Д. Ђорић Р. Лазовић Ђ. Јованов

МАТЕМАТИКА 2

Збирка задатака и примери колоквијума

РЕШЕЊА ОДАБРАНИХ ЗАДАТАКА

Драган Ђорић

Први део (68 задатака), 20.3.2011.

Садржај

З А Д А Ц И

1 Граничне вредности

$f(x,y) \to A$ када $(x,y) \to (x_0, y_0)$ ако

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) \ d((x,y),(x_0,y_0)) < \delta \implies |f(x,y) - A| < \varepsilon$

$M_n = (x_n, y_n) \to M_0 = (x_0, y_0)$ ако $d(M_n, M_0) \to 0$ када $n \to \infty$

Теорема

$f(x,y) \to A$ када $(x,y) \to (x_0, y_0)$ акко

$\forall (M_n) \ M_n \to M_0 \implies f(M_n) \to A \ (n \to \infty)$

1.1. [Зад.3, стр.13]

Доказати да $(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} \to 0$ када $(x,y) \to (0,0)$.

Гранична вредност у бесконачности

$f(x,y) \to A$ када $(x,y) \to (\infty, \infty)$ $[f(M) \to A$ када $M \to \infty]$

ако

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists C > 0 \ d((x,y),(0,0)) > C \implies |f(x,y) - A| < \varepsilon$

$M_n \to \infty$ када $n \to \infty$ ако $d(M_n, (0,0)) \to +\infty$

Теорема

$f(x,y) \to A$ када $(x,y) \to (\infty, \infty)$

акко

$f(M_n) \to A$ када $M_n \to \infty$

1.2. [Зад.6, стр.13]

Доказати да је $\lim\limits_{x\to\infty, y\to\infty} \dfrac{x + 2x^2 + y + 2y^2}{x^2 + y^2} = 2$.

Поларне координате

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi), \quad \rho \in [0, +\infty)$$

- $$(x,y) \to (0,0) \iff \rho \to 0$$

$$(x,y) \to (\infty,\infty) \iff \rho \to +\infty$$

- $$f(x,y)=g(\rho,\varphi)\to 0,\ \ \rho\to 0 \Longrightarrow f(x,y)\to 0,\ \ (x,y)\to(0,0)$$
$$|f(x,y)|\le g(\rho,\varphi)\to 0,\ \ \rho\to 0 \Longrightarrow f(x,y)\to 0,\ \ (x,y)\to(0,0)$$
$$|f(x,y)|\le K\cdot g(\rho)\to 0,\ \ \rho\to 0 \Longrightarrow f(x,y)\to 0,\ \ (x,y)\to(0,0)$$
$$|f(x,y)|\le g(\rho,\varphi)\to 0,\ \ \rho\to +\infty \Longrightarrow f(x,y)\to 0,\ \ (x,y)\to(\infty,\infty)$$

1.3. [Зад.40, стр.16]

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=?$$

1.4. [Зад.41, стр.16]

$$\lim_{x,y\to\infty}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}=?$$

1.5. [Зад.54, стр.17]

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y^2}=?$$

Свођење на познате лимесе

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$

....

1.6. [Зад.62, стр.18]

$$\lim_{(x,y)\to(0,3)}(1+xy^2)^{1/(x^2+xy)}=?$$

1.7. [Зад.52, стр.17]

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos xy}{x^2y^2}=?$$

2 Непрекидност

Функција f је непрекидна у тачки (a,b) ако је

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)=f(a,b)$$

Ако је

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \neq f(a,b)$$

или не постоји гранична вредност функције f у тачки (a,b), тада f у (a,b) има прекид.

Ако функција f има коначну граничну вредност у (a,b), а није у тој тачки непрекидна, онда тај прекид може да се отклони.

2.1. [Зад.2, стр.19]

Доказати да је функција $f:(x,y)\mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{|x|+|y|}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ непрекидна у тачки $(0,0)$.

2.2. [Зад.4, стр.19]

Доказати да је функција $f:(x,y)\mapsto \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ непрекидна у тачки $(0,0)$.

2.3. [Зад.6, стр.19]

Доказати да је функција $f:(x,y)\mapsto \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^4+y^4}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ непрекидна у тачки $(0,0)$.

2.4. [Зад.28, стр.21]

Доказати да функција $f:(x.y)\mapsto \dfrac{\sin x+\sin y}{x+y}$ има отклоњиве прекиде.

2.5. [Зад.34, стр.21]

Доказати да функција $f:(x,y)\mapsto \dfrac{x^2}{x^2+y^2-x}$ у тачки $(0,0)$ има неотклоњив прекид.

2.6. [Зад.37, стр.21]

Доказати да функција $f:(x,y)\mapsto \dfrac{xy}{x+y}$ у тачки $(0,0)$ има неотклоњив прекид.

3 Парцијални изводи

$$f'_x(x,y) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta_x f(x,y)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

$$f'_x(x,y) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta_x f(x,y)}{\Delta x} = \frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

Специјално,

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}, \quad f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}$$

$$f'_x(x,y,z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f(x,y,z)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z)}{\Delta x}$$

3.1. [Зад.24, стр.25]

Доказати да функција $f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ има парцијалне изводе у тачки $(0,0)$

3.2. [Зад.25, стр.25]

Доказати да функција $f : (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$ нема парцијалне изводе у $(0,0)$

3.3. [Није из Збирке]

Одредити f'_x и fy за функцију $f : (x,y) \mapsto xy^2 e^{x^2+y^4}$

3.4. [Зад.11, стр.24]

Одредити f'_x и fy за функцију $f : (x,y) \mapsto \arctan \dfrac{y}{x}$.

3.5. [Зад.18, стр.24]

Одредити f'_x, fy и f'_z за функцију $f : (x,y,z) \mapsto x^{y^z}$.

3.6. [Зад.34, стр.26]

Доказати да за функцију $f : (x,y) \mapsto xy + g\left(\dfrac{x}{y}\right)$, где је g диференцијабилна функција, важи

$$xf'_x + yf'_y = 2xy$$

3.7. [Зад.30, стр.25]

Доказати да за функцију $f : (x,y) \mapsto x^y y^x$ важи

$$xf'_x + yf'_y = f(x + y + \ln f)$$

4 Диференцијабилност

Функција f (две промењиве) је диференцијабилна у тачки (x,y) ако је

$$\Delta f(x,y) = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y + \alpha\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)$$

када $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

Теорема. Ако су f_x и f_y непрекидне функције у тачки (x,y), тада је f диференцијабилна у тачки (x,y).

4.1. [Зад.43, стр.27]

Испитати да ли је $f:(x,y)\mapsto\sqrt{|xy|}$ диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

4.2. [Зад.46, стр.27]

Испитати да ли је $f:(x,y)\mapsto\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ диференцијабилна у тачки 1) $(x,y)\neq(0,0)$ 2) $(0,0)$.

Диференцијал

$$df(x,y)=f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y=f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy$$

$$df(x,y,z)=f'_x(x,y,z)dx+f'_y(x,y,z)dy+f'_z(x,y,z)dz$$

$$d(uv)=du+dv,\quad d(uv)=vdu+udv,\quad du^n=nu^{n-1}du,\ \ldots$$

$$\Delta f\approx df,\quad f(\Delta x,\Delta y)\approx f(0,0)+df(0,0)$$

4.3. [Зад.49, стр.28]

Одредити df за функцију $f:(x,y)\mapsto(x^2+y^2)^3$.

4.4. [Зад.55, стр.28]

Одредити df за функцију $f:(x,y)\mapsto\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

4.5. [Зад.63, стр.28]

Израчунати приближну вредност израза $\sqrt{1.02^3+1.97^3}$ користећи диференцијал.

5 Изводи имплицитне функције

Ако је функција $x\mapsto y$ дата имплицитно са $F(x,y)=0$, тада је

$$F'_x+F'_y\cdot y'=0,\quad y'=-\frac{F'_x}{F'_y}$$

Ако је функција $(x,y)\mapsto z$ дата имплицитно са $F(x,y,z)=0$, тада је

$$F'_x+F'_z\cdot z'_x=0,\quad z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}$$

$$F'_y+F'_z\cdot z'_y=0,\quad z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}$$

5.1. [Зад.66, стр.29]

Одредити y' ако је $x \mapsto y$ дато са $x^2 \ln y - y^2 \ln x = 0$.

5.2. [Зад.70, стр.29]

Израчунати $f'_x(0,1)$ и $f'_y(0,1)$ ако је $f : (x,y) \mapsto z$ дефинисана једнакошћу

$$\underbrace{z^2 x - x^2 y + y^2 z + 2x - y}_{F(x,y,z)} = 0$$

5.3. [Зад.76, стр.29]

Ако је G диференцијабилна функција, доказати да за функцију $(x,y) \mapsto z$ дефинисану са

$$x = zG\left(\frac{y}{z}\right)$$

важи $zz'_x + yz'_y = z$.

5.4. [Зад.2, стр.68 (Пр.10 - за СР)]

Упростити израз $(y-x)z'_x + (x-z)z'_y$ за функцију $(x,y) \mapsto z$ дату имплицитно са

$$G(x+y+z, 2xz+y^2) = 0,$$

где је G диференцијабилна функција.

5.5. [Зад.80, стр.30]

За функције $(x,y) \mapsto u$ и $(x,y) \mapsto v$ дефинисане системом

$$xy + uv = 1, \quad xv - yu = 3$$

одредити диференцијал у тачки $(1,-1)$ ако је $u(1,-1) = 1$ и $v(1,-1) = 2$.

6 Извод у смеру датог вектора

$$f'_{\vec{l}}(a,b) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tl_x, b+tl_y) - f(a,b)}{t}, \quad l = (l_x, l_y)$$

Теорема. Ако је f диференцијабилна у тачки (a,b), тада је

$$f'_{\vec{l}}(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot l,$$

где је $\nabla f(a,b) = (f'_x(a,b), f'_y(a,b))$

6.1. [Зад.86, стр.31]

За функцију $f : (x,y) \mapsto \sqrt{|x^2 - y^2|}$ одредити правце у којима постоји извод у тачки $(0,0)$.

6.2. [Зад.88, стр.32]

Доказати да функција $f : (x,y) \mapsto \sqrt[3]{x^2 y}$ има извод у сваком правцу у тачки $(0,0)$ и да у тој тачки није диференцијабилна.

6.3. [Зад.81, стр.31]

За функцију $f(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 3xy + y - 1$ и тачке $A(1, -1)$ и $B(2, 1)$ израчунати извод у тачки A у смеру вектора AB.

7 Тангентна раван и нормала површи

За површ дефинисану са $F(x, y, z) = 0$ једначина тангентне равни у тачки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ је

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0$$

Једначина нормале на површ у тачки M_0 је

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}$$

7.1. [Зад.96, стр.32]

Одредити једначине тангентне равни и нормале у тачки $M(1, 2, 2)$ на површ дефинисану са

$$xy^2 + z^3 = 12.$$

8 Парцијални изводи вишег реда

$f(x, y): \quad f''_{x^2},\ f''_{xy},\ f''_{yx},\ f''_{y^2},\ \ldots$

$f(x, y, z): \quad f''_{x^2},\ f''_{xy},\ f''_{xz},\ f''_{yx},\ f''_{y^2},\ \ldots$

По дефиницији је

$$f''_{xy}(x, y) = (f'_x)'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f'_x(x + \Delta x, y + \Delta y) - f'_x(x, y)}{\Delta y}$$

Теорема. Ако су f''_{xy} и f''_{yx} непрекидни у тачки (x, y), тада је

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

8.1. [Зад.2, стр.34]

Одредити парцијалне изводе другог реда за функцију $f : (x, y) \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

8.2. [Зад.6, стр.34]

Одредити парцијалне изводе другог реда за функцију $f : (x, y) \mapsto \arctan \dfrac{x + y}{1 - xy}$.

