МАТЕМАТИКА 2

Први писмени колоквијум, 20.4.2013

Група 8

Решења задатака и резултати

Драган Ђорић

Задаци и решења

1. Доказати да је функција

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

непрекидна у тачки $(0,0)$, а затим доказати да не постоје парцијални изводи те функције у тачки $(0,0)$.

Решење: За $(x,y)\neq(0,0)$ је

$$|f(x,y)|\leq\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{x^2+y^2}\to 0,\quad (x,y)\to(0,0).$$

Према томе, $f(x,y)\to 0$ када $(x,y)\to(0,0)$. Како је $f(0,0)=0$, функција f је непрекидна у тачки $(0,0)$.

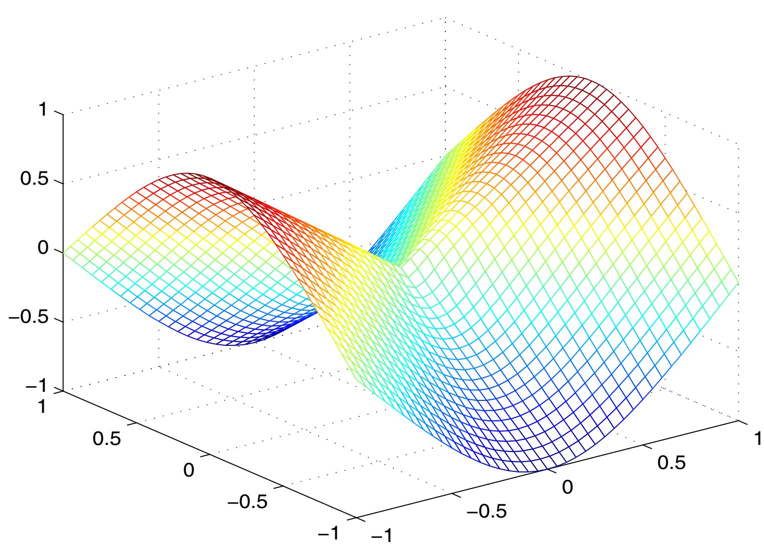
Пошто је

$$\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\frac{(\Delta x)^2}{\Delta x\sqrt{(\Delta x)^2}}=\frac{\Delta x}{|\Delta x|}=\begin{cases}1, & \Delta x>0\\ -1, & \Delta x<0,\end{cases}$$

не постоји гранична вредност количника $\dfrac{\Delta_x f(0,0)}{\Delta x}$ када $\Delta x\to 0$.

Према томе, не постоји парцијални извод по x функције f у тачки $(0,0)$, а самим тим не постоје ни парцијални изводи функције f у тој тачки.

На слици је дат график функције f у околини тачке $(0,0)$.



2. Одредити локалне екстремуме функције $f:(x,y)\mapsto z$ задате имплицитно једнакошћу

$$x^2+y^2+z^2-3xz-xy-4x+2y+4z+4=0.$$

Решење: Ако је $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3xz-xy-4x+2y+4z+4$, тада је

$$z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z},\quad z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z},\tag{1}$$

па стационарне тачке добијамо из система $F'_x=0$, $F'_y=0$ и $F=0$. Како је $F'_x=2x-3z-y-4$ и $F'_y=2y-x+2$, из једнакости $F'_x=0$ и $F'_y=0$ следи да је $z=y$ и $x=2y+2$. Заменом x и z у једнакости $F=0$ добијамо да је $y(y+1)=0$, што значи да је $y=0$ или $y=1$. Према томе, стационарне тачке су $A(2,0)$ и $B(0,-1)$, при чему је $f(A)=0$ и $f(B)=-1$.

Из једнакости (1) следи да је

$$z''_{x^2}=-\frac{(F''_{x^2}+F''_{xz}\cdot z'_x)F'_z-F'_x(F''_{zx}+F''_{z^2}\cdot z'_x)}{F'^2_z}.\tag{2}$$

Обзиром да је у стационарним тачкама $z'_x=F'_x=0$, из једнакости (2) видимо да у стационарним тачкама важи $z''_{x^2}=-\dfrac{F''_{x^2}}{F'_z}$. На исти начиин из једнакости (1) добијамо да у стационарним тачкама важи $z''_{y^2}=-\dfrac{F''_{y^2}}{F'_z}$ и $z''_{xy}=-\dfrac{F''_{xy}}{F'_z}$.

Како је $F''_{x^2}=F''_{y^2}=2$, $F''_{xy}=-1$ и $F'_z=2z-3x+4$, за функцију f у стационарним тачкама важи

$$z''_{x^2}=z''_{y_2}=\frac{-2}{2z-3x+4},\quad z''_{xy}=\frac{1}{2z-3x+4}.$$

Специјално, у тачки A је

$$z''_{x^2}=z''_{y^2}=1,\quad z''_{xy}=-\frac{1}{2},\quad d^2f(A)=dx^2-dxdy+dy^2=\frac{1}{2}\left(dx^2+dy^2+(dx-dy)^2\right),$$

а у тачки B је

$$z''_{x^2}=z''_{y^2}=-1,\quad z''_{xy}=\frac{1}{2},\quad d^2f(B)=-dx^2+dxdy-dy^2=-d^2f(A).$$

Према томе, функција $f:(x,y)\mapsto z$ у тачки A има локални минимум који је једнак 0, а у тачки B има локални максимум који је једнак -1. Дакле,

$$f_{\min}=f(A)=0,\quad f_{\max}=f(B)=-1.$$

3. Одредити најмању и највећу вредност функције $f(x,y) \mapsto 2x^2 - xy + 2y^2 + 5x - 5y$ на скупу $\mathcal{D} = \{(x,y)\ :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 9\}$.

Решење: Област $\mathcal{D}$ је део круга с центром у $(0,0)$ и полупречником дужине 3. Функција f има само једну стационарну тачку $A(-1,1)$ и она припада области $\mathcal{D}$.

Границу области $\mathcal{D}$ чине полупречници GE и GF и део EF (мањи) кружнице $x^2+y^2=9$, где су G (центар кружнице), $E(-3,0)$ и $F(0,3)$ граничне тачке области $\mathcal{D}$.

Вредности функције f у поменутим тачкама су: $f(A) = -5$, $f(E) = f(F) = 3$ и $f(G) = 0$. На полупречнику GE је $f(x,y) = f(x,0) = 2x^2+5x$, а на полупречнику GF је $f(0,y) = 2y^2-5y$. Минимуми ових квадратних функција се достижу за $x = -5/4$ и за $y = 5/4$, па тачке $B(-5/4,0)$ и $C(0,5/4)$ треба узети као кандидате за апсолутни екстремум функције f на области $\mathcal{D}$. Међутим, како је $f(A) < f(B) = f(C) = -25/8 < f(E)$, тачке B и C ипак нису тачке апсолутног екстремума функције f на $\mathcal{D}$.

На луку EF имамо проблем условног екстремума функције f при услову $\varphi(z,y) = 0$, где је $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 9$. Лагранжова функција $L(x,y) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$ има две стационарне тачке од којих само тачка $D(-3/\sqrt{2}, 3/\sqrt{2})$ припада области $\mathcal{D}$. Како је $0 < f(D) = \dfrac{15}{2}\left(3 - 2\sqrt{2}\right) < 3 = f(E)$, тачка D није тачка апсолутног екстремума функције f на $\mathcal{D}$.

Према томе,

$$\min_{\mathcal{D}} f = f(A) = -5 \qquad \max_{\mathcal{D}} f = f(E) = f(F) = 3.$$

На слици је дат график функције f на квадрату $[-3,0] \times [0,3]$.