4. ГРУПА

I колоквијум из МАТЕМАТИКЕ 2

17.04.2012.

Презиме и име ______________________ број индекса ____________

1. (*30 поена*) Дата је функција

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^4 + xy^6}{\sqrt{x^2+y^4}} \cdot \sin \dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Испитати непрекидност функције f у тачки $(0,0)$.

2. (*35 поена*) Одредити локалне екстремне вредности функције $f : (x,y) \mapsto z$ задате имплицитно једнакошћу

$$xz + z^2 + x^2 + 2yx + 2y^2 = 2.$$

3. (*35 поена*) Одредити најмању и највећу вредност функције

$$f(x,y) = 4x^2 + (y-3)^2 + 2$$

на скупу $D = \{(x,y) : \ x^2 \leqslant y \leqslant 9\}$.

Решења задатака 4. групе

1. *I начин:*

Уведимо поларне координате: $\quad x = \varrho\cos\varphi, \quad y = \varrho\sin\varphi.$

Тада имамо да је

$$\begin{aligned} L = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) &= \lim_{\varrho\to 0} \frac{2\,\varrho^4\cos^4\varphi + \varrho\cos\varphi\cdot\varrho^6\sin^6\varphi)}{\sqrt{\varrho^2\cos^2\varphi + \varrho^4\sin^4\varphi}}\cdot\sin\frac{1}{\varrho^2} = \lim_{\varrho\to 0}\frac{\varrho^4(2\cos^4\varphi + \varrho^3\cos\varphi\cdot\sin^6\varphi)}{\varrho\cdot\sqrt{\cos^2\varphi+\varrho^2\sin^4\varphi}}\cdot\sin\frac{1}{\varrho^2} \\ &= \lim_{\varrho\to 0}\frac{\varrho^3(2\cos^4\varphi+\varrho^3\cos\varphi\cdot\sin^6\varphi)}{\sqrt{\cos^2\varphi+\varrho^2\sin^4\varphi}}\cdot\sin\frac{1}{\varrho^2}\end{aligned}$$

Како су синуси и косинуси коначни бројеви (између -1 и 1) и како кад $\varrho\to 0$ онда и $\varrho^3\to 0$ и $\varrho^2\to 0$, добијамо да су и следећи чланови коначни:

$$2\cos^4\varphi+\varrho^3\cos\varphi\cdot\sin^6\varphi, \qquad \sqrt{\cos^2\varphi+\varrho^2\sin^4\varphi} \qquad \text{и} \qquad \sin\frac{1}{\varrho^2}.$$

Именилац разломка, $\sqrt{\cos^2\varphi+\varrho^2\sin^4\varphi}$, не може бити једнак 0, јер кад $\varrho\to 0$ онда је $\varrho\neq 0$, тј. $\varrho>0$, а не може истовремнео да важи $\cos^2\varphi = 0$ и $\sin^4\varphi = 0$ (јер је $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi = 1$).

Тиме смо показали да је $\dfrac{2\cos^4\varphi+\varrho^3\cos\varphi\cdot\sin^6\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi+\varrho^2\sin^4\varphi}}\cdot\sin\dfrac{1}{\varrho^2}$ коначан број, а како кад $\varrho\to 0$ онда и $\varrho^3\to 0$, то добијамо да је тражени лимес $L = 0$.

Како је $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, следи да је функција $f(x,y)$ непрекидна у тачки $(0,0)$.