8.3. [Није из Збирке]

Испитати да ли постоји $f''_{xy}(0,0)$ за функцију

$$f:(x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y(\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Диференцијал вишег реда

$$d^2f(x,y)=f''_{x^2}dx^2+2f''_{xy}dxdy+f''_{y^2}dy^2=[dx\ dy]\begin{bmatrix}f''_{x^2} & f''_{xy}\\ f''_{yx} & f''_{y^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}dx\\ dy\end{bmatrix}$$

$$d^3f(x,y)=f'''_{x^3}dx^3+3f'''_{x^2y}dx^2dy+3f'''_{xy^2}dxdy^2+f'''_{y^3}dy^3$$

$$d^2f(x,y,z)=f''_{x^2}dx^2+f''_{y^2}dy^2+f''_{z^2}dz^2+2f''_{xy}dxdy+2f''_{xz}dxdz+2f''_{yz}dydz$$

8.4. [Зад.21, стр.35]

Одредити d^2f и d^3f за функцију $f:(x,y)\mapsto x^3y^3-2x^2y+3xy^2$.

9 Тејлоров полином

$$\Delta f(a,b)=df(a,b)+\frac{1}{2}d^2f(a,b)+\cdots\frac{1}{n!}d^nf(a,b)+R_n$$

$$f(\underbrace{a+\Delta x}_{x},\underbrace{b+\Delta y}_{y})\approx\underbrace{f(a,b)+df(a,b)+\frac{1}{2}d^2f(a,b)+\cdots\frac{1}{n!}d^nf(a,b)}_{T_n(x,y)}$$

$$\Delta x=dx=x-a=h,\quad \Delta y=dy=y-b=k$$

$$T_2(x,y)=f(a,b)+df(a,b)+\frac{1}{2}d^2f(a,b)$$

$$T_2(x,y)=f(a,b)+f'_x(a,b)(x-a)+f'_y(a,b)(y-b)+$$
$$\frac{1}{2}(f''_{x^2}(a,b)(x-a)^2+2f''_{xy}(a,b)(x-a)(y-b)+f''_{y^2}(a,b)(y-b)^2)$$

$(a,b)=(0,0)$ - Маклоренов полином

9.1. [Зад.27, стр.36]

Одредити Тејлоров полином другог степена који апрпксимира функцију $f:(x,y)\mapsto x^y$ у околини тачке $A(1,1)$.

9.2. [Зад.30, стр.36]

Одредити Маклоренов полином другог степена за функцију $f:(x,y)\mapsto\arctan\dfrac{1+x+y}{1-x+y}$.

9.3. [Зад.31, стр.36]

Одредити Маклоренов полином четвртог степена за функцију $f:(x,y)\mapsto\sqrt{1-x^2-y^2}$.

9.4. [Зад.32, стр.36]

Одредити Теклоров полином другог степена у околини тачке $A(-1,0)$ за функцију $f:(x,y)\mapsto z$ дефинисану имплицитно са

$$x^2+y^2-z^2-xyz=0,\quad z>0$$

10 Локални екстремуми

$f:X\to R,\ X\subset R^n,\ X$-отворен скуп, $a\in X$

Функција f у тачки a има строги локални $\begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}$ ако постоји $\overset{\circ}{U}(a)$ таква да важи $\begin{matrix}f(x)>f(a)\\ f(x)<f(a)\end{matrix}$ за свако $x\in\overset{\circ}{U}(a)$

10.1. [Зад.28, стр.39]

Да ли функција $f:(x,y)\mapsto x^3+y^3-3xy$ има у $(0,0)$ локални екстремум?

10.2. [Зад.30, стр.39]

Да ли функција $f:(x,y)\mapsto 2x^2-3xy^2+y^4$ има у $(0,0)$ локални екстремум?

Потребан услов за ЛЕ

Нека f у a има ЛЕ

- $\exists f'_{x_i}(a)\implies f'_{x_i}(a)=0$
- $\exists\nabla f(a)\implies\nabla f(a)=0$
- f-диф. у $a\implies df(a)=0$ (за све $dx_1,\dots,dx_n$)

Стационарна тачка - тачка x у којој је $\nabla f(x)=0$ или $f'_{x_i}(x)=0$

Критична тачка - стационарна тачка или тачка у којој не постоји градијент

10.3. [Није из Збирке]

Да ли функција $f:(x,y)\mapsto x^2-y^2$ има локалних екстремума?

10.4. [Није из Збирке]

Да ли функција $f:(x,y)\mapsto|x|+y^2$ има локалних екстремума?

Довољан услов за ЛЕ

Нека је a стационарна тачка функције f

- $d^2f(a) > 0$ за $\sum dx_i^2 \neq 0 \implies f$ у тачки a има минимум
- $d^2f(a) < 0$ за $\sum dx_i^2 \neq 0 \implies f$ у тачки a има максимум
- $d^2f(a)$ за $\sum dx_i^2 \neq 0$ мења знак $\implies f$ у тачки a нема ЛЕ
- У осталим случајевима f у тачки a може (али и не мора) да има ЛЕ. На пример,

1. $f(x,y) = x^4 + y^4$, $d^2f(0,0) = 0$, f у $(0,0)$ има локални минимум
2. $g(x,y) = x^3 + y^3$, $d^2g(0,0) = 0$, g у $(0,0)$ нема ЛЕ
3. $u(x,y) = x^2 + y^4$, $d^2u(0,0) = 2dx^2 \geq 0$, u у $(0,0)$ има локални минимум
4. $v(x,y) = x^2 - y^4$, $d^2v(0,0) = 2dx^2 \geq 0$, v у $(0,0)$ нема ЛЕ

10.5. [Зад.4, стр.38]

Одредити све ЛЕ функције $f(x,y) \mapsto x^3 - 2y^3 - 3x + 6y$

Силвестеров критеријум, $n = 2$

Нека је (x_0, y_0) стационарна тачка функције f и нека је

$$a = f''_{x^2}(x_0,y_0), \quad b = f''_{xy}(x_0,y_0), \quad c = f''_{y^2}(x_0,y_0)$$

$$ac - b^2 \begin{cases} > 0 & \Rightarrow f \text{ има ЛЕ } \begin{cases} a > 0 & \min \\ a < 0 & \max \end{cases} \\ < 0 & \Rightarrow f \text{ нема ЛЕ} \\ = 0 & ? \end{cases}$$

10.6. [Зад.15, стр.38]

Одредити све ЛЕ функције $f(x,y) \mapsto e^{-x^2-y^2}(x^2 + 2y^2)$

10.7. [Зад.35, стр.39]

Одредити све ЛЕ функције $f : (x,y) \mapsto z$ задате са

$$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0$$

Силвестеров критеријум, $n = 3$

Нека је $A(x_0, y_0, z_0)$ стационарна тачка функције f и нека су m_1, m_2, m_3 главни минори матрице

$$M = \begin{bmatrix} f''_{x^2}(A) & f''_{xy}(A) & f''_{xz}(A) \\ f''_{yx}(A) & f''_{y^2}(A) & f''_{yz}(A) \\ f''_{zx}(A) & f''_{zy}(A) & f''_{z^2}(A) \end{bmatrix}$$

Тада важи

1. $d^2f(A) > 0 \iff m_1 > 0,\ m_2 > 0,\ m_3 > 0$

2. $d^2f(A) < 0 \iff m_1 < 0,\ m_2 > 0,\ m_3 < 0$

3. $d^2f(A)$ мења знак $\iff m_2 < 0$

Према томе,

- $m_1 > 0,\ m_2 > 0,\ m_3 > 0 \implies f$ у тачки A има локални минимум
- $m_1 < 0,\ m_2 > 0,\ m_3 < 0 \implies f$ у тачки A има локални максимум
- $m_2 < 0 \implies f$ у тачки A нема ЛЕ
- у осталим случајевима постојање ЛЕ у тачки A треба проверити на основу дефиниције

10.8. [Зад.39, стр.40]

Одредити све ЛЕ функције

$$f : (x, y, z) \mapsto 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2$$

10.9. [Није из Збирке]

Одредити све ЛЕ функције

$$f : (x, y, z) \mapsto xyz + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

10.10. [Није из Збирке]

Одредити све ЛЕ функције

$$f : (x, y, z) \mapsto xyz(4 - x - y - z)$$

11 Условни екстремуми

$D \subset R^2,\ M(a, b) \in D,\ f, \varphi : D \to R$

Теорема. Ако функција f у тачки M има локални екстремум при услову $\varphi(x, y) = 0$ и ако је $\nabla\varphi(M) \neq 0$, тада постоји $\lambda \in R$ за које важи

$$\begin{aligned} f'_x(a,b) + \lambda\varphi'_x(a,b) &= 0 \\ f'_y(a,b) + \lambda\varphi'_y(a,b) &= 0 \\ \varphi(a,b) &= 0 \end{aligned}$$

Лагранжова функција
$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$$

СТ за F дају СТ за f при $\varphi = 0$

Може ли помоћу F да се одреди довољан услов за ЛУЕ за f при $\varphi = 0$ у СТ?

ЛЕ за F при $d\varphi = 0$ даје ЛУЕ за f при $\varphi = 0$

При $d\varphi = 0$, односно $\varphi'_y dy = -\varphi'_x dx$ је
$$d^2F(x,y,\lambda) = F''_{x^2}(x,y,\lambda)dx^2 + 2F''_{xy}(x,y,\lambda)dxdy + F''_{y^2}(x,y,\lambda)dy^2$$
јер је $F''_{\lambda^2} = 0$ и $2\varphi'_x dxd\lambda + 2\varphi'_y dyd\lambda = 0$

11.1. [Зад.49, стр.40]

$f(x,y) = xy, \; x^2 + y^2 = 2$

11.2. [Није из Збирке (Колоквијум, 2007)]

$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy, \quad \varphi(x,y) = 3x^2 + y^2 - 12$

ЛУЕ - три променљиве

Функција $f(x,y,z)$

Услов $\varphi(x,y,z) = 0$

Лагранжова функција
$$F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda\varphi(x,y,z)$$

За довољан услов у СТ
$$d^2F(x,y,z,\lambda) = F''_{x^2}dx^2 + F''_{y^2}dy^2 + F''_{z^2}dz^2 + 2F''_{xy}dxdy + 2F''_{xz}dxdz + 2F''_{yz}dydz$$

уз $d\varphi(x,y,z) = 0$

11.3. [Зад.61, стр.41]

$f(x,y,z) = 3x^2 + 3y^2 + z^2, \; x + y + z = 1$

11.4. [Није из Збирке]

$f(x,y,z) = x + z, \; x^2 + y^2 + z^2 = 1$

11.5. [Зад.59, стр.41]

$f(x,y,z) = 2x + y - 2z, \; x^2 + y^2 + z^2 = 36$

11.6. [Зад.63, стр.41]

$f(x,y,z) = x + y + z, \; \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$

11.7. [Зад.62, стр.41]

$f(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz,\ \ xyz = 4$

11.8. [Зад.65, стр.41]

$f(x,y,z) = xyz,\ x^2 + y^2 + z^2 = 3$

ЛУЕ - три промењиве, два услова

Функција $f(x,y,z)$

Услови $\varphi(x,y,z) = 0,\ \psi(x,y,z) = 0$

Лагранжова функција

$$F(x,y,z,\alpha,\beta) = f(x,y,z) + \alpha\varphi(x,y,z) + \beta\psi(x,y,z)$$

За довољан услов у СТ

$$d^2F(x,y,z,\alpha,\beta) = F''_{x^2}dx^2 + F''_{y^2}dy^2 + F''_{z^2}dz^2 + 2F''_{xy}dxdy + 2F''_{xz}dxdz + 2F''_{yz}dydz$$

уз $d\varphi(x,y,z) = 0$ и $d\psi(x,y,z) = 0$

11.9. [Није из Збирке]

$f(x,y,z) = x + 2y + z,\ \ 2x^2 + y^2 - z^2 = 2,\ \ y^2 + z^2 = 2$

11.10. [Није из Збирке]

Испитати да ли функција $f(x,y,z) \mapsto xy + yz$ има у тачки $A(1,1,1)$ локални условни екстремум при условима $x^2 + y^2 = 2$ и $y + z = 2$.

