МАТЕМАТИКА 2

Први колоквијум (16.4.2010) - Група 6

1. Испитати непрекидност функције $f : R^2 \to R$ у тачки $(0,0)$ ако је

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \sin \dfrac{1}{x^4+y^4} \cos \dfrac{1}{x^4+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Решење: За $(x,y) \neq (0,0)$ је

$$|f(x,y)| \leq \frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2} \leq \frac{|x|^3}{x^2+y^2} + \frac{|y|^3}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2}|x| + \frac{y^2}{x^2+y^2}|y| \leq |x| + |y|.$$

Према томе, $f(x,y) \to f(0,0)$ када $(x,y) \to (0,0)$. Како је $f(0,0) = 0$, функција f је непрекидна у тачки $(0,0)$.

2. Одредити Тејлоров полином другог степена који у околини тачке $B(1,0)$ апроксимира функцију $f : (x.y) \mapsto z$ дефинисану имплицитно са

$$z^2 + 3x^2 + y^2 + 2xy + 6y - 2xz - 3 = 0, \quad z \neq 0.$$

Решење: За $x = 1$ и $y = 0$ из дате једнакости и услова $z \neq 0$ добијамо $\boxed{z(B) = 2}$.

Диференцирањем по x дате једнакости имамо

$$2zz'_x + 6x + 2y - 2z - 2xz'_x = 0, \tag{1}$$

одакле заменом $x = 1$, $y = 0$ и $z = 2$ добијамо $\boxed{z'_x(B) = -1}$.

Слично, диференцирањем дате једнакости по y имамо

$$2zz'_y + 2y + 2x + 6 - 2xz'_y = 0, \tag{2}$$

одакле добијамо $\boxed{z'_y(B) = -4}$.

Диференцирањем једнакости (1) по x и заменом $x = 1$, $y = 0$, $z = 2$ и $z'_x = -1$ добијамо $\boxed{z''_{x^2}(B) = -6}$, а диференцирањем једнакости (1) по y и заменом наведених вредности, као и $z'_y = -4$, добијамо $z''_{xy}(B) = -9$.

Диференцирањем једнакости (2) по y и заменом одговарајућих вредности добијамо $\boxed{z''_{y^2}(B) = -17}$.

Узимајући у обзир вредности парцијалних извода првог и другог реда функције f у тачки B имамо

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= z(B) + dz(B) + \frac{1}{2}d^2z(B) \\ &= 2 - dx - 4dy + \frac{1}{2}\left[-6dx^2 + 2 \cdot (-9)dxdy - 17dy^2\right] \\ &= 2 - (x-1) - 4y - 3(x-1)^2 - 9(x-1)y - \frac{17}{2}y^2 \\ &= 5x + 5y - 3x^2 - \frac{17}{2}y^2 - 9xy. \end{aligned}$$

3. Одредити локалне екстремуме функције $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ при услову $5(x + y)^2 = 4(xy + 2)$.

Решење: Пошто дати услов можемо написати у облику $\varphi(x, y) = 0$, где је $\varphi(x, y) = 5x^2 + 5y^2 + 6xy - 8$, Лагранжова функција F је дата са

$$F(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + \lambda(5x^2 + 5y^2 + 6xy - 8).$$

Налажењем парцијалних извода функције F добијамо систем за стационарне тачке

$$\begin{aligned} 2x + 5\lambda x + 3\lambda y &= 0 \\ 2y + 5\lambda y + 3\lambda x &= 0 \\ 5x^2 + 5y^2 + 6xy &= 8 \end{aligned}$$

Прве две једначине можемо посматрати као хомоген систем

$$\begin{aligned} (2 + 5\lambda)x + 3\lambda y &= 0 \\ 3\lambda x + (2 + 5\lambda)y &= 0 \end{aligned}$$

по x и y. Тривијално решење тог система не даје решење целог система (због треће једначине). Услов за нетривијална решења је

$$\begin{vmatrix} 2 + 5\lambda & 3\lambda \\ 3\lambda & 2 + 5\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Израчунавањем детерминанте добијамо квадратну једначину $4\lambda^2+5\lambda+1 = 0$ чија су решења $\lambda_1 = -1/4$ и $\lambda_2 = -1$.

За λ_1 из прве једначине је $y = x$, а из треће $x^2 = 1/2$.

За λ_2 из прве једначине је $y = -x$, а из треће $x^2 = 2$.

Према томе, стационарне тачке функције F су: $A^*(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, -1/4)$, $B^*(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, -1/4)$, $C^*(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -1)$, $D^*(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -1)$, а стационарне тачке функције f при услову $\varphi(x, y) = 0$ су: $A(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $B(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, $C(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $D(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Напомена. Други начин за решавање овог система је да се из прве две једначине (одузимањем једне од друге) добије једнакост $(x - y)(1 + \lambda) = 0$. Затим се разматрају случајеви $x = y$ и $\lambda = -1$.

Парцијални изводи другог реда функције F су:

$$F''_{x^2} = 4 + 10\lambda,\ F''_{xy} = 6\lambda,\ F''_{y^2} = 4 + 10\lambda,$$

па је

$$d^2F(A^*) = d^2F(B^*) = \frac{3}{2}(dx^2 - 2dxdy + dy^2) = \frac{3}{2}(dx - dy)^2 \geq 0$$

Из услова $\varphi(x, y) = 0$ следи да је

$$5xdx + 5ydy + 3xdy + 3ydx = 0.$$

За тачке A и B је $x = y$, што даје $dy = -dx$, па је за $dx \neq 0$

$$d^2F(A^*) = d^2F(B^*) = \frac{3}{2}(dx + dx)^2 = 6dx^2 > 0.$$

Према томе, у тачкама A и B функција f има локални минимум при услову $\varphi(x, y) = 0$.

Слично се добија за тачке C и D да је $dy = dx$ и

$$d^2F(C^*) = d^2F(D^*) = -(dx + dy)^2 = -24dx^2 < 0,$$

што значи да у тачкама C и D функција f има локални максимум при услову $\varphi(x, y) = 0$.

Драган Ђорић