II начин:

Посматрајмо апсолутну вредност разлике вредности функције:

$$|f(x,y)-f(0,0)| = \left|\frac{2x^4+xy^6}{\sqrt{x^2+y^4}}\cdot\sin\frac{1}{x^2+y^2} - 0\right| = \left|\frac{2x^4+xy^6}{\sqrt{x^2+y^4}}\right|\cdot\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|$$

Како је $-1\leqslant \sin t\leqslant 1$, то је $|\sin t|\leqslant 1$, за произвољан израз t (па и за $t = \frac{1}{x^2+y^2}$), па имамо:

$$|f(x,y)-f(0,0)| \leqslant \left|\frac{2x^4+xy^6}{\sqrt{x^2+y^4}}\right| \leqslant \left|\frac{2x^4}{\sqrt{x^2+y^4}}\right| + \left|\frac{xy^6}{\sqrt{x^2+y^4}}\right| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^4}}\cdot|2x^3| + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^4}}\cdot|xy^4|$$

(овде смо у првој неједнакости користили $|\sin t|\leqslant 1$, а у другој неједнакост троугла).

Даље, како је $0\leqslant y^4$ имамо да важи $x^2\leqslant x^2+y^4$, тј. $\sqrt{x^2}\leqslant\sqrt{x^2+y^4}$, тј. $|x|\leqslant\sqrt{x^2+y^4}$. Одатле добијамо да је $\dfrac{|x|}{|x|}\geqslant\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+y^4}}$, па смо показали да је $\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+y^4}}\leqslant 1$.

Слично, како је $0\leqslant x^2$ имамо да важи $y^4\leqslant x^2+y^4$, тј. $\sqrt{y^4}\leqslant\sqrt{x^2+y^4}$, тј. $y^2\leqslant\sqrt{x^2+y^4}$. Одатле добијамо да је $\dfrac{y^2}{y^2}\geqslant\dfrac{y^2}{\sqrt{x^2+y^4}}$, па смо показали да је $\dfrac{y^2}{\sqrt{x^2+y^4}}\leqslant 1$.

На основу ове 2 неједнакости имамо да је

$$|f(x,y)-f(0,0)|\leqslant|2x^3|+|xy^4|$$

Тиме смо добили да кад $x\to 0$ и $y\to 0$ важи (леву страну имамо јер је апсолутна вредност увек ненегативна, а за десну кад $x\to 0$ и $y\to 0$ онда и $2x^3\to 0$ и $xy^4\to 0$):

$$0\leqslant|f(x,y)-f(0,0)|\leqslant 0,$$

па по Леми о 2 полицајца добијамо да је

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}|f(x,y)-f(0,0)| = 0,$$

чиме смо показали непрекидност функције $f(x,y)$ у тачки $(0,0)$.

2. Означимо са (1) полазну једнакост:

$$xz + z^2 + x^2 + 2yx + 2y^2 = 2. \tag{1}$$

Када диференцирамо једнакост (1) по x (водите рачуна да код ових парцијалних извода y је константа, а z функција која зависи од x, стога за извод xz користимо извод производа, а за z^2 извод сложене функције!) добијамо:

$$1 \cdot z + x \cdot z'_x + 2z \cdot z'_x + 2x + 2y = 0. \tag{2}$$

Како кад тражимо локалне екстреме треба да важи $z'_x = 0$ добијамо да је $z + 2x + 2y = 0$.
Када диференцирамо једнакост (1) по y добијамо:

$$x \cdot z'_y + 2z \cdot z'_y + 2x + 4y = 0. \tag{3}$$

Како кад тражимо локалне екстреме треба да важи $z'_y = 0$ добијамо да је $2x + 4y = 0$, одакле добијамо $\boxed{x = -2y}$. Када то заменимо у $z + 2x + 2y = 0$ добијамо $\boxed{z = 2y}$.
Када ове 2 уоквирене једнакости заменимо у (1) добијамо

$$(-2y) \cdot 2y + (2y)^2 + (-2y)^2 + 2y(-2y) + 2y^2 = 2,$$

одакле је $y^2 = 1$, па имамо 2 решења $y = \pm 1$. Када то уврстимо у уоквирене једнакости добијамо стационарне тачке:

$$M_1(-2, 1) \quad (\text{уз } z = 2), \qquad\qquad M_2(2, -1) \quad (\text{уз } z = -2).$$

