ИНТЕГРАЛИ
Задаци са колоквијума

Драган Ђорић

Садржај

Студентима генерације 2010/2011 (групе А9, А10 и А11)

Ово је још једна мала збирка која садржи 173 задатка који су се бар једном појавили на другом колоквијуму из предмета *Математика* 2 у периоду од 1995. до 2010. године. Задаци су разврстани по темама из којих се дају задаци за други колоквијум, а у оквиру сваке теме разврстани су и по годинама.

1 Неодређени интеграл

Колоквијум, 2010

1.1 $\displaystyle\int \frac{\ln(x^2+4)}{(x+2)^2}dx$

1.2 $\displaystyle\int \frac{\arctan\frac{x}{2}}{(x-2)^2}dx$

1.3 $\displaystyle\int \frac{\ln(x^2+9)}{(x-3)^2}dx$

1.4 $\displaystyle\int \frac{\arctan\frac{x}{3}}{(x+3)^2}dx$

Колоквијум, 2009

1.5 $\displaystyle\int \frac{2\ln^2 x+5\ln x+2}{x(\ln x-2)(\ln^2 x+4\ln x+8)}dx$

1.6 $\displaystyle\int \frac{(9\cos x-10-3\cos^2 x)\cdot\sin x}{(\cos x+2)(\cos^2 x-4\cos x+8)}dx$

1.7 $\displaystyle\int \frac{(3\sin^2 x+2\sin x+11)\cdot\cos x}{(\sin x-1)(\sin^2 x+2\sin x+5)}dx$

1.8 $\displaystyle\int \frac{3e^{3x}-e^{2x}+4e^x}{(e^x+1)(e^{2x}-2e^x+5)}dx$

Колоквијум, 2008

1.9 $\displaystyle\int \frac{3\sin 2x}{\sin^2 x+1}dx$

1.10 $\displaystyle\int \frac{3\ln x}{x(\ln^3 x-1)}dx$

1.11 $\displaystyle\int \frac{3\sin 2x}{\cos^2 x+1}dx$

1.12 $\displaystyle\int \frac{3e^{2x}dx}{e^{3x}-1}$

1.13 $\displaystyle\int \frac{2\sin^2 x}{1+2\cos^2 x}dx$

1.14 $\displaystyle\int \frac{2(e^x+e^{2x})}{e^{4x}-1}dx$

1.15 $\displaystyle\int \frac{1-\cos 2x}{2+\cos 2x}dx$

1.16 $\displaystyle\int \frac{2(1+\ln x)}{x(\ln^4 -1)}dx$

Колоквијум, 2007

1.17 $\int \frac{3x^2 - x - 2}{x^3 + 8} dx$

1.18 $\int \frac{4x^2 + 3x + 2}{x^3 - 8} dx$

1.19 $\int \frac{x^2 - 3x}{(x-1)(x^2 - 2x + 3)} dx$

1.20 $\int \frac{x^2 + 3x}{(x+1)(x^2 + 2x + 3)} dx$

1.21 $\int \frac{3x^2 + 5x}{(x-1)(x^2 + 2x + 5)} dx$

1.22 $\int \frac{3x^2 - 4x + 1}{(x+1)(x^2 - 2x + 5)} dx$

1.23 $\int \frac{x^2 + 5x + 1}{(x+2)(x^2 + 2x + 5)} dx$

1.24 $\int \frac{-3x - 4}{(x-2)(x^2 - 2x + 5)} dx$

Колоквијум, 2006

1.25 $\int \frac{(9\sin x + 2)\cos x}{\sin^2 x + 6\sin x + 58} dx$

1.26 $\int \frac{(7\cos x - 3)\sin x}{\cos^2 x + 4\cos x + 40} dx$

1.27 $I = \int \frac{(5e^x + 2)e^x}{e^{2x} - 8e^x + 41} dx$

1.28 $\int \frac{(3e^x - 4)e^x}{e^{2x} - 12e^x + 52} dx$

1.29 $I = \int \frac{(9e^x + 2)e^x}{e^{2x} + 6e^x + 58} dx$

1.30 $I = \int \frac{(\sin x - 5)\cos x}{\sin^2 x + 8\sin x + 97} dx$

Колоквијум, 2005

Немам задатке.