12 Апсолутни екстремуми на области

• Непрекидна функција на компактном скупу достиже и минимум и максимум (апсолутни)

Како одредити те екстремне вредности и тачке у којима се оне достижу?

• Поступак се састоји у одређивању свих критичних тачака на датом скупу и упоређивања вредности функције у тим тачкама

• У критичне тачке спадају критичне тачке из унутрашњости дате области и критичне тачке са границе дате области

12.1. [Зад.81, стр.42]

$f(x,y) = x^2 - y^2,\ \mathcal{D} = \{(x,y)\ :\ x^2 + y^2 \leq 4\}$

12.2. [Није из Збирке]

$f : (x,y) \mapsto e^{-x^2-y^2}(2x^2 + 3y^2),\ \ D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

12.3. [Није из Збирке]

$$f(x,y) = xy - x^2y - \frac{1}{2}xy^2,\ \mathcal{D} = \{(x,y)\ :\ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$$

12.4. [Није из Збирке]

$$f(x,y) = x^2 - xy + y^2,\ \mathcal{D} = \{(x,y)\ ;\ |x| + |y| \leq 1\}$$

12.5. [Зад.84, стр.42]

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x,\ \mathcal{D} = \{(x,y)\ :\ x - 4 \leq -|y-1|,\ x \geq 0\}$$

12.6. [Није из Збирке]

$$f(x,y) = \sin x + \sin y - \sin(x+y),\ \mathcal{D} = \{(x,y)\ :\ x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2\pi\}$$

Р Е Ш Е Њ А

1.1. *Прво решење.*

$|f(x,y)-0| = |(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}| \le |x+y| \le |x|+|y| \le 2\delta = \varepsilon$

Друго решење.

Ако $(x_n,y_n)\to(0,0)$ када $n\to\infty$, онда

$|f(x_n,y_n)| = \left|(x_n+y_n)\sin\frac{1}{x_n}\sin\frac{1}{y_n}\right| \le |x_n+y_n| \le |x_n+|y_n| \to 0$

$|f(x_n,y_n)|\to 0 \Longrightarrow f(x_n,y_n)\to 0$ када $n\to\infty$

1.2. За $\varepsilon>0$ узмимо $C(\varepsilon)=\frac{2}{\varepsilon}$.

Ако је $d((x,y),(0,0))>C$, тада је

$$|f(x,y)-2| = \frac{|x+y|}{x^2+y^2} \le \frac{|x|}{x^2+y^2}+\frac{|y|}{x^2+y^2} \le \frac{2}{d((x,y),(0,0))} < \frac{2}{C} = \varepsilon.$$

1.3.

$$f(x,y)=\frac{\rho^2\cos^2\varphi\cdot\rho\sin\varphi}{\rho^2}=\rho\cdot h(\varphi)$$

Како је $|h(\varphi)| = |\cos^2\varphi\sin\varphi| \le 1$, то $g(\rho,\varphi)\to 0$ када $\rho\to 0$. Дакле, $f(x,y)\to 0$ када $(x,y)\to(0,0)$.

Друго решење.

$$|f(x,y)| \le \frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot|y| \le |y| \to 0,\ \ y\to 0$$

1.4.

$$f(x,y)=\frac{\rho(\cos\varphi+\sin\varphi)}{\rho^2(\cos^2\varphi-\cos\varphi\sin\varphi+\sin^2\varphi)}=\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{1-\frac{1}{2}\sin 2\varphi}=g(\ \frac{1}{\rho}\cdot h(\varphi)$$

Како је $|h(\varphi)|\le\frac{2}{1-1/2}=4$, имамо

$$|f(x,y)|\le\frac{4}{\rho}\to 0,\quad \rho\to+\infty$$

Према томе, $f(x,y)\to 0$ када $x\to\infty$ и $y\to\infty$.

1.5. Нека је $f(x,y)=e^{u(x,y)}$, где је

$$u(x,y)=x^2y^2\ln(x^2+y^2)=\rho^4\ln\rho^2\cdot\cos^2\varphi\sin^2\varphi=g(\rho)\cdot h(\varphi)$$

Како $g(\rho)=2\rho^4\ln\rho\to 0$ када $\rho\to 0$ и $|h(\varphi)|\le 1$, то $u(x,y)\to 0$ када $(x,y)\to(0,0)$, односно $f(x,y)\to 1$ када $(x,y)\to(0,0)$.

1.6.

$$f(x,y)=\left((1+xy^2)^{1/xy^2}\right)^{\dfrac{xy^2}{x^2+xy}}=u(x,u)^{v(x,y)}$$

Како

$$u(x,y)=(1+xy^2)^{1/xy^2}\to e,\ (x,y)\to(0,3)$$

$$v(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+xy}=\frac{y^2}{x+y}\to 3,\ (x,y)\to(0,3)$$

то $f(x,y)\to e^3$ када $(x,y)\to(0,3)$.

1.7.

$$f(x,y)=2\cdot\frac{\sin^2\dfrac{xy}{2}}{x^2y^2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin\dfrac{xy}{2}}{\dfrac{xy}{2}}\right)^2\to\frac{1}{2},\ (x,y)\to(0,0)$$

2.1. За $(x,y)\neq(0,0)$ је

$$|f(x,y)|\leq\frac{|x|}{|x|+|y|}\cdot|y|\leq|y|\to 0,\ y\to 0$$

Како $f(x,y)\to f(0,0)$ када $(x,y)\to(0,0)$, функција f је непрекидна у $(0,0)$.

2.2. За $(x,y)\neq(0,0)$ је

$$|f(x,y)|\leq\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot|x|+\frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot|y|\leq|x|+|y|\to 0,\ (x,y)\to(0,0)$$

Како $f(x,y)\to f(0,0)$ када $(x,y)\to(0,0)$, функција f је непрекидна у $(0,0)$.

2.3. За $(x,y)\neq(0,0)$ је

$$|f(x,y)|\leq\frac{\max\{|x|,|y|\}^5}{\max\{|x|,|y|\}^4}=\max\{|x|,|y|\}\to 0,\ (x,y)\to(0,0)$$

Како $f(x,y)\to f(0,0)$ када $(x,y)\to(0,0)$, функција f је непрекидна у $(0,0)$.

Друго решење.

Из неједнакости $x^4+y^4\geq 2x^2y^2$ за $xy\neq 0$ следи

$$|f(x,y)|\leq\frac{|x^3y^2|}{2x^2y^2}=\frac{|x|}{2}\to 0,\ x\to 0$$

За $xy=0$ је $f(x,y)=0$.

2.4. Прекиди су у тачкама $(a,-a)$ за $a\in R$. Како

$$f(x,y)=\frac{2\cdot\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}}{x+y}=\frac{\sin\dfrac{x+y}{2}}{\dfrac{x+y}{2}}\cdot\cos\frac{x-y}{2}\to\cos a,\ (x,y)\to(a,-a)$$

за отклањање прекида треба узети $f(a,-a)=\cos a$.

Специјално, у тачки $(0,0)$ (за $a=0$) функција је непрекидна ако је $f(0,0)=1$.

2.5. Како је $f(0,y)=0$ и $f(y^2,y)=1$, функција f нема граничну вредност у тачки $(0,0)$.

2.6. Како је $f(0,y)=0$ и

$$f(x,x^2-x)=\frac{x(x^2-x)}{x+x^2-x}=\frac{x^3-x^2}{x^2}\to -1,\ x\to 0$$

функција f нема граничну вредност у тачки $(0,0)$.

3.1.

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0$$

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0$$

3.2.

$$\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\frac{\sqrt{(\Delta x)^2}}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\begin{cases}1, & \Delta x>0\\ -1, & \Delta x<0\end{cases}$$

$$\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\frac{\sqrt{(\Delta y)^2}}{\Delta y}=\frac{|\Delta y|}{\Delta y}=\begin{cases}1, & \Delta y>0\\ -1, & \Delta y<0\end{cases}$$

3.3.

$$f'_x=y^2e^{x^2+y^4}+xy^2e^{x^2+y^4}\cdot 2x=y^2(1+2x^2)e^{x^2+y^4}$$

$$f'_y=2xye^{x^2+y^4}+xy^2e^{x^2+y^4}\cdot 4y^3=2xy(1+2y^4)e^{x^2+y^4}$$

3.4.

$$f'_x=\frac{1}{1+y^2/x^2}\cdot y\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$f'_y=\frac{1}{1+y^2/x^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

3.5.

$$f'_x=y^z\cdot x^{y^z-1}$$

$$f'_y=x^{y^z}\cdot\ln x\cdot zy^{z-1}$$

$$f'_z=x^{y^z}\cdot\ln x\cdot y^z\cdot\ln y$$

3.6.

$$f'_x=y+g'\cdot\frac{1}{y},\quad f'_y=x+g'\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

$$xf'_x+yf'_y=xy+\frac{x}{y}g'+xy-\frac{x}{y}g'=2xy$$

3.7.

$$f'_x=yx^{y-1}y^x+x^yy^x\ln y=\frac{y}{x}f+f\ln y$$

$$f'_y=x^y\ln x\cdot y^x+x^y\cdot xy^{x-1}=f\ln x+\frac{x}{y}f$$

$$\begin{aligned} xf'_x + yf'_y &= yf + xf\ln y + yf\ln x + xf \\ &= f(x+y+x\ln y + y\ln x) \\ &= f(x+y+\ln y^x + \ln x^y) \\ &= f(x+y+\ln f) \end{aligned}$$

4.1. За $xy > 0$ је $f(x,y) = \sqrt{xy}$, па је

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{xy}} \cdot y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}.$$

- f'_x нема граничну вредност у $(0,0)$, па није непрекидна у $(0,0)$
- Не може се закључити да је f диференцијабилна у $(0,0)$

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0}{\Delta y} = 0$$

По дефиницији, f је диференцијабилна у $(0,0)$ ако је

$$\begin{aligned} \Delta f(0,0) &= f'_x(0,0)\Delta x + f'_y(0,0)\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) \\ &= o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) \end{aligned}$$

односно ако

$$\frac{\Delta f(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \to 0, \quad (\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$$

Међутим,

$$\frac{\Delta f(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \frac{\sqrt{\Delta x \Delta y}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \begin{cases} 0, & \Delta x = 0 \text{ и } \Delta y > 0 \\ 1/\sqrt{2}, & \Delta x = \Delta y > 0 \end{cases}$$

Дакле, f није диференцијабилна у $(0,0)$.

