$ постоји, означимо га са *J*. Тада је $\int\limits_{1}^{n}f(x)dx\le J$, па ред $\sum\limits_{n=2}^{\infty}f(n)$ има ограничне делимичне суме и према томе, конвергира, из чега следи конвергенција реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$. Обрнуто, ако је ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ конвергентан и има суму *s*, тада је $\int\limits_{1}^{n}f(x)dx\le s$, па конвергира интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}f(x)dx\cdot$