Колоквијум, 2004

1.31 $\int \frac{\sin 2x - 2\cos^3 x}{\sin^3 x + 1} dx$

1.32 $\int \frac{\ln(1 + \cos x)}{\sin^2 x} dx$

1.33 $\int x \cdot \arcsin x dx$

1.34 $\int \frac{\sin x dx}{\cos x + \cos^2 x + \cos^3 x}$

Колоквијум, 2003

1.35 $\int \frac{(1+\sin x)\cos x}{(1+\cos x)\sin x} dx$

1.36 $\int \frac{\sin x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$

1.37 $\int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x - \cos^3 x}$

Колоквијум, 2002

1.38 $\int \frac{1 + lnx}{1 + (xlnx)^3} dx$

1.39 $\int \frac{dx}{(tgx - 1)^2}$

1.40 *Одредити везу између* I_n *и* I_{n-2}, $(n \in N,\ n > 2)$ *ако је*

$$I_n = \int arcsin^n x\, dx.$$

1.41 $\int \frac{dx}{4 + tgx + 4ctgx}$

Колоквијум, 2001

1.42 $\int \arcsin x \cdot \arccos x dx$

1.43 $\int \frac{xe^{3x^2/2}}{\left(e^{x^2} + 1\right)^2} dx$

1.44 $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{-x^2 + 4x - 3}}$

1.45 $\int \frac{\sin x(1 - \cos x)}{\cos x(1 + \cos^2 x)} dx$

Колоквијум, 2000

1.46 *Израчунати* $\int_0^{\pi/2} \sin 2x \arctan(\cos^2 x) dx.$

1.47 $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x + 1}$

1.48 $\int \frac{x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$

1.49 *Израчунати* $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x + \sin x}{\sin x + \cos x + 1} dx.$

Колоквијум, 1999

Колоквијум није одржан због бомбардовања Југославије од стране NATO пакта.

Колоквијум, 1998

1.50 $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$

1.51 $\int x \sin \sqrt{x}\, dx$

Колоквијум, 1997

1.52 $\int \frac{x \ln x}{(x^2-1)^{3/2}} dx$

1.53 *Израчунати* $\int_0^1 \frac{f(x)dx}{f(x)+f(1-x)}$*, где је* $f \in C[0,1]$ *и* $f(x) > 0$ *за* $x \in [0,1]$.

Колоквијум, 1996

1.54 $\int \frac{\sqrt{\sin x}}{\cos x} dx$

1.55 $\int \frac{5e^x}{e^{4x} - 3e^{2x} - 4} dx$

Колоквијум, 1995

1.56 $\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} dx$

1.57 $\int \frac{x^2 \arctan x}{1+x^2} dx$

2 Одређени интеграл

Колоквијум, 2010

2.1 *Израчунати дужину лука криве* $y = \frac{1}{8}(4e^{2x} + e^{-2x})$, $0 \le x \le 1$.

2.2 *Израчунати дужину лука криве дате са* $x(t) = t \sin t$, $y(t) = t \cos t$ *за* $\sqrt{2} \le t \le 2\sqrt{6}$.

2.3 *Израчунати запремину тела које настаје ротацијом око* x*-осе фигуре ограничене линијама* $y = \sqrt{\arcsin \frac{1}{x}}$, $y = 0$, $x = 1$ *и* $x = 2$.

2.4 *Израчунати површину површи настале ротацијом око* x*-осе криве* $y = e^{-x} + \frac{1}{4}e^x$ *за* $0 \le x \le 1$.

Колоквијум, 2009

2.5 *Израчунати запремину тела које настаје ротацијом око* x*-осе фигуре ограничене линијама* $y = \sqrt{\sqrt{x} \cdot \sin \sqrt{x}}$, $y = 0$ *за* $0 \le x \le \pi^2/4$.

2.6 *Израчунати површину површи настале ротацијом око x-осе криве $y = \ln x - \frac{x^2}{8}$ за $\sqrt{e} \le x \le e$.*

2.7 *Израчунати запремину тела које настаје ротацијом око x-осе фигуре ограничене линијама $y = \sqrt{\sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}}}$, $y = 0$ за $0 \le x \le 1$.*

2.8 *Израчунати површину површи настале ротацијом око x-осе криве $y = x^2 - \frac{\ln x}{8}$ за $\sqrt{e} \le x \le e$.*

Колоквијум, 2008

2.9 *Израчунати површину фигуре ограничене кривом $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ и правама $y = 1$ и $x = 0$.*