4.2.

$$f'_x(x,y) = \frac{2xy(x^2+y^2) - x^2 y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{x^2(x^2+y^2) - x^2 y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

- У тачки $(x,y) \neq (0,0)$ функције f'_x и f'_y су непрекидне, па је f у тој тачки диференцијабилна
- Како је

$$f'_x(x,y) = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} = \begin{cases} 0, & x = 0 \text{ и } y \neq 0 \\ 1/2, & x = y \neq 0 \end{cases}$$

функција f'_x у $(0,0)$ нема граничну вредност, па се не може закључити да је f диференцијабилна у $(0,0)$

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0,\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0}{\Delta y} = 0$$

По дефиницији, f је диференцијабилна у $(0,0)$ ако је

$$\begin{aligned} \Delta f(0,0) &= f'_x(0,0)\Delta x + f'_y(0,0)\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) \\ &= o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) \end{aligned}$$

односно ако

$$\frac{\Delta f(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \to 0, \quad (\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$$

Међутим,

$$\frac{\Delta f(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \frac{\Delta x^2 \Delta y}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \begin{cases} 0, & \Delta x = 0 \text{ и } \Delta y > 0 \\ 1/2\sqrt{2}, & \Delta x = \Delta y > 0 \end{cases}$$

Дакле, f није диференцијабилна у $(0,0)$.

4.3.

$$f'_x = 3(x^2+y^2)^2 \cdot 2x, \quad f'_y = 3(x^2+y^2)^2 \cdot 2y$$

$$df(x,y) = 6x(x^2+y^2)dx + 6y(x^2+y^2)dy$$

Друго решење.

Ако је $f(x,y) = g(x,y)^3$, где је g функција $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$, тада је

$$df(x,y) = 3g^2 dg = 3g^2 d(x^2+y^2) = 6g(x,y)(xdx + ydy)$$

4.4. Ако је $f = \sqrt{g}$, тада је

$$df = \frac{1}{2\sqrt{g}} dg = \frac{1}{2\sqrt{g}} d(x^2+y^2+z^2) = \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

4.5. Ако је $f(x,y) = \sqrt{(1+x)^3 + (2+y)^3}$, онда је дати израз једнак $f(\Delta x, \Delta y)$ за $\Delta x = 0.02$ и $\Delta y = -0.03$

Из

$$f'_x = \frac{3(1+x)^2}{2\sqrt{(1+x)^3 + (2+y)^3}}, \quad f'_y = \frac{3(2+y)^2}{2\sqrt{(1+x)^3 + (2+y)^3}}$$

добијамо $f'_x(0,0) = 1/2$ и $f'_y(0,0) = 2$, па је

$$f(\Delta x, \Delta y) \approx f(0,0) + df(0,0) = 3 + \frac{1}{2}\Delta x + 2\Delta y = 3 + 0.01 - 0.06$$

Дати израз је приближно једнак 2.95

5.1.

$$F(x,y) = x^2 \ln y - y^2 \ln x, \quad F'_x = 2x \ln y - \frac{y^2}{x}, \quad F'_y = \frac{x^2}{y} - 2y \ln x$$

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{2x \ln y - y^2/x}{x^2/y - 2y \ln x} = \frac{y^3 - 2xy \ln y}{x^3 - 2xy \ln x}$$

Друго решење.

диференцирањем једнакости $x^2 \ln y - y^2 \ln x = 0$ по x добијамо

$$2x \ln y + \frac{x^2}{y} \cdot y' - 2y \cdot y' \cdot \ln x - y^2 \cdot \frac{1}{x} = 0$$

$$y' \left(\frac{x^2}{y} - 2y \ln x \right) = \frac{y^2}{x} - 2x \ln y$$

Треће решење.

Применом диференцијала на леву и десну страну једнакости $x^2 \ln y - y^2 \ln x = 0$ добијамо

$$2xdx \ln y + x^2 \frac{dy}{y} - 2ydy \ln x - y^2 \frac{dx}{x} = 0$$

$$dy \left(\frac{x^2}{y} - 2y \ln x \right) = \left(\frac{y^2}{x} - 2x \ln y \right) dx$$

па је $y' = \dfrac{dy}{dx}$

5.2.

$$F'_x = z^2 - 2xy + 2, \quad F'_y = -x^2 + 2yz - 1, \quad F'_z = 2zx + y^2$$

Како је $z(0,1) = 1$, то је

$$z'_x = -\frac{F'_x(0,1,1)}{F'_z(0,1,1)} = -\frac{1 - 0 + 2}{1} = -3$$

$$z'_y = -\frac{F'_y(0,1,1)}{F'_z(0,1,1)} = -\frac{-0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1}{1} = -1$$

5.3. Диференциањем по x добијамо

$$1 = z'_x G + zG' y \frac{z'_x}{-z^2}, \quad z = zz'_x G - yz'_x G'$$

одакле је

$$z'_x = \frac{z}{zG - yG'}$$

Диференцирањем по y добијамо

$$0 = z'_y G + zG' \frac{z - yz'_y}{z^2}, \quad (yG' - zG) z'_y = G'z$$

одакле је

$$z'_y = \frac{zG'}{yG' - zG}$$

Заменом z'_x и z'_y имамо

$$\begin{aligned} xz'_x + yz'_y &= \frac{xz}{zG - yG'} + \frac{yzG'}{yG' - zG} \\ &= \frac{zx - yzG'}{zG - yG'} \\ &= \frac{z \cdot zG - yzG'}{zG - yG'} \\ &= z \end{aligned}$$

Друго решење.

Из дате једнакости имамо

$$\begin{aligned} dx &= Gdz + zdG = Gdz + zG'd\left(\frac{y}{z}\right) \\ &= Gdz + zG'\frac{zdy - ydz}{z^2} \\ &= Gdz + G'dy - G'\frac{y}{z}dz \end{aligned}$$

Из последње једнакости следи

$$zdx - zG'dy = (zG - yG')dz$$

односно

$$\frac{z}{zG - yG'}dx + \frac{-zG'}{zG - yG'}dy = dz$$

Према томе,

$$z'_x = \frac{z}{zG - yG'}, \quad z'_y = \frac{zG'}{yG' - zG}$$

Даље исто као у првом решењу

Трећи начин.

$$F(x,y,z) = x - zG\left(\frac{y}{z}\right), \quad z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z},\ z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

где је

$$F'_x = 1, \quad F'_y = -zG'\frac{1}{z} = -G', \quad F'_z = -G - zG'y\frac{-1}{z^2} = \frac{-zG + yG'}{z}$$

5.4. Нека је

$$F(x,y,z) = G(\underbrace{x+y+z}_{u}, \underbrace{2xz+y^2}_{v}) = 0$$

Тада је

$$\begin{aligned} F'_x &= G'_u \cdot u'_x + G'_v \cdot v'_x = G'_u + 2zG'_v \\ F'_y &= G'_u \cdot u'_y + G'_v \cdot v'_y = G'_u + 2yG'_v \\ F'_z &= G'_u \cdot u'_z + G'_v \cdot v'_z = G'_u + 2xG'_v \end{aligned}$$

па је

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{G'_u + 2zG'_v}{G'_u + 2xG'_v}$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{G'_u + 2yG'_v}{G'_u + 2xG'_v}$$

$$\begin{aligned} (y-x)z'_x + (x-z)z'_y &= \frac{(x-y)(G'_u + 2zG'_v) + (z-x)(G'_u + 2yG'_v)}{G'_u + 2xG'_v} \\ &= \frac{G'_u(z-y) + 2xG'_v(z-y)}{G'_u + 2xG'_v} \\ &= z - y \end{aligned}$$

Други начин.

Из $G(u,v) = 0$ следи $dG(u,v) = 0$, односно $G'_u du + G'_v dv = 0$. Како је

$$du = dx + dy + dz, \quad dv = 2xdz + 2zdx + 2ydy$$

то је
$$(G'_u + 2zG'_v)dx + (G'_u + 2yG'_v)dy = -(G'_u + 2xG'_v)dz$$
па је
$$z'_x = -\frac{G'_u + 2zG'_v}{G'_u + 2xG'_v}, \quad z'_y = -\frac{G'_u + 2yG'_v}{G'_u + 2xG'_v}$$
Даље исто као у првом решењу.

5.5. Диференцирањем датих једнакости по x добијамо
$$y + u'_x v + uv'_x = 0, \quad v + v'_x - yu'_x = 0$$
За тачку $(1, -1)$ имамо систем
$$2u'_x + v'_x = 1, \quad u'_x + v'_x = -2$$
из којег следи $u'_x(1, -1) = 3$ и $v'_x(1, -1) = -5$.

Диференцирањем датих једнакости по y добијамо
$$x + u'_y v + uv'_y = 0, \quad v'_y - u - yu'_y = 0$$
За тачку $(1, -1)$ имамо систем
$$2u'_y + v'_y = -1, \quad u'_y + v'_y = 1$$
из којег следи $u'_y = -2$ и $v'_y = 3$. Дакле,
$$du(1, -1) = u'_x dx + u'_y dy = 3dx - 2dy$$
$$dv(1, -1) = v'_x dx + v'_y dy = -5dx + 3dy$$

6.1.
$$\frac{f(0 + tl_x, 0 + tl_y) - f(0, 0)}{t} = \frac{f(tl_x, tl_y) - 0}{t} = \frac{\sqrt{|t^2 l_x^2 - t^2 l_y^2|}}{t}$$
$$= \frac{\sqrt{t^2 |l_x^2 - l_y^2|}}{t} = \frac{|t|}{t} \cdot \sqrt{|l_x^2 - l_y^2|}$$
$f'_{\vec{l}}(0, 0)$ постоји ако је $\sqrt{|l_x^2 - l_y^2|} = 0$, односно $l_x^2 = l_y^2$

$f'_{\vec{l}}(0, 0)$ постоји у правцима $y = x$ и $y = -x$

6.2.
$$\frac{f(tl_x, tl_y) - f(0, 0)}{t} = \frac{\sqrt[3]{t^2 l_x^2 \cdot tl_y} - 0}{t} = \frac{\sqrt[3]{t^3 l_x^2 l_y}}{t} = \sqrt[3]{l_x^2 l_y}$$
$$f'_{\vec{l}}(0, 0) = \sqrt[3]{l_x^2 l_y}$$

6.3. f је диференцијабилна у R^2, $\overrightarrow{AB} = (1, 2)$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5}$

$f'_{\overrightarrow{AB}}(A) = \nabla f(A) \cdot l, \quad l = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$

$\nabla f(x, y) = (2x - 3y, 2y - 3x + 1)$

$\nabla f(A) = (2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1), 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 + 1) = (5, -4)$

$$f'_{\overrightarrow{AB}}(A) = (5,-4)\cdot(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}) = 5\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} - 4\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{3}{\sqrt{5}}$$

