МАТЕМАТИКА 2

Други писмени колоквијум, 12.6.2013

Група 7

Решења задатака и резултати

Драган Ђорић

Задаци и решења

1. Израчунати $\int \frac{\sin^2 x + 3}{\cos^2 x} dx.$

Решење: Ако $\sin^2 x$ заменимо са $1 - \cos^2 x$ имамо да је

$$I = \int \frac{\sin^2 x + 3}{\cos^3 x} dx = 4 \int \frac{dx}{\cos^3 x} - \int \frac{dx}{\cos x} = 4A - B.$$

На интеграл A можемо применити парцијалну интеграцију. За $u = \frac{1}{\cos x}$ и $dv = \frac{dx}{\cos^2 x}$ је $du = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ и $v = \tan x$, па је

$$A = \frac{\tan x}{\cos x} - \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx = \frac{\tan x}{\cos x} - \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^3 x} dx = \frac{\tan x}{\cos x} - A + B.$$

Према томе, $2A = \frac{\tan x}{\cos x} + B$, што значи да је за интеграле A и I довољно израчунати интеграл B.

Како је

$$B = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} \right| + C,$$

то је

$$I = 4A - B = 2\frac{\tan x}{\cos x} + B = 2\frac{\tan x}{\cos x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} \right| + C.$$

Напомена. Из претходног решења имамо функцију

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} \right|$$

која је примитивна функција интеграла B. Решавањем тог интеграла другим начинима добијамо друге примитивне функције, као што су

$$F_1(x) = \ln \left| \frac{\sin x + 1}{\cos x} \right|,$$

$$F_2(x) = \ln \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right|,$$

$$F_3(x) = \ln \left| \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right| - \ln \left| \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right|,$$

$$F_4(x) = \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2} + 1}{\tan \frac{x}{2} - 1} \right|.$$

Друго решење. Пошто је

$$A = \int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\cos x \, dx}{\cos^4 x} = \int \frac{d(\sin x)}{(1 - \sin^2 x)^2},$$

сменом $\sin x = t$ добијамо $A = \int \frac{dt}{(1-t^2)^2}$. Применом парцијалне интеграције на интеграл $B = \int \frac{dt}{1-t^2}$, узимајући $u = \frac{1}{1-t^2}$ и $dv = dt$, имамо да је $B = \frac{t}{t^2-1} + 2B - 2A$. Из ове једнакости следи да је $2A = B + \frac{t}{1-t^2}$, односно

$$I = 4A - B = 2B + \frac{2t}{1-t^2} - B = \frac{2t}{1-t^2} + B = 2\frac{\sin x}{\cos^2 x} + B = 2\frac{\tan x}{\cos x} + F(x) + C.$$

Напомена. Ако за интеграл A уведемо стандардну тригонометријску смену $t = \tan\dfrac{x}{2}$, тада (након дужег рачунања) добијамо да је

$$
\begin{aligned}
A &= 2\int \frac{t^4+2t^2+1}{(1-t^2)^3}\\
&= \frac{t^3+t}{(1-t^2)^2} - \frac{1}{2}\ln|1-t| + \frac{1}{2}\ln|1+t| + C.
\end{aligned}
$$

Треће решење. Ако у интегралу I уведемо смену $\sin x = t$ добијамо

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{\sin^2 x+3}{\cos^4 x}\,\cos x dx\\
&= \int \frac{t^2+3}{(1-t)^2(1+t)^2}dt\\
&= \frac{1}{2}\int\frac{dt}{1-t} + \int\frac{dt}{(1-t)^2} + \frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t} + \int\frac{dt}{(1+t)^2}\\
&= -\frac{1}{2}\ln|1-t| + \frac{1}{1-t} + \frac{1}{2}\ln|1+t| - \frac{1}{1+t} + C\\
&= \frac{2t}{1-t^2} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C\\
&= 2\frac{\tan x}{\cos x} + F(x) + C.
\end{aligned}
$$