2.10 *Израчунати запремину тела које настаје ротацијом око x-осе фигуре ограничене кривом $y = \sqrt{x}\cos x$ и правама $y = 0$, $x = \pi/4$ и $x = 3\pi/4$.*

2.11 *Израчунати запремину тела које настаје ротацијом око x-осе фигуре ограничене кривом $y = \sqrt{\ln(x + \sqrt{x^2+1}}$ и правама $y = 0$, $x = 0$ и $x = 2$.*

2.12 *Израчунати површину фигуре ограничене кривом $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$ и правама $y = 1$ и $x = 0$.*

2.13 *Израчунати површину површи настале ротацијом око x-осе криве $x = 1 + \left(\dfrac{y-1}{2}\right)^2$ за $0 \le y \le 1$.*

2.14 *Израчунати дужину лука криве задате са $x = t^2 \sin t$, $y = t^2 \cos t$ за $0 \le t \le \sqrt{5}$.*

2.15 *Израчунати дужину лука криве $y = 2\ln(x + \sqrt{x^2-4})$ за $2\sqrt{5} \le x \le 2\sqrt{10}$.*

2.16 *Израчунати површину површи настале ротацијом око y-осе криве $y = 1 + \left(\dfrac{x-1}{2}\right)^2$ за $0 \le x \le 1$.*

Колоквијум, 2007

2.17 *Израчунати запремину тела које настаје ротацијом око x-осе фигуре ограничене кривом $y = \dfrac{1}{2}(\cot x - \tan x)$ и правама $y = 0$, $x = \pi/6$ и $x = \pi/4$.*

2.18 *Израчунати површину површи настале ротацијом око x-осе криве $y = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ за $-2 \le x \le 2$.*

2.19 *Израчунати дужину лука криве $y = \ln(1 - x^2)$ за $-1/2 \le x \le 1/2$.*

2.20 *Израчунати дужину лука криве задате са $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ за $0 \le t \le \pi/2$ и $a > 0$.*

2.21 *Израчунати запремину тела које настаје ротацијом око x-осе фигуре ограничене кривом $y = \ln x$ и правама $y = 0$, $x = 2$ и $x = 5$.*

2.22 *Израчунати површину површи настале ротацијом око x-осе криве $y^2 = 4 + x$ за $-4 \le x \le 2$.*

2.23 *Израчунати дужину лука криве $y = \ln x$ за $\sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$.*

2.24 *Израчунати дужину лука криве задате са* $x = (t^2-2)\sin t + 2t\cos t$, $y = (t^2-2)\cos t - 2t\sin t$ *за* $0 \le t \le \pi$.

Колоквијум, 2006

2.25 *Израчунати дужину лука криве* $y = \sqrt{x^2-48} + 4\sqrt{6}\ln(x+\sqrt{x^2-48})$ *за* $7 \le x \le 8$.

2.26 *Израчунати запремину тела које настаје ротацијом око* x*-осе фигуре ограничене кривом* $y = x\sqrt{\ln\dfrac{1+2x}{1-x}}$ *и правама* $y = 0$, $x = 0$ *и* $x = 1/2$.

2.27 *Израчунати површину фигуре ограничене линијама* $y = \dfrac{e^x+1}{e^{2x}+1}$, $x = 0$, $x = \ln 2$ *и* $y = 0$.

2.28 *Израчунати површину фигуре ограничене линијама* $y = \dfrac{\sin x \cdot \ln(\cos x)}{(\cos x+1)^2}$, $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{3}$ *и* $y = 0$.

Колоквијум, 2005

Немам задатке.

Колоквијум, 2004

2.29 *Израчунати запремину тела које настаје ротацијом око* y*-осе конвексне фигуре ограничене линијама* $x^2+y^2 = x$ *и* $x^2+y^2 = y$.

2.30 *Израчунати дужину лука криве* $y = \sqrt{x^2-24} + 4\sqrt{3}\ln(x+\sqrt{x^2-24})$ *за* $5 \le x \le 7$.

2.31 *Израчунати површину фигуре ограничене кривом* $y = \dfrac{1}{\sqrt{10x-x^2-21}}$ *и правама* $x = 4$, $x = 6$, $y = 0$.

Колоквијум, 2003

2.32 *Израчунати запремину тела које настаје ротацијом око* x*-осе фигуре ограничене кривом* $y = x$
$sqrt \arccos x$ *и правом* $y = 0$.