7.1. $\underbrace{xy^2 + z^3 - 12}_{F(x,y,z)} = 0$

$F'_x(x,y,z) = y^2, \quad F'_y(x,y,z) = 2xy, \quad F'_z(x,y,z) = 3z^2$

$F'_x(M) = 4, \quad F'_y(M) = 4, \quad F'_z(M) = 12, \quad n_\alpha = (1,1,3)$

$1\cdot(x-1) + 1\cdot(y-2) + 3\cdot(z-2) = 0, \quad x + y + 3z - 9 = 0$

$\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-2}{3}$

8.1.

$$f'_x = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2-x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$f''_{x^2} = y^2\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{-2x}{(x^2+y^2)^{5/2}} = -\frac{3xy^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}$$

$$f''_{xy} = \frac{2y(x^2+y^2)^{3/2} - y^2\dfrac{3}{2}(x^2+y^2)^{1/2}\cdot 2y}{(x^2+y^2)^3} = \frac{2yx^2 - y^3}{(x^2+y^2)^{5/2}}$$

$$f'_y = x\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2y}{(x^2+y^2)^{3/2}} = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$f''_{y^2} = \frac{x(x^2+y^2)^{3/2} - xy\dfrac{3}{2}(x^2+y^2)^{1/2}\cdot 2y}{(x^2+y^2)^3} = \frac{2xy^2 - x^3}{(x^2+y^2)^{5/2}}$$

8.2.

$$f'_x = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)^2}\cdot\frac{1-xy-(x+y)(-y)}{(1-xy)^2}$$

$$= \frac{1+y^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2} = \frac{1+y^2}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f''_{x^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad f''_{y^2} = -\frac{2y}{(1+y^2)^2}, \quad f''_{xy} = 0$$

8.3.

$$f'_x = \frac{2y(x^2+y^2) - 2xy\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^3 - 2x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0,\ f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = 0$$

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f'_x(0,\Delta y) - f'_x(0,0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\dfrac{2\Delta y^3}{\Delta y^4} - 0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{2}{\Delta y^2} = +\infty$$

8.4.

$$f'_x = 3x^2y^3 - 6xy + 3y^2, \quad f'_y = 3x^3y^2 - 3x^2 + 6xy$$

$$f''_{x^2} = 6xy^3, \quad f''_{x^2} = 6xy^3 - 6y, \quad f''_{xy} = 9x^2y^2 - 6x + 6y$$

$$f'''_{x^3} = 6y^3, \quad f'''_{x^2y} = 18xy^2 - 6, \quad f'''_{xy^2} = 18x^2y + 6$$

$$f''_{y^2} = 6x^3y + 6x, \quad f'''_{y^3} = 6x^3$$

$$d^2f = (6xy^3 - 6y)dx^2 + 2(9x^2y^2 - 6x + 6y)dxdy + (6x^3y + 6x)dy^2$$

$$d^3f = 6y^3dx^3 + 3(18xy^2 - 6)dx^2dy + 3(18x^2y + 6)dxdy62 + 6x^3dy^3$$

9.1.

$$T_2(x,y) = f(A) + df(A) + \frac{1}{2}d^2f(A)$$

$$f'_x = yx^{y-1}, \quad f''_{x^2} = y(y-1)x^{y-2}, \quad f''_{xy} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x,$$

$$f''_{y^2} = x^y \ln x, \quad f''_{y^2} = x^y \ln^2 x$$

$$f(A) = f'_x(A) = f''_{xy}(A) = 1, \quad f''_{x^2}(A) = f'_y(a) = f''_{y^2}(A) = 0$$

$$T_2(x,y) = 1 + \Delta x + \frac{1}{2}\cdot 2\Delta x\Delta y = 1 + x - 1 + (x-1)(y-1) = 1 - y + xy$$

Дакле, у околини тачке A је $x^y \approx 1 - y + xy$.

9.2.

$$M_2(x,y) = f(0,0) + df(0,0) + \frac{1}{2}d^2f(0,0), \quad f(0,0) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$f'_x = \frac{1}{1 + \dfrac{(1+x+y)^2}{(1-x+y)^2}} \cdot \frac{1-x+y+1+x+y}{(1-x+y)^2} = \frac{2+2y}{(1-x+y)^2 + (1+x+y)^2}$$

За $x = 0$ и $y = 0$ имамо $f'_x(0,0) = 0$. Слично се добија

$$f'_y(0,0) = f''_{x^2}(0,0) = f''_{y^2}(0,0) = 0, \quad f''_{xy}(0,0) = -1$$

$$T_2(x,y) = \frac{\pi}{4} + 1\cdot dx + \frac{1}{2}(0\cdot dx^2 + 2(-1)dxdy + 0\cdot dy^2) = \frac{\pi}{4} + x - xy$$

9.3. За $t = -x^2 - y^2$ је $f(x,y) = (1+t)^{1/2} = g(t)$. Како је Маклоренов полином другог реда за g дат са

$$M_2(t) = 1 + \frac{1}{2}t + \binom{1/2}{2}t^2 = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{1/2(1/2-1)}{2}t^2 = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2,$$

то је

$$M_4(x,y) = 1 - \frac{1}{2}(x^2+y^2) - \frac{1}{8}(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{8}y^4 - \frac{1}{4}x^2y^2$$

Узимањем већег степена за Маклоренов полином функције g добијамо степене x и y веће од 4.

9.4.

$$T_2(x,y) = T_2(-1+\Delta x, 0+\Delta y) = f(A) + df(A) + \frac{1}{2}d^2f(A), \quad f(A) = 1$$

Диференцирањем дате једнакости по x (по y) добијамо

$$2x - 2zz'_x - yz - xyz'_x = 0, \quad 2y - 2zz'_y - xz - xyz'_y = 0$$

За $x = -1$, $y = 0$ и $z = 1$ следи $\boxed{z'_x(A) = -1}$ и $\boxed{z'_y(A) = 1/2}$.

Диференцирањем прве добијене једнакости по x имамо

$$2 - 2z'_x z'_x - 2zz''_{x^2} - yz'_x - yz'_x - xyz''_{x^2} = 0$$

У тачки A је $2 - 2 - 2z''_{x^2} = 0$, па је $\boxed{z''_{x^2}(z) = 0}$.

Диференцирањем исте једнакости по y имамо

$$-2z'_y z'_x - 2zz''_{xy} - z - yz'_y - xz'_x - xyz''_{xy} = 0$$

У тачки A је $1 - 2z''_{xy} - 1 - 1 = 0$, па је $\boxed{z''_{xy}(A) = -1/2}$.

Диференцирањем друге добијене једнакости по y имамо

$$2 - 2z'_y z'_y - 2zz''_{y^2} - xz'_y - xz'_y - xyz''_{y^2} = 0$$

У тачки A је $2 - 1/2 - 2 \cdot z''_{y^2} + 1/2 + 1/2 = 0$, па је $\boxed{z''_{y^2}(A) = 5/4}$

$$\begin{aligned}
T_2(x,y) &= z(A) + dz(A) + \frac{1}{2}d^2z(A) \\
&= z(A) + z'_x dx + z'_y dy + \frac{1}{2}(z''_{x^2}(A)dx^2 + 2z''_{xy}(A)dxdy + z''_{y^2}(A)dy^2) \\
&= 1 - dx + \frac{1}{2}dy + \frac{1}{2}\left(0 - 2\cdot\frac{1}{2}dxdy + \frac{5}{4}dy^2\right) \\
&= 1 - \Delta x + \frac{1}{2}\Delta y - \frac{1}{2}\Delta x\Delta y + \frac{5}{8}(\Delta y)^2 \\
&= 1 - (x+1) + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}(x+1)y + \frac{5}{8}y^2 \\
&= -x - \frac{1}{2}xy + \frac{5}{8}y^2
\end{aligned}$$

10.1.

$$f(x,0) = x^3 \begin{cases} > 0, & x > 0 \\ < 0, & x < 0 \end{cases}, \quad f(0,0) = 0$$

Како је $f(x,0) > f(0,0)$ за $x > 0$ и $f(x,0) < f(0,0)$ функција f нема локално екстремум у тачки $(0,0)$.

10.2. $f(x,0) = 2x^2 > 0 = f(0,0)$ - по x оси је локални минимум

$f(0,y) = y^4 > f(0,0)$ - по y оси је локални минимум

А по правој $y = kx$? Ако је $f(x,kx) = 2x^2 - 3k^2x^3 + k^4x^4 = \varphi(x)$, тада је $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ и $\varphi''(0) = 4 > 0$, па f по свакој правој $y = kx$ има локални минимум у $(0,0)$.

Али, због

$$f(2y^2/3, y) = 2\cdot\frac{4}{9}y^4 - 3\cdot\frac{2}{3}y^2\cdot y^2 + y^4 = -\frac{1}{9}y^4 < 0 = f(0,0)$$

функција f нема локални екстремум у $(0,0)$.

10.3. f диференцијабилна у R^2, $df(x,y) = (2x, -2y)$

$df(x,y) = 0$ само у тачки $(0,0)$

Једина стационарна тачка је $(0,0)$

Међутим, тачка $(0,0)$ није тачка локалног екстремума, јер је $f(x,0) > 0$ и $f(0,y) < 0$.

10.4. f'_x не постоји у тачкама $(0, y)$ - то су критичне тачке

$f'_y(x, y) = 2y$, $f'_y = 0$ у тачкама $(x, 0)$. Како је $f'_x(x, 0) = 1$ за $x > 0$ и $f'_x(x, 0) = -1 < 0$ за $x < 0$, једина стационарна тачка је $(0, 0)$.

У критичним тачкама постоји f'_y, при чему је $f'_y \neq 0$ за $y \neq 0$

Дакле, остаје само тачка $(0, 0)$ за могући ЛЕ

Из $f(0, 0) = 0$ и $f(x, y) > 0$ за $(x, y) \neq (0, 0)$ следи да је у $(0, 0)$ локални минимум.

10.5. $f'_x = 3x^2 - 3$, $\quad f'_y = -6y^2 + 6$

<u>За стационарне тачке</u> $3x^2 - 3 = 0$, $-6y^2 + 6 = 0$; $\quad x^2 = y^2 = 1$

<u>Стационарне тачке су</u> $A(1, 1)$, $B(1, -1)$, $C(-1, 1)$, $D(-1, -1)$.

Да ли су у њима ЛЕ? $f''_{x^2} = 6x$, $f''_{xy} = 0$, $f''_{y^2} = -12y$

<u>У тачки A:</u> $d^2f = 6dx^2 - 12dy^2$ мења знак — нема ЛЕ

<u>У тачки B:</u> $d^2f = 6dx^2 + 12dy^2 > 0$ (за $dx^2 + dy^2 \neq 0$) — min

<u>У тачки C:</u> $d^2f = -6dx^2 - 12dy^2 < 0$ (за $dx^2 + dy^2 \neq 0$) — max

<u>У тачки D:</u> $d^2f = -6dx^2 + 12dy^2$ мења знак — нема ЛЕ

Дакле, $f_{\min} = f(B) = -6$, $f_{\max} = f(C) = 6$

10.6.

$$f'_x = 2xe^{-x^2-y^2}(1 - x^2 - 2y^2), \quad f'_y = 2ye^{-x^2-y^2}(2 - x^2 - 2y^2)$$

Стационарне тачке ?

$$x(1 - x^2 - 2y^2) = 0, \quad y(2 - x^2 - 2y^2) = 0$$

1. $x = 0$, $y = 0$ – $A(0, 0)$
2. $x = 0$, $2 - x^2 - 2y^2 = 0$ – $B(0, 1)$, $C(0, -1)$
3. $1 - x^2 - 2y^2 = 0$, $y = 0$ – $D(1, 0)$, $E(-1, 0)$

Довољни услови ?