Да бисмо одредили парцијалне изводе другог реда диференцираћемо једнакости (2) и (3).
Када диференцирамо (2) по x добијамо:

$$z'_x + 1 \cdot z'_x + x \cdot z''_{xx} + 2z'_x \cdot z'_x + 2z \cdot z''_{xx} + 2 = 0.$$

Како кад тражимо локалне екстреме треба да важи $z'_x = 0$ добијамо да је

$$(x + 2z) \cdot z''_{xx} + 2 = 0. \tag{4}$$

Када диференцирамо (2) по y добијамо:

$$z'_y + x \cdot z''_{xy} + 2z'_y \cdot z'_x + 2z \cdot z''_{xy} + 2 = 0.$$

Како кад тражимо локалне екстреме треба да важи $z'_x = 0$ и $z'_y = 0$ добијамо да је

$$(x + 2z) \cdot z''_{xy} + 2 = 0. \tag{5}$$

Када диференцирамо (3) по y добијамо:

$$x \cdot z''_{yy} + 2z'_y \cdot z'_y + 2z \cdot z''_{yy} + 4 = 0.$$

Како кад тражимо локалне екстреме треба да важи $z'_y = 0$ добијамо да је

$$(x + 2z) \cdot z''_{yy} + 4 = 0. \tag{6}$$

Сада ћемо за обе стационарне тачке да испитамо природу екстрема (и то на 2 начина, преко A, B, C, Δ и Силвестеровим критеријумом).

Напомена. То су суштински 2 иста начина, али неки студенти су навикли да раде на један, а неки на други, па стога ћемо урадити на оба начина.

$\underline{M_1(-2,1) \text{ уз } z=2}$

I начин:

Из (4), (5) и (6) добијамо да је

$$A = z''_{xx}\Big|_{M_1} = -1, \qquad B = z''_{xy}\Big|_{M_1} = -1, \qquad C = z''_{yy}\Big|_{M_1} = -2.$$

Онда је $\Delta = B^2 - AC = -1 < 0$, па ово јесте екстрем, а због $A < 0$ добијамо да је M_1 локални максимум. У тој тачки је максимална вредност имплицитно задате функције $z_{\max} = z\Big|_{M_1} = 2$.

II начин:

Вредности парцијалних извода у тачки M_1 добијамо исто као у I начину, па имамо детерминанте

$$D_1 = |-1| = -1 < 0 \qquad \text{и} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 > 0.$$

Како је $D_1 < 0$ и $D_2 > 0$ тачка M_1 је локални максимум.

Максимална вредност функције је $z_{\max} = z\Big|_{M_1} = 2$.

$\underline{M_1(-2,1) \text{ уз } z=2}$

I начин:

Из (4), (5) и (6) добијамо да је

$$A = z''_{xx}\Big|_{M_2} = 1, \qquad B = z''_{xy}\Big|_{M_2} = 1, \qquad C = z''_{yy}\Big|_{M_2} = 2.$$

Онда је $\Delta = B^2 - AC = -1 < 0$, па ово јесте екстрем, а због $A > 0$ добијамо да је M_2 локални минимум. У тој тачки је минимална вредност имплицитно задате функције $z_{\min} = z\Big|_{M_2} = -2$.

II начин:

Вредности парцијалних извода у тачки M_2 добијамо исто као у I начину, па имамо детерминанте

$$D_1 = |1| = 1 > 0 \qquad \text{и} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 > 0.$$

Како је $D_1 > 0$ и $D_2 > 0$ тачка M_2 је локални минимум.

Минимална вредност функције је $z_{\min} = z\Big|_{M_2} = -2$.