2.33 *Израчунати запремину тела које настаје ротацијом око* x*-осе фигуре ограничене кривом* $y = \sqrt{x}\cos x$ *и правама* $x = \dfrac{\pi}{2}$ *и* $y = 0$.

2.34 *Израчунати дужину лука криве* $y = \sqrt{x^2-48} + 4\sqrt{6}\ln(x+\sqrt{x^2-48})$ *за* $7 \le x \le 8$.

Колоквијум, 2002

2.35 *Израчунати дужину лука криве дате са* $x(t) = 2\sqrt{2}\sqrt{1-t^2}$, $y(t) = t\sqrt{1-t^2}$ *за* $0 \le t \le 1$.

2.36 *Израчунати запремину тела које настаје ротацијом око* x*-осе фигуре ограничене кривом* $y = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ *и правама* $y = 0$ *и* $x = 1$.

2.37 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$

Колоквијум, 2001

2.38 *Израчунати запремину тела које настаје ротацијом око* x*-осе фигуре ограничене кривом* $y = \dfrac{2x}{x^2-1}$ *и правама* $y = 0$, $x = 2$ *и* $x = 3$.

2.39 $\int_{-1}^{1} \frac{e^x dx}{(e^x+1)(x^2+1)}$

2.40 *Нека је* $I_n = \int_0^1 x^2 \ln^n x dx$. *Одредити најпре везу између* I_n *и* I_{n-1}, *а затим израчунати* I_n.

Колоквијум, 2000

2.41 *Израчунати дужину лука криве задане параметарски:*

$$x = \frac{t^2}{2},\ y = \ln t,\ 1 \leq t \leq 2.$$

Колоквијум, 1999

Колоквијум није одржан због бомбардовања Југославије од стране NATO пакта.

Колоквијум, 1998

2.42 *Израчунати површину фигуре ограничене линијама*

$$y = 0,\ x = \frac{1}{2},\ x = 2,\ y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}.$$

2.43 *Израчунати дужину лука криве* $y = \ln(\cos x)$ *за* $x \in [0, \pi/3]$.

Колоквијум, 1997

Није било задатака из ове теме.

Колоквијум, 1996

2.44 *Фигура ограничена кривом* $y = 2x - x^2$ *и правама* $y = 1$ *и* $x = 0$ *ротира око* y *- осе. Израчунати запремину тако насталог тела.*

Колоквијум, 1995

Није било задатака на ову тему.

3 Несвојствени интеграл

Колоквијум, 2010

Израчунати дати интеграл или установити његову дивергенцију.

3.1 $\int_{-1}^{+\infty} \frac{\ln(x^2+4)}{(x+2)^2} dx$

3.2 $\int_{-\infty}^{0} \frac{\arctan \frac{x}{2}}{(x-2)^2} dx$

3.3 $\int_{4}^{+\infty} \frac{\ln(x^2+9)}{(x-3)^2} dx$

3.4 $\int_{0}^{+\infty} \frac{\arctan \frac{x}{3}}{(x+3)^2} dx$

Колоквијум, 2004

3.5 *Израчунати површину криволинијског трапеза одређеног графиком функције* $f : x \mapsto e^{-2x} \cos^2 x$ *за* $0 \le x \le +\infty$.

Колоквијум, 2002

3.6 *Израчунати* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$.

Колоквијум, 2001

3.7 *Нека је* $\displaystyle I(a) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin ax \, dx$.

1. *Одредити скуп* A *свих вредности параметра* a *за које интеграл* $I(a)$ *конвергира.*
2. *За* $a \in A$ *израчунати* $I(a)$.

Колоквијум, 2000

3.8 *Испитати конвергенцију интеграла*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{1+2\sqrt{x}+x^2} dx.$$

3.9 *Одредити све вредности реалног параметра* α *за које интеграл*

$$\int_0^1 \frac{\sin^4 x - e^x + 1 + x}{x^\alpha} dx$$

конвергира.

3.10 *Испитати конвергенцију интеграла* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{\sinh x}$.

Колоквијум, 1997

3.11 *Нека је* $\displaystyle I(a,b) = \int_0^1 x^a (\ln x)^b dx$.

1. *Одредити скуп вредности параметара* a *и* b *за које* $I(a,b)$ *постоји.*
2. *Израчунати* $I(-1/2, 3)$.