$f(A) = 0$, $f(P) > 0$ за $P \neq A$ – f у A има локални минимум

B, C, D, E ?

$f''_{x^2} = 2e^{-x^2-y^2}(1 - 5x^2 - 2y^2 + 2x^4 + 4x^2y^2)$

$f''_{xy} = 4xye^{-x^2-y^2}(-3 + x^2 + 2y^2)$

$f''_{y^2} = 2e^{-x^2-y^2}(2 - 10y^2 - x^2 + 2x^2y^2 + 4y^4)$

$B, C : a = f''_{x^2} = -2e^{-1}$, $b = f''_{x^2} = 0$, $c = f''_{y^2} = -8e^{-1}$

$$ac - b^2 = 16e^{-2} > 0,\ a < 0 \text{ — } f_{\max} = f(B) = f(C) = 2/e$$

$D, E : a = f''_{x^2} = -4e^{-1}$, $b = f''_{x^2} = 0$, $c = f''_{y^2} = 2e^{-1}$

$$ac - b^2 = -8e^{-2} < 0 \text{ — } f \text{ нема ЛЕ у } D \text{ и } E$$

10.7. Нека је

$$F(x, y, z) = 5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72$$

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{10x - 2y - 2z}{10z - 2x - 2y} = -\frac{5x - y - z}{5z - x - y}$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{10y-2x-2z}{10z-2x-2y} = -\frac{5y-x-z}{5z-x-y}$$

Из система

$$5x-y-z=0, \quad 5y-x-z=0, \quad F(x,y,z)=0$$

добијамо: $y=x$ (одузимањем прве две), $z=4x$, $x=\pm 1$ (из $F=0$)

Стационарне тачке су: $A(1,1)$ (са $z(A)=4$) и $B(-1,-1)$ (са $z(B)=-4$)

Да ли су у A и B ЛЕ?

$$z''_{x^2} = -\frac{(5-z'_x)(5z-x-y)-\overbrace{(5x-y-z)}^{=0\ (A),(B)}(5z'_x-1)}{(5z-x-y)^2}$$

$$z''_{x^2}(A) = -\frac{5(20-1-1)}{18^2} = -\frac{5}{18}, \quad z''_{x^2}(B) = -\frac{5(-20+1+1)}{18^2} = \frac{5}{18}$$

$$z''_{xy} = -\frac{(-1-z'_y)(5z-x-y)-\overbrace{(5x-y-z)}^{=0\ (A),(B)}(5z'_y-1)}{(5z-x-y)^2}$$

$$z''_{xy}(A) = -\frac{-1\cdot 18}{18^2} = \frac{1}{18} = z''_{yx}(A), \quad z''_{xy}(B) = z''_{yx}(B) = -\frac{1}{18}$$

$$z''_{y^2} = -\frac{(5-z'_y)(5z-x-y)-\overbrace{(5y-x-z)}^{=0\ (A),(B)}(5z'_y-1)}{(5z-x-y)^2}$$

$$z''_{y^2}(A) = -\frac{5\cdot 18}{18^2} = -\frac{5}{18}, \quad z''_{y^2}(B) = -\frac{5\cdot(-18)}{18^2} = \frac{5}{18}$$

$A: ac-b^2 = 5^2/18^2 - 1/18^2 = 24/18^2 > 0,\ a=-5/18<0$ —– $f_{\max} = f(A) = 4$

$B: ac-b^2 = 5^2/18^2 - (-1)^2/18^2 = 24/18^2 > 0,\ a=5/18>0$ —– $f_{\min} = f(B) = -4$

10.8.

$$f'_x = 4x-y+2z, \quad f'_y = -x-1+3y^2, \quad f'_z = 2x+2z$$

За стационарне тачке:

$$x+z=0, \quad 3y^2 = x+1, \quad y=4x+2z$$

$$z=-x,\ y=4x-2x=2x,\ 3\cdot 4x^2 = x+1,\ 12x^2-x-1=0,\ x_1=\frac{1}{3},\ x_2=-\frac{1}{4}$$

Стационарне тачке су: $A(1/3, 2/3, -1/3)$ и $B(-1/4, -1/2, 1/4)$

Да ли су у њима ЛЕ ?

$f''_{x^2}=4,\ f''_{xy}=f''_{yx}=-1,\ f''_{xz}=f''_{zx}=2,\ f''_{y^2}=6y,\ f''_{yz}=f''_{y^2}=0,\ f''_{z^2}=2$

<u>У тачки A :</u>

$$M = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad m_1=4,\ m_2=15,\ m_3=14$$

Дакле, $f_{\min} = f(A)$

<u>У тачки B :</u>

$$M = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad m_1=4,\ m_2=-13$$

Дакле, функција f у тачки B нема ЛЕ. Из

$$d^2 f(B) = \begin{cases} 4dx^2, & dy=dz=0,\ dx\neq 0 \\ -3dy^2, & dx=dz=0,\ dy\neq 0 \end{cases}$$

видимо да $d^2f(B)$ заиста мења знак.

10.9.

$$f'_x = yz - \frac{1}{x^2}, \quad f'_y = xz - \frac{1}{y^2}, \quad f'_z = xy - \frac{1}{z^2}$$

За стационарне тачке

$$yz = \frac{1}{x^2}, \quad xz = \frac{1}{y^2}, \quad xy = \frac{1}{z^2}$$

$$x \cdot xyz = y \cdot xyz = z \cdot xyz, \quad x = y = z, \quad x^4 = 1, \quad x_1 = 1,\ x_2 = -1$$

Стационарне тачке: $A(1,1,1)$ и $B(-1,-1,-1)$

$$f''_{x^2} = \frac{2}{x^3},\ f''_{y^2} = \frac{2}{y^3},\ f''_{z^2} = \frac{2}{z^3},\ f''_{xy} = z,\ f''_{xz} = y,\ f''_{yz} = x$$

У тачки A :

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad m_1 = 2,\ m_2 = 3,\ m_3 = 4.$$

Дакле, $f_{\min} = f(A)$

У тачки B :

$$M = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad m_1 = -2,\ m_2 = 3,\ m_3 = -4$$

Дакле, $f_{\max} = f(B)$

10.10.

$$f'_x = yz(4-x-y-z) - xyz,\ f'_y = xz(4-x-y-z) - xyz,\ f'_z = xy(4-x-y-z) - xyz$$

Стац. т.: $A(0,0,0)$ и $B(1,1,1)$

Довољни услови

$$f''_{x^2} = -2yz,\ f''_{y^2} = -2xz,\ f'_z = -2xy,\ f''_{xy} = z(4-2x-2y-z)$$

$$f''_{yz} = x(4-x-2y-2z),\ f''_{xz} = y(4-2x-y-2z)$$

У тачки A је $d^2f(A) = 0$. Како знак прираштаја $\Delta f(A) = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot (4 - \Delta x - \Delta y - \Delta z)$ може да буде и $+$ и $-$, функција у тачки A нема ЛЕ

У тачки B је

$$M = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

Како је $m_1 = -2 < 0$, $m_2 = 3 > 0$, $m_3 = -4 < 0$, функција у тачки B има локални максимум.

11.1.

$$F(x,y,\lambda) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 2)$$

$$F'_x = y + 2\lambda x, \quad F'_y = x + 2\lambda y$$

$$\begin{cases} y + 2\lambda x = 0 \\ x + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\lambda x = -y \\ 2\lambda y = -x \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

Пошто је $xy \neq 0$ (у противном $x = y = 0$, што не може због $x^2 + y^2 = 2$), то је $x^2 = y^2$, па је $x^2 = 1$.

За $y = x$ је $\lambda = -1/2$, а за $y = -x$ је $\lambda = 1/2$.

Стационарне тачке су: $A(1,1), B(1,-1), C(-1,1), D(-1,-1)$ за f,

односно $A^*(1,1,-.5), B^*(1,-1,.5), C^*(-1,1,.5), D^*(-1,-1,-.5)$ за F

Провера довољног услова за ЛУЕ

$F''_{x^2} = 2\lambda,\ F''_{xy} = 1,\ F''_{y^2} = 2\lambda,\ d^2F(x,y) = 2\lambda dx^2 + 2dxdy + 2\lambda dy^2$

У тачкама A^* и D^* је

$$d^2F(A^*) = d^2F(D^*) = -dx^2 + 2dxdy - dy^2 = -(dx-dy)^2 \leq 0$$

из чега се не може закључити о ЛЕ. Али из $x^2 + y^2 = 2$ следи $2xdx + 2ydy = 0,\ dx + dy = 0,\ dy = -dx \neq 0$, па је $d^2F(A^*) = d^2F(D^*) = -4dx^2 < 0$ – локални максимум

f при $\varphi = 0$ у A и D има локални условни максимум

У тачкама B^* и C^* је

$$d^2F(B^*) = d^2F(C^*) = dx^2 + 2dxdy + dy^2 = (dx+dy)^2 \geq 0$$

из чега се не може закључити о ЛЕ. Али из $x^2 + y^2 = 2$ следи $2xdx + 2ydy = 0,\ dx - dy = 0,\ dy = dx \neq 0$, па је $d^2F(B^*) = d^2F(C^*) = 4dx^2 > 0$ – локални минимум

f при $\varphi = 0$ у B и C има локални условни минимум

11.2.

$$F = f + \lambda\varphi = x^2 + y^2 - 2xy + \lambda(3x^2 + y^2 - 12)$$

$$F'_x(x,y) = 2x - 2y + 6\lambda x, \quad F'_y(x,y) = 2y - 2x + 2\lambda y$$

Из $F'_x = 0,\ F'_y = 0,\ \varphi = 0$ имамо систем

$$x - y + 3\lambda x = 0, \quad y - x + \lambda y = 0, \quad 3x^2 + y^2 = 12$$

Сабирањем прве две једначине добијамо $\lambda(3x + y) = 0$

За $\lambda = 0$ је $x = y,\ x^2 = 3$

СТ: $A^*(\sqrt{3}, \sqrt{3}, 0)$ и $B^*(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0)$

За $3x + y = 0$ је $y = -3x,\ x^2 = 1,\ \lambda = -4/3$,

СТ: $C(1, -3, -4/3)$ и $D(-1, 3, -4/3)$

Довољни услови за ЛУЕ

$$F''_{x^2}(x,y) = 2 + 6\lambda, \quad F''_{xy}(x,y) = -2, \quad F''_{y^2}(x,y) = 2 + 2\lambda$$

$$d\varphi = 6xdx + 2ydy, \quad d\varphi(A) = 6\sqrt{3}dx + 2\sqrt{3}dy, \quad d\varphi(C) = 6dx - 2\cdot 3dy$$

За тачке A и B је $dy = -3dx$, па је за $dx \neq 0$

$$d^2F(A^*) = d^2F(B^*) = 2(dx^2 - 2dxdy + dy^2) = 2(dx-dy)^2 = 32dx^2 > 0$$

f при $\varphi = 0$ има у тачкама $A(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ и $B(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ локални минимум једнак 0