Напомена. Ако за интеграл I уведемо стандардну тригонометријску смену $t = \tan\dfrac{x}{2}$, тада (након заморног рачунања) добијамо да је

$$
\begin{aligned}
I &= 2\int \frac{3t^4+10t^2+3}{(1-t^2)^3}\\
&= 4\frac{t^3+t}{(1-t^2)^2} - \ln|1-t| + \ln|1+t| + C.
\end{aligned}
$$

Четврто решење. Ако уведемо смену $\tan x = t$ (сасвим нестандардну за овај интеграл), тада је

$$
\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2},
$$

па је

$$
I = 4A - B = 4\int\sqrt{1+t^2} - \int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = 4P - \ln(t+\sqrt{1+t^2}).
$$

Парцијалном интеграцијом се лако добија да је

$$
P = \frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln(t+\sqrt{1+t^2}) + C.
$$

Према томе, имамо да је

$$
\begin{aligned}
I &= 2t\sqrt{1+t^2} + \ln(t+\sqrt{1+t^2}) + C\\
&= 2\tan x\sqrt{1+tan^2 x} + \ln(\tan x + \sqrt{1+\tan^2 x}) + C\\
&= 2\frac{\tan x}{\cos x} + \ln\left|\frac{\sin x + 1}{\cos x}\right| + C\\
&= 2\frac{\tan x}{\cos x} + F_1(x) + C.
\end{aligned}
$$

2. Израчунати запремину тела насталог ротацијом око x-осе фигуре ограничене кривом $y = x\sqrt{3\ln\dfrac{1+x}{1-x}}$ и правама: $y = 0$, $x = 0$ и $x = 1/2$.

Решење: Фигура ограничена датим линијама је криволинијски трапез који ротира око x-осе На основу формуле за запремину ротационог тела имамо да је

$$V = \pi\int_0^{1/2} y^2(x)dx = 3\pi\int_0^{1/2} x^2\ln\frac{1+x}{1-x}dx = 3\pi\ I.$$

Ако на интеграл I применимо парцијалну интеграцију са $u = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$ и $dv = x^2dx$, добијамо

$$du = \frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}dx = \frac{2dx}{1-x^2}, \quad v = \frac{x^3}{3},$$

па је

$$\begin{aligned} I &= \frac{x^3}{3}\ln\frac{1+x}{1-x}\Big|_0^{1/2} - \frac{2}{3}\int_0^{1/2}\frac{x^3dx}{1-x^2} \\ &= \frac{1}{8\cdot 3}\ln 3 - \frac{1}{3}\int_0^{1/4}\frac{tdt}{1-t} \\ &= \frac{1}{8\cdot 3}\ln 3 + \frac{1}{3}\left(t + \ln|t-1|\right)\Big|_0^{1/4} \\ &= \frac{1}{8\cdot 3}\ln 3 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4} + \ln\frac{3}{4}\right). \end{aligned}$$

Према томе,

$$V = 3\pi I = \frac{\pi}{8}\ln 3 + \frac{\pi}{4} + \pi\ln\frac{3}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{9}{8}\pi\ln 3 - 2\pi\ln 2.$$

---

3. Израчунати

$$\iint_D \frac{3x+y}{1+(x-y)^2}\ \arctan(x-y)dxdy,$$

где је D паралелограм ограничен правама: $y = -3x+1$, $y = -3x+\sqrt{3}$, $y = x$ и $y = x-1$.

Решење: Трансформацијом $u = y - x$, $v = 3x + y$ област интеграције D пресликава се у правоугаоник $G : [-1, 0]\times[1, \sqrt{3}]$, при чему је Јакобијан једнак $-1/4$. Према томе,

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{3x+y}{1+(x-y)^2}\ \arctan(x-y)dxdy &= \frac{1}{4}\iint_G \frac{v}{1+u^2}\arctan(-u)dudv \\ &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{0}\frac{\arctan u}{1+u^2}du\cdot\int_1^{\sqrt{3}} vdv \\ &= -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\arctan^2 u\Big|_{-1}^{0}\cdot\frac{v^2}{2}\Big|_1^{\sqrt{3}} \\ &= -\frac{1}{8}\left(0 - \frac{\pi^2}{16}\right)\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\pi^2}{128}. \end{aligned}$$