3.12 *Нека је* $\displaystyle I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x^a \ln x}{(1+x)^2} dx$.

1. *Одредити скуп вредности параметра* a *за које* $I(a)$ *постоји.*
2. *Израчунати* $I(1/2)$.

Колоквијум, 1996

3.13 *Нека је* $\displaystyle I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{a+x^2}$, $a \in \mathbb{R}$.

(а) Одредити скуп A *свих вредности* a *за које интеграл* $I(a)$ *конвергира.*

(б) За $a \in A$ *израчунати* $I(a)$.

Колоквијум, 1995

3.14 *Израчунати површину коју ограничавају позитиван део x - осе и графици функција*

$$f\ :\ x \mapsto \frac{8}{x^2+4}, \qquad g\ :\ x \mapsto \frac{4x}{x^2+4}.$$

3.15 *Израчунати површину коју ограничавају x - оса, права $x=1$ и график функције*

$$f\ :\ x \mapsto \frac{\ln x}{(x-1)^{3/2}}.$$

4 Двојни интеграл

Колоквијум, 2010

4.1 $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} x\sin(x^2+y^2-4y+4)^{3/2}\,dxdy,\quad \mathcal{D}=\{(x,y)\ \ x^2+(y-2)^2\le \pi^{2/3},\ x\ge 0\}$

4.2 $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} y\cos(x^2+y^2+4x+4)^{3/2}\,dxdy,\quad \mathcal{D}=\{(x,y)\ \ (x+2)^2+y^2\le (\pi/2)^{2/3},\ \ge 0\}$

4.3 $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} (x^2-2xy+y^2)e^{y-3x}dxdy,$ $\mathcal{D}$ *- паралелограм ограничен правама:* $y=x+1$, $y=x+2$, $y=-3x$, $y=-3x+2$.

4.4 $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} \sin(2y+x)e^{y-2x}dxdy,$ $\mathcal{D}$ *- паралелограм ограничен правама:* $y=2x$, $y=2(x+1)$, $y=-x/2$, $y=-x/2+\pi/4$.

Колоквијум, 2009

4.5 $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} ye^{x/\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy,\quad \mathcal{D}=\{(x,y)\ \ 1\le x^2+y^2\le 16, x\ge 0,\ y\ge 0\}$

4.6 $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} (3x+y)\cos(\pi(x-3y))dxdy,$ $\mathcal{D}$ *- паралелограм ограничен правама:* $y=-3x+3$, $y=-3x+1$, $y=\frac{x}{3}$, $y=\frac{x}{3}-\frac{1}{12}$.

4.7 $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} \arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy,\quad \mathcal{D}=\{(x,y)\ :\ x^2+y^2\le 16,\ -y\le x\le y\}$

4.8 $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} (x-2y)\sin(\pi(2x+y))dxdy,$ $\mathcal{D}$ *- паралелограм ограничен правама:* $y=\frac{x}{2}+2$, $y=\frac{x}{2}+3$, $y=-2x$, $y=-2x+\frac{1}{2}$.

Колоквијум, 2008

4.9 $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} (x^2-y^2-2xy)dxdy,\quad \mathcal{D}=\{(x,y)\ :\ x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ x\le y\}$

4.10 $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} xe^{y/2-x}dxdy,$ $\mathcal{D}$ *- паралелограм ограничен правама:* $y=2x-1$, $y=2x+3$, $y=-\dfrac{x}{2}-3$, $y=-\dfrac{x}{2}+1$.

4.11 $\iint_{\mathcal{D}} x\sin(3x-y)dxdy,$ $\mathcal{D}$ - *паралелограм ограничен правама:* $y=3x,\ y=3x-\dfrac{\pi}{2},\ y=-x-1,\ y=-x+3.$

4.12 $\iint_{\mathcal{D}} (x^2-y^2+2xy)dxdy,$ $\mathcal{D}=\{(x,y)\ :\ x^2+y^2\le 9,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ x\le y\}$

4.13 $\iint_{\mathcal{D}} (x+y)^2e^{x^2-y^2}dxdy,$ $\mathcal{D}$ - *паралелограм ограничен правама:* $y=x,\ y=x+1,\ y=-x-1,\ y=-x+1.$

4.14 $\iint_{\mathcal{D}} \dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy,$ $\mathcal{D}=\{(x,y)\ :\ 1\le x^2+y^2\le 4,;x\le 0,\ y\ge 0\}$