За тачке C и D је $dy = dx$, па је за $dx \neq 0$

$$d^2F(C^*) = d^2F(D^ast) = -6dx^2 - 4dxdy - \frac{2}{3}dy^2 = -\frac{32}{3}dx^2 < 0$$

f при $\varphi = 0$ има у тачкама $C(1,-3)$ и $D(-1,3)$ локални максимум једнак 16

11.3.

$$F(x,y,z,\lambda) = 3x^2 + 3y^2 + z^2 + \lambda(x+y+z-1)$$
$$F'_x = 6x + \lambda, \quad F'_y = 6y + \lambda, \quad F'_z = 2z + \lambda$$

Из система

$$6x + \lambda = 0, \ 6y + \lambda = 0, \ 2z + \lambda = 0, \ x + y + z = 1$$

следи

$$\lambda \neq 0, \ y = x, \ z = 3x, x + x + 3x = 1, x = 1/5$$

СТ: $A(1/5, 1/5, 3/5)$, $\lambda = -6/5$ (за f), $A^*(1/5, 1/5, 3/5, -6/5)$ (за F)

$$F''_{x^2} = F''_{y^2} = 6, \ F''_{z^2} = 2, \ F''_{xy} = F''_{yz} = F''_{xz} = 0, \ d^2F(A^*) = 6dx^2 + 6dy^2 + 2dz^2 > 0$$

$$f_{\min} = f(A) = 3 \cdot \frac{1}{5^2} + 3 \cdot \frac{1}{5^2} + 9 \cdot \frac{1}{5^2} = \frac{15}{5^2} = \frac{3}{5}$$

11.4.

$$F(x,y,z,\lambda) = x + z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$
$$F'_x = 1 + 2\lambda x, \quad F'_y = 2\lambda y, \quad F'_z = 1 + 2\lambda z$$

Из система $F'_x = 0$, $F'_y = 0$, $F'_z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ следи

$$\lambda \neq 0, \quad y = 0, \quad x = z, \quad 2x^2 = 1, \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Стац. т.: $A^*\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $B^*\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

<u>Довољни услови за ЛУЕ</u>

$F''_{x^2} = F''_{y^2} = F''_{z^2} = -2\lambda, \quad F''_{xy} = F''_{yz} = F''_{xz} = 0$

$$d^2F = -2\lambda(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

$d^2F(A^*) < 0$ па је у тачки $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ условни локални максимум

$d^2F(B^*) > 0$ па је у тачки $B\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ условни локални минимум

11.5.

$$F(x,y,z,\lambda) = 2x + y - 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 36)$$
$$F'_x = 2 + 2\lambda x, \ F'_y = 1 + 2\lambda y, \ F'_z = -2 + 2\lambda z$$

Из система

$$1 + \lambda x = 0, \ 1 + 2\lambda y = 0, \ -1 + \lambda z = 0, \ x^2 + y^2 + z^2 = 36$$

следи

$$\lambda \neq 0, \ \lambda x = -\lambda z, \ x = -z, \ z = -2y, \ 4y^2 + y^2 + 4y^2 = 36, \ y^2 = 4, \ y = \pm 2$$

СТ: $A(4, 2, -4)$ $(\lambda = -1/4)$ и $B(-4, -2, 4)$ $(\lambda = 1/4)$

<u>Довољни услови за ЛУЕ</u>

$$F''_{x^2} = F''_{y^2} = F''_{z^2} = 2\lambda, \ F''_{xy} = F''_{yz} = F''_{xz} = 0$$
$$d^2F(A^*) = -\frac{1}{2}(dx^2 + dy^2 + dz^2) < 0, \quad \max$$

$$d^2F(B^*) = \frac{1}{2}(dx^2 + dy^2 + dz^2) < 0, \quad \min$$

f при $\varphi = 0$ у тачки A има локални условни максимум

f при $\varphi = 0$ у тачки B има локални условни минимум

11.6.

$$F(x, y, z, \lambda) = x + y + z + \lambda\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 1\right) = f + \lambda\varphi$$

$$F'_x = 1 - \frac{\lambda}{x^2}, \quad F'_y = 1 - \frac{\lambda}{y^2}, \quad F'_z = 1 - \frac{\lambda}{z^2}$$

Из $F'_x = F'_y = F'_z = 0$ следи $x^2 = y^2 = z^2$.

За $x = y = z$ из $\varphi = 0$ добија се $x = 3$. Стационарна тачка је $A(3, 3, 3)$ са $\lambda = 9$.

За $x = y = -z$ из $\varphi = 0$ добија се $x = 1$. Стационарна тачка је $B(1, 1, -1)$ са $\lambda = 1$.

За $x = z = -y$ добија се стационарна тачка $C(1, -1, 1)$, а за $x = -y = -z$ добија се стационарна тачка $D(-1, 1, 1)$.

Провера довољног услова за ЛУЕ

$$F''_{x^2} = \frac{2\lambda}{x^3}, \; F''_{y^2} = \frac{2\lambda}{y^3}, \; F''_{z^2} = \frac{2\lambda}{z^3}, \; F''_{xy} = F''_{xz} = F''_{yz} = 0$$

У тачки A^* је $d^2F(A^*) = \dfrac{2}{3}(dx^2 + dy^2 + dz^2) > 0$, па

функција f у тачки A има локални условни минимум, $f_{\min} = F(A) = 9$

У тачки B^* је $d^2F(B^*) = 2(dx^2 + dy^2 - dz^2)$. Из услова $\varphi = 0$ следи $\dfrac{dx}{x^2} + \dfrac{dy}{y^2} + \dfrac{dz}{z^2} = 0$, што за тачку B даје $dz = -dx - dy$, односно $dz^2 = dx^2 + dy^2 + 2dxdy$. Заменом у d^2F добијамо

$$d^2F(B^*) = -4dxdy \begin{cases} < 0, & dx = dy \neq 0 \\ > 0, & dy = -dx \neq 0 \end{cases}$$

Према томе, у тачки B није локални условни екстремум.

Слично се показује да и у тачкама C и D није ЛУЕ.

11.7.

$$F(x, y, z, \lambda) = xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz - 4)$$

$$F'_x + y + 2z + \lambda yz, \; F'_y = x + 2z + \lambda xz, \quad F'_z = 2x + 2y + \lambda xy$$

Систем за СТ

$$\begin{cases} y + 2z + \lambda yz = 0 \\ x + 2z + \lambda xz = 0 \\ 2x + 2y + \lambda xy = 0 \\ xyz = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} xy + 2zx + 4\lambda = 0 \\ xy + 2zy + 4\lambda = 0 \\ 2xz + 2yz + 4\lambda = 0 \\ xyz = 4 \end{cases}$$

Из прве две јед. је $y = x$, а из друге и треће јед. је $y = 2z$. Из четврте јед. следи $z = 1$.

СТ: $A(2, 2, 1)$ са $\lambda = -2$

Довољни услови за ЛУЕ

$$F''_{x^2} = F''_{y^2} = F''_{z^2} = 0, \quad F''_{xy} = 1 + \lambda z, \; F''_{xz} = 2 + \lambda y, \; F''_{yz} = 2 + \lambda x$$

$$yzdx + zxdy + xydz = 0, \quad 2dx + 2dy + 4dz = 0, \quad 2dz = -dx - dy = -(dx + dy)$$

$$
\begin{aligned}
d^2F(A^*) &= 2((1-2)dxdy + (2-4)dxdz + (2-4)dydz) \\
&= 2(-dxdy - 2dxdz - 2dydz) \\
&= 2(-dxdy - 2z(dx+dy)) \\
&= 2(-dxdy + (dx+dy)^2) \\
&= dx^2 + dy^2 + (dx+dy)^2 > 0
\end{aligned}
$$

за $dx^2 + dy^2 \neq 0$.

f при услову $xyz = 4$ има у тачки A локални условни минимум

11.8.

$$F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 3)$$

$$F'_x = yz + 2\lambda x, \quad F'_y = xz + 2\lambda y, \quad F'_z = xy + 2\lambda z$$

Систем за СТ

$$
\begin{cases} yz + 2\lambda x = 0 \\ xz + 2\lambda y = 0 \\ xy + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases}
\qquad
\begin{cases} xyz + 2\lambda x^2 = 0 \\ yxz + 2\lambda y^2 = 0 \\ zxy + 2\lambda z^2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases}
$$

Следи $x^2 = y^2 = z^2 = 1$ што даје 8 СТ

За $\lambda = -1/2$ СТ: $A(1, 1, 1),\ C(1, -1, -1),\ D(-1, 1, -1),\ E(-1, -1, 1)$

За $\lambda = 1/2$ СТ: $B(-1, -1, -1),\ F(-1, 1, 1),\ G(1, -1, 1),\ H(1, 1, -1)$

Довољни услови

$$F''_{x^2} = F''_{y^2} = F''_{z^2} = 2\lambda, \quad F''_{xy} = z,\ F''_{xz} = y,\ F''_{yz} = x$$

$$d^2F = 2\lambda(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2zdxdy + 2ydxdz + 2xdydz$$

У тачки A је $dx + dy + dz = 0$, па је

$$
\begin{aligned}
d^2F(A^*) &= -dx^2 - dy^2 - dz^2 + 2dxdy + 2dxdz + 2dydz \\
&= -(dx-dy)^2 - dz^2 + 2(dx+dy)dz \\
&= -(dx-dy)^2 - dz^2 - 2(dx+dy)^2 < 0
\end{aligned}
$$

f у тачки A има локални условни максимум, $f_{\max} = f(A) = 1$

У тачки C је $dx = dy + dz = 0$, па је

$$
\begin{aligned}
d^2F(C^*) &= -dx^2 - dy^2 - dz^2 - 2dxdy - 2dxdz + 2dydz \\
&= -(dx-dy)^2 - dz^2 - 2(dy+dz)^2 < 0
\end{aligned}
$$

f у тачки C има локални условни максимум, $f_{\max} = f(A) = 1$

Слично важи и тачкама D и E

У тачки B је $dx + dy + dz = 0$, па је

$$
\begin{aligned}
d^2F(B^*) &= dx^2 + dy^2 + dz^2 - 2dxdy - 2dxdz - 2dydz \\
&= (dx-dy)^2 + dz^2 + 2(dx+dy)^2 > 0
\end{aligned}
$$

f у тачки B има локални условни минимум, $f_{\min} = f(B) = -1$

Слично важи и тачкама F, G и H

11.9.

$$F = f + \alpha\varphi + \beta\psi, \quad \varphi(x,y,z) = 2x^2 + y^2 - z^2 - 2,\ \psi(x,y,z) = y^2 + z^2 - 2$$

$$F(x,y,z,\alpha,\beta) = x + 2y + z + \alpha(2x^2 + y^2 - z^2 - 2) + \beta(y^2 + z^2 - 2)$$

<u>Систем за СТ</u>

$$1 + 4\alpha x = 0, \quad 2 + 2\alpha y + 2\beta y = 0, \quad 1 - 2\alpha z + 2\beta z = 0, \quad \varphi = 0, \quad \psi = 0$$

Из прве три једначине следи

$$\alpha \neq 0,\ \alpha + \beta \neq 0,\ \alpha - \beta \neq 0,\ x = -\frac{1}{4\alpha},\ y = -\frac{1}{\alpha+\beta},\ z = \frac{1}{2(\alpha-\beta)}$$

Из $\varphi = 0$ и $\psi = 0$ следи $x^2 = z^2$, при чему $x = -z$ не може јер би тада било $\alpha + \beta = 0$ (из претходних израза за x и z).