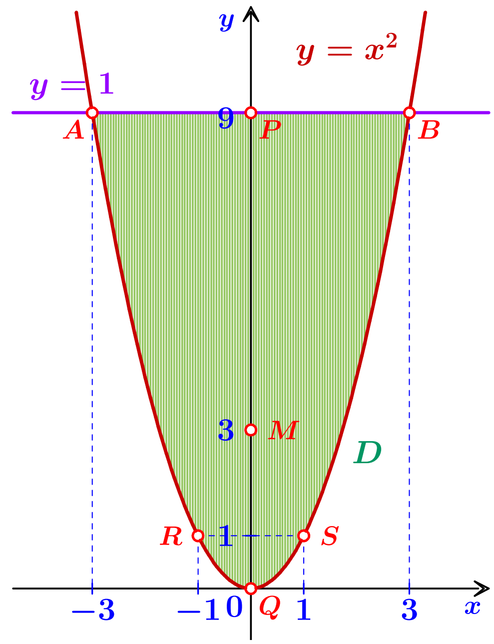
3. Доња граница области D је парабола $y = x^2$, а горња је права $y = 9$ (и ове 2 криве припадају области D!). Када нађемо пресек ове 2 криве (тј. решимо систем $y = x^2$, $y = 9$) добијамо тачке $A(-3, 9)$ и $B(3, 9)$. Ове 2 тачке су нам први кандидати за најмању и највећу вредност.
Сада можемо нацртати област D – слика десно.

локални екстрем

Парцијални изводи ове функције су

$$f'_x = 8x \quad \text{и} \quad f'_y = 2(y - 3).$$

Када њих изједначимо са 0, добијамо $x = 0$, $y = 3$. Како ова тачка припада области D, тј. $M(0, 3) \in D$, имамо да је тачка $M(0, 3)$ још један од кандидата за најмању и највећу вредност.



условни екстрем $y = 9$

Убацимо $y = 9$ у функцију $f(x, y) = 4x^2 + (y - 3)^2 + 2$ и добијамо функцију једне променљиве (x):

$$f(x) = 4x^2 + (9 - 3)^2 + 2 = 4x^2 + 38.$$

Њен извод је $f'(x) = 8x = 0$ за $x = 0$ (тад је $y = 9$ из услова), па добијамо још једну тачку $P(0, 9) \in D$.

условни екстрем $y = x^2$

Убацимо $y = x^2$ у функцију $f(x, y) = 4x^2 + (y - 3)^2 + 2$ и добијамо функцију једне променљиве (x):

$$f(x) = 4x^2 + (x^2 - 3)^2 + 2.$$

Њен извод је $f'(x) = 8x + 2(x^2 - 3) \cdot 2x = 4x(x^2 - 1) = 0$ за $x = 0$ (тад је $y = 0^2 = 0$ из услова) и за $x = -1$ (тад је $y = (-1)^2 = 1$ из услова) и за $x = 1$ (тад је $y = 1^2 = 1$ из услова), па добијамо још 3 тачке $Q(0, 0), R(-1, 1), S(1, 1) \in D$.

За сваку од ових 7 тачака кандидата, A, B, M, P, Q, R, S израчунаћемо вредност функције, па ћемо онда одабрати најмању и највећу:

$$\begin{aligned}
A(-3, 9) \quad &\Rightarrow \quad f\Big|_A = 74,\\
B(3, 9) \quad &\Rightarrow \quad f\Big|_B = 74,\\
M(0, 3) \quad &\Rightarrow \quad f\Big|_M = 2,\\
P(0, 9) \quad &\Rightarrow \quad f\Big|_P = 38,\\
Q(0, 0) \quad &\Rightarrow \quad f\Big|_Q = 11,\\
R(-1, 1) \quad &\Rightarrow \quad f\Big|_R = 10,\\
S(1, 1) \quad &\Rightarrow \quad f\Big|_S = 10.
\end{aligned}$$

На основу тога, добијамо да је:

најмања вредност у области D функције $\boxed{f_{\min} = 2}$ и она се постиже у тачки $M(0, 3)$,

а највећа вредност у области D функције је $\boxed{f_{\max} = 74}$ и она се постиже у тачкама $A(-3, 9)$ и $B(3, 9)$.