4.15 $\iint_{\mathcal{D}} \dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy,$ $\mathcal{D}=\{(x,y)\ :\ 4\le x^2+y^2\le 9,\ x\ge 0,\ y\le 0\}$

4.16 $\iint_{\mathcal{D}} (y-x)^2\cos(x^2-y^2)dxdy,$ $\mathcal{D}$ - *паралелограм ограничен правама:* $y=x,\ y=x+\dfrac{\pi}{2},\ y=-x-1,\ y=-x+1.$

Колоквијум, 2007

4.17 $\iint_{\mathcal{D}} (x-y)\sin(x+y)dxdy,$ $\mathcal{D}$ - *паралелограм ограничен правама:* $y=-x,\ y=-x+\dfrac{\pi}{2},\ y=3x+1,\ y=3x+5.$

4.18 $\iint_{\mathcal{D}} \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy,$ $\mathcal{D}=\{(x,y)\ :\ 4\le x^2+y^2\le\dfrac{\pi^2}{4},\ x\ge 0,\ y\le 0\}$

4.19 $\iint_{\mathcal{D}} (x^2+y^2)dxdy,$ $\mathcal{D}$ - *паралелограм са теменима* $A(-1,1),\ B(1,-1),\ C(2,2)$ *и* $D(0,4).$

4.20 $\iint_{\mathcal{D}} \sqrt{x^2+y^2}dxdy,$ $\mathcal{D}=\{(x,y)\ :\ x^2+y^2\le 3y\}$

4.21 $\iint_{\mathcal{D}} (y^2-x^2)dxdy,$ $\mathcal{D}$ - *паралелограм са теменима* $A(-1,2),\ B(1,-2),\ C(2,-1)$ *и* $D(0,3).$

4.22 $\iint_{\mathcal{D}} \cos\sqrt{x^2+y^2}dxdy,$ $\mathcal{D}=\{(x,y)\ :\ x^2+y^2\le\dfrac{\pi^2}{4},\ x\le 0,\ y\ge 0\}$

4.23 $\iint_{\mathcal{D}} (x+y)\cos(x-y)dxdy,$ $\mathcal{D}$ - *паралелограм ограничен правама:* $y=x,\ y=x+\dfrac{\pi}{2},\ y=-2x+1,\ y=-2x+4.$

4.24 $\iint_{\mathcal{D}} \sqrt{x^2+y^2}dxdy,$ $\mathcal{D}=\{(x,y)\ :\ x^2+y^2\le 4x\}$

Колоквијум, 2006

4.25 $\iint_{\mathcal{D}} \ln x^2+y^2dxdy,$ $\mathcal{D}=\{(x,y)\ :\ e^2\le x^2+y^2\le e^4\}$

4.26 $\iint_{\mathcal{D}} \dfrac{25xdxdy}{(y+3x-3)(y-2x-4)},$ $\mathcal{D}$ - *паралелограм ограничен правама:* $y=2x+5,\ y=-3x+4,\ y=2x+9,\ y=-3x+8.$

4.27 $\iint_{\mathcal{D}} \dfrac{\arctan\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy,$ $\mathcal{D}=\{(x,y)\ :\ \dfrac{1}{3}\le x^2+y^2\le 3\}$

4.28 $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} \frac{64xdxdy}{(y+3x-3)(y-2x-4)}$, *$\mathcal{D}$ - паралелограм ограничен правама:* $y = 3x+2$, $y = -5x+5$, $y = 3x+5$, $y = -5x+8$.

Колоквијум, 2005

Немам задатке.

Колоквијум, 2004

4.29 *Израчунати* $\displaystyle\iint_D (x^2-y^2)e^{x+y}dxdy$ *ако је* D *паралелограм одређен правама* $y = -x-1$, $y = -x+3$, $y = x+2$ *и* $y = x-4$.

4.30 *Израчунати запремину тела ограниченог параболоидом* $2z = 4-x^2-y^2$, *равни* $z = 0$ *и цилиндром* $x^2+y^2-2x = 0$ *(унутар цилиндра).*

4.31 *Израчунати запремину тела ограниченог параболоидом* $x^2+y^2 = 2z$ *и конусом* $4(x^2+y^2) = (z+2)^2$.

4.32 *Израчунати* $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2}$ *ако је* D *област ограничена кривим линијама* $x^2+y^2 = 4x$, $x^2+y^2 = 8x$, $y = 0$ *и* $y = x$.