Дакле, $x = z$ што повлачи $\beta = 3\alpha$, односно $y = x$.

СТ: $A(1,1,1)$ са $\alpha = -1/4,\ \beta = -3/4$

и $B(-1,-1,-1)$ са $\alpha = 1/4$ и $\beta = 3/4$

<u>Довољни услови за ЛУЕ</u>

$$d^2F = 4\alpha dx^2 + 2(\alpha+\beta)dy^2 + 2(\beta-\alpha)dz^2$$
$$d^2F(1,1,1,-1/4,-3/4) = -dx^2 - 2dy^2 - dz^2 < 0, \quad \min$$
$$d^2F(-1,-1,-1,1/4,3/4) = dx^2 + 2dy^2 + dz^2 < 0, \quad \max$$

Ове неједнакости важе и на подпростору у којем је

$$2dx + dy - dz = 0, \quad dy + dz = 0$$

f при $\varphi = 0$ и $\psi = 0$ има у тачки A локални условни минимум

f при $\varphi = 0$ и $\psi = 0$ има у тачки B локални условни максимум

11.10.

$$F = f + \alpha(x^2 + y^2 - 2) + \beta(x + z - 2)$$

Из система за СТ за $x = y = z$ добијамо $\alpha = -1/2$ и $\beta = -1$.

<u>Довољни услови за ЛУЕ</u>

$$F''_{x^2} = F''_{y^2} = 2\alpha,\ F''_{z^2} = F''_{xz} = 0,\ F''_{xy} = F''_{yz} = 1$$
$$d^2F(A^*) = -dx^2 - dy^2 + 2dxdy + 2dydz$$

Како је $dz = -dy$ и $dx = -dy$ у тачки A, то је

$$d^2F(A^*) = -(dx - dy)^2 + 2dydz = -4dy^2 - 2dy^2 = -6dy^2 < 0, \quad \max$$

12.1. <u>Локални екстремуми у унутрашњости области $\mathcal{D}$</u>

$f'_x = 2x,\ f'_y = -2y,$ стац.т. $\boxed{A(0,0)}$

<u>На граници области</u>

$$F = f + \lambda(x^2 + y^2 - 2), \quad F'_x = 2x + 2\lambda x, \quad F'_y = -2y + 2\lambda y$$

Из система

$$x + \lambda x = 0, \quad -y + \lambda y = 0, \quad x^2 + y^2 = 4$$

односно

$$x(1 + \lambda) = 0, \quad y(\lambda - 1) = 0, \quad x^2 + y^2 = 4$$

добијамо

1. $x = 0,\ \lambda = 1,\ y^2 = 4,\ y = \pm 2,\ \boxed{B(0,2)},\ \boxed{C(0,-2)}$
2. $1 + \lambda = 0,\ y = 0,\ x^2 = 4,\ x = \pm 2,\ \boxed{D(2,0)},\ \boxed{E(-2,0)}$

Вредности функције у издвојеним тачкама

X	A	B	C	D	E
$f(X)$	0	-4	-4	4	4

$\max\limits_{\mathcal{D}} f = f(D) = f(E) = 4, \quad \min\limits_{\mathcal{D}} f = f(B) = f(C) = -4$

12.2. Локални екстремуми у унутрашњости области $\mathcal{D}$

$$\begin{aligned} f'_x &= e^{-x^2-y^2}(-2x)(2x^2+3y^2) + e^{-x^2-y^2}(4x) \\ &= 2x(2 - 2x^2 - 3y^2)e^{-x^2-y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_y &= e^{-x^2-y^2}(-2y)(2x^2+3y^2) + e^{-x^2-y^2}(6y) \\ &= 2y(3 - 2x^2 - 3y^2)e^{-x^2-y^2} \end{aligned}$$

$$x(2 - 2x^2 - 3y^2) = 0, \quad y(3 - 2x^2 - 3y^2) = 0$$

СТ: $A(0,0),\ B(0,1),\ C(0,-1),\ D(1,0)$ и $E(-1,0)$

На граници области

$$L = f + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

$$L'_x = 2x\left(e^{-x^2-y^2}(2 - 2x^2 - 3y^2) + \lambda\right),\ L'_y = 2y\left(e^{-x^2-y^2}(3 - 2x^2 - 3y^2) + \lambda\right)$$

$L'_x = 0,\ L'_y = 0,\ x^2 + y^2 = 4$

СТ на кружници: $F(0,2),\ G(0,-2),\ H(2,0),\ I(-2,0)$

Вредности функције у издвојеним тачкама

X	A	B	C	D	E	F	G	H	I
$f(X)$	0	$3e^{-1}$	$3e^{-1}$	$2e^{-1}$	$2e^{-1}$	$12e^{-4}$	$12e^{-4}$	$8e^{-4}$	$8e^{-4}$

$\max\limits_{x \in D} f(x) = f(B) = f(C) = \dfrac{3}{e}, \quad \min\limits_{x \in D} = f(A) = 0.$

12.3. Локални екстремуми у унутрашњости области $\mathcal{D}$

$$f'_x = y - 2xy - \frac{1}{2}y^2, \quad f'_y = x - x^2 - xy$$

$$y(1 - 2x - y/2) = 0, \quad x(1 - x - y) = 0$$

СТ: $(0,0) \notin Int(\mathcal{D}),\ (0,2) \notin Int(\mathcal{D}),\ (1,0) \notin Int(\mathcal{D}),\ \boxed{A(1/3, 2/3)}$

На граници области $\mathcal{D}$

За $x = 0$ је $f(0, y) = 0$ За $y = 0$ је $f(x, 0) = 0$

За $x = 1$ је $f(1, y) = -\frac{1}{2}y^2$ (опада на $[0, 2]$)

За $y = 2$ је $f(x, 2) = -2x^2$ (опада на $[0, 1]$)

Заједничке граничне тачке

$\boxed{B(0,0)}$ $\boxed{C(0,1)}$ $\boxed{D(0,2)}$ $\boxed{E(1,2)}$

X	A	B	C	D	E
$f(X)$	$2/27$	0	0	0	-2

$\max\limits_{\mathcal{D}} f = f(A) = \frac{2}{27}$, $\min\limits_{\mathcal{D}} f = f(E) = -2$

12.4. ЛЕ унутар области

$f'_x = 2x - y,\ f'_y = -x + 2y;\ 2x = y,\ 2y = x;$ Стац.т.: $\boxed{A(0,0)}$

На граници $y = -x + 1$

$$\begin{aligned} f(x, -x+1) &= x^2 - x(-x+1) + x^2 + 1 - 2x \\ &= 3x^2 - 3x + 1 \\ &= g(x) \end{aligned}$$

$g'(x) = 6x - 3,$ Стац.т: $\boxed{B(1/2, 1/2)}$

На граници $y = x + 1$

$$\begin{aligned} f(x, x+1) &= x^2 - x(x+1) + x^2 + 1 + 2x \\ &= x^2 + x + 1 \\ &= h(x) \end{aligned}$$

$h'(x) = 2x + 1,$ Стац.т: $\boxed{C(-1/2, 1/2)}$

На граници $y = -x - 1$

$$\begin{aligned} f(x, -x-1) &= x^2 + x(x+1) + x^2 + 1 + 2x \\ &= 3x^2 + 3x + 1 \\ &= u(x) \end{aligned}$$

$u'(x) = 6x + 3,$ Стац.т: $\boxed{D(-1/2, -1/2)}$

На граници $y = x - 1$

$$\begin{aligned} f(x, x-1) &= x^2 - x(x-1) + x^2 + 1 - 2x \\ &= x^2 - x + 1 \\ &= v(x) \end{aligned}$$

$v'(x) = 2x - 1,$ Стац.т: $\boxed{E(1/2, -1/2)}$

Заједничке граничне тачке

$\boxed{F(1,0)}$ $\boxed{G(-1,0)}$ $\boxed{H(0,1)}$ $\boxed{I(0,-1)}$

Вредности функције у издвојеним тачкама

X	A	B	C	D	E	F	G	H	I
$f(X)$	0	1/4	3/4	1/4	3/4	1	1	1	1

$\max\limits_{\mathcal{D}} f = f(F) = f(G) = f(H) = f(I) = 1, \quad \min\limits_{\mathcal{D}} f = f(A) = 0$

12.5. Граница области

$$|y-1| = \begin{cases} y-1, & y \geq 1 \\ 1-y, & y < 1 \end{cases}$$

За $y \geq 1$ имамо $x - 4 \leq -(y-1)$, $y \leq -x+5$

За $y < 1$ имамо $x - 4 \leq -(1-y)$, $y \geq x-3$

Граница је одређена правама $p_1: \ y = -x+5$, $p_2: \ y = x-3$ и $p_3: \ x = 0$

Из $-x+5 = x-3$ следи $x = 4$, заједничка тачка правих p_1 и P_2 је $(4,1)$

ЛЕ у области

$f'_x = 2x-4, \ f'_y = 2y,$ Стац.т.: $\boxed{A(2,0)}$

На граници p_3

$f(0,y) = y^2$, $\boxed{B(0,0)}$

На граници p_2

$$\begin{aligned} f(x,x-3) &= x^2 + (x-3)^2 - 4x \\ &= 2x^2 - 10x + 9 \\ &= g(x) \end{aligned}$$

$g'(x) = 4x - 10$, $\boxed{C(5/2,-1/2)}$

На граници p_1

$$\begin{aligned} f(x,-x+5) &= x^2 + (-x+5)^2 - 4x \\ &= 2x^2 - 14x + 25 \\ &= h(x) \end{aligned}$$

$h'(x) = 4x - 14$, $\boxed{D(7/2,3/2)}$

Заједничке тачке на граници

$\boxed{E(0,-3)}$ $\boxed{F(0,5)}$ $\boxed{G(4,1)}$

Вредности функције у издвојеним тачкама

X	A	B	C	D	E	F	G
$f(X)$	-4	0	$-7/2$	1/2	9	25	1

$\max\limits_{\mathcal{D}} f = f(F) = 25, \quad \min\limits_{\mathcal{D}} f = f(A) = -4$

12.6. ЛЕ у области

$$f'_x = \cos x - \cos(x+y), \quad f'_y = \cos y - \cos(x+y)$$

Из $f'_x = 0$ и $f'_y = 0$ следи

$$\cos x - \cos y = 0, \quad y = \pm x + 2k\pi$$

Због $0 < x < 2\pi$ довољно је $y = x$. Тада је

$$\cos x - \cos 2x = 0, \quad 2x = \pm x + 2k\pi$$

Тачке $(2k\pi, 2k\pi)$ не припадају области, а од тачака $(2k\pi/3, 2k\pi/3)$ једино тачка $(2\pi/3, 2\pi/3)$ (за $k = 1$) припада области

Дакле, стац. т. је $\boxed{A(2\pi/3, 2\pi/3)}$

На граници

$f(0,y) = f(x,0) = f(x, 2\pi - x) = 0$

$\max\limits_{\mathcal{D}} f = f(A) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$\min\limits_{\mathcal{D}} f = f(X) = 0$, где је X било која тачка границе