Колоквијум, 2003

4.33 *Израчунати* $\displaystyle\iint_D xydxdy$ *ако је* D *паралелограм одређен правама* $y = 2x-1$, $y = 2x+1$, $y = \dfrac{x}{2}+1$ *и* $y = \dfrac{x}{2}+3$.

4.34 *Израчунати запремину тела ограниченог површима:* $x^2+y^2 = 2x$, $z = 2x+y$ *и* $z = 0$ *за* $y \geq 0$.

4.35 *Израчунати запремину тела ограниченог површима:* $x^2+y^2 = 2y$, $z = x+2y$ *и* $z = 0$ *за* $x \geq 0$.

Колоквијум, 2002

4.36 *Израчунати запремину тела ограниченог сфером* $x^2+y^2+z^2 = r^2$ *и цилиндром* $x^2+y^2 = rx$ $(z \geq 0,\ r > 0)$.

4.37 $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} x\cdot\sin|y-x^2|dxdy, \quad \mathcal{D} = \{(x,y)\ :\ 0 \leq x \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0 \leq y \leq \pi\}$

4.38 $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} (x^2+y^2+2y)dxdy, \quad \mathcal{D} = \{(x,y)\ :\ x^2+y^2 \leq 1,\ x^2-y \leq 1\}$

4.39 *Израчунати запремину тела ограниченог површима:* $x^2+y^2 = 2(x+y)$, $z = x^2+y^2$ *и* $z = 0$.

Колоквијум, 2001

4.40 $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} \frac{xdxdy}{x^2+y^2}$, *$\mathcal{D}$ - област ограничена линијама* $x^2 = 2y$ *и* $x^2+y^2 = 8$ *за* $x \geq 0$ *и* $y \geq 0$.

4.41 *Израчунати запремину тела ограниченог површима:* $x^2+y^2-2x = 0$, $2z = x^2+y^2$ *и* $z = 0$.

4.42 *Израчунати површину фигуре ограничене линијама* $xy = \dfrac{a^2}{2}$, $xy = 2a^2$, $y = \dfrac{x}{2}$ *и* $y = 2x$ *за* $a > 0$.

4.43 *Израчунати запремину тела ограниченог површима:* $x^2 + y^2 - 2x = 0$, $2z = 4 - x^2 - y^2$ *и* $z = 0$ *(унутар цилиндра).*

Колоквијум, 2000

4.44 $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} \frac{xy\,dxdy}{\sqrt{9x^2+4y^2}}, \quad \mathcal{D} = \left\{(x,y) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1,\ x \geq 0, y \geq 0\right\}.$

4.45 *Израчунати површину ограничену линијама*

$$x^2 + y^2 = 2ax,\ x^2 + y^2 = 2bx,\ y = x,\ y = 0, \quad (0 < a < b).$$

4.46 *Израчунати запремину тела ограниченог површима*

$$z = 1 - x^2 - y^2,\ z = x^2 + y^2 + 1,\ x^2 + y^2 = 1.$$

4.47 *Израчунати запремину тела ограниченог површима*

$$x^2 + y^2 = 2x,\ x^2 + y^2 = 2y,\ z = 0,\ z = x + y.$$

Колоквијум, 1999

Колоквијум није одржан због бомбардовања Југославије од стране NATO пакта.

Колоквијум, 1998

4.48 *Израчунати запремину тела ограниченог површима*

$$3z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 = 6x,\ \sqrt{3}x - y = 0,\ \left(0 \leq y \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}\right).$$

4.49 *Израчунати* $\displaystyle\iint_D (x^2 - y^2)\sin\pi(x-y)^2\,dxdy$, *где је* D *фигура ограничена правама:* $y = -z + 2$, $y = -x + 4$, $y = x + 1$ *и* $y = x - 2$.

Колоквијум, 1997

4.50 *Израчунати запремину тела ограниченог површима* $z = 0$, $az = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 2ax$ *(*$a > 0$*).*

4.51 *Израчунати* $\displaystyle\iint_D \left(\frac{y}{x}\right)^2 dxdy$ *ако је* $D = \{(x,y)\ :\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2x\}$.

Колоквијум, 1996

4.52 *Израчунати* $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} y\,dx\,dy$ *ако је*

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y)\ :\ x^2 + y^2 \leq 12,\ y \leq \frac{6-x}{\sqrt{3}},\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}.$$

4.53 *Израчунати запремину тела ограниченог површима:*

$$z = 9 - x^2 - y^2, \quad x^2 + y^2 - 2xy = 0, \quad z = 0.$$

Колоквијум, 1995

4.54 *Израчунати* $\iint_{\mathcal{D}} \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\, dx\, dy$ *где је* $\mathcal{D}$ *област ограничена кривама*

$$x^2 + y^2 = 4x, \quad x^2 + y^2 = 8x, \quad y = x, \quad y = \sqrt{3}x.$$

4.55 *Израчунати* $\iint_{\mathcal{D}} xy\, dx\, dy$ *где је* $\mathcal{D}$ *област ограничена кривама*

$$2x - y = 1, \quad 2x - y = 3, \quad y + x = -2, \quad x + y = 0.$$

5 Редови

Колоквијум, 2008

5.1 *Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/3} \left(\frac{x-1}{3}\right)^n$.

5.2 *Испитати конвергенцију реда* $\sum_{1}^{\infty} n(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})^{\alpha}$, *где је* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Упутства и резултати

1.2 Дати интеграл се лако решава парцијалном интеграцијом. Ако је

$$u = \arctan\frac{x}{2}, \quad dv = \frac{dx}{(x-2)^2},$$

тада је

$$du = \frac{2dx}{x^2+4}, \quad v = -\frac{1}{x-2},$$

па је

$$I = \int \frac{\arctan\frac{x}{2}}{(x-2)^2}dx = -\frac{\arctan\frac{x}{2}}{x-2} + 2J, \quad J = \int \frac{dx}{(x-2)(x^2+4)}.$$

Како је

$$\frac{1}{(x-2)(x^2+4)} = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x-2} - \frac{1}{8}\cdot\frac{x}{x^2+4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2+4},$$

то је

$$I = -\frac{\arctan\frac{x}{2}}{x-2} + \frac{1}{4}\ln\frac{|x-2|}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{4}\arctan\frac{x}{2} + C = F(x) + C.$$

1.5 Сменом $\ln x = t$ имамо $I = \displaystyle\int \frac{2t^2+5t+2}{(t-2)(t^2+4t+8)}dt$

$$\frac{2t^2+5t+2}{(t-2)(t^2+4t+8)} = \frac{A}{t-2} + \frac{Bt+C}{t^2+4t+8} = \frac{1}{t+2} + \frac{t+3}{t^2+4t+8}$$

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{dt}{t-2} + \int \frac{t+2+1}{t^2+4t+8}dt \\
&= \ln|t-2| + \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+4t+8)}{t^2+4t+8} + \int \frac{dt}{(t+2)^2+2^2} \\
&= \ln|t-2| + \frac{1}{2}\ln(t^2+4t+8) + \frac{1}{2}\arctan\frac{t+2}{2} + C \\
&= \ln|\ln x - 2| + \frac{1}{2}\ln(\ln^2 x + 4\ln x + 8) + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\ln x + 2}{2}\right) + C
\end{aligned}$$

1.6 Сменом $\cos x = t$ добијамо $I = \displaystyle\int \frac{3t^2-9t+10}{(t+2)(t^2-4t+8)}dt$

$$\frac{3t^2-9t+10}{(t+2)(t^2-4t+8)} = \frac{A}{t+2} + \frac{Bt+C}{t^2-4t+8} = \frac{2}{t+2} + \frac{t-3}{t^2-4t+8}$$

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{2dt}{t+2} + \int \frac{t-2-1}{t^2-4t+8}dt \\
&= 2\ln|t+2| + \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2-4t+8)}{t^2-4t+8} - \int \frac{dt}{(t-2)^2+2^2} \\
&= 2\ln|t+2| + \frac{1}{2}\ln(t^2-4t+8) - \frac{1}{2}\arctan\frac{t-2}{2} + C \\
&= 2\ln|\cos x + 2| + \frac{1}{2}\ln(\cos^2 x - 4\cos x + 8) - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\cos x - 2}{2}\right) + C
\end{aligned}$$

1.7 Сменом $\sin x = t$ имамо $I = \displaystyle\int \frac{3t^2+2t+11}{(t-1)(t^2+2t+5)}dt$

$$\frac{3t^2+2t+11}{(t-1)(t^2+2t+5)} = \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+2t+5} = \frac{2}{t-1} + \frac{t-1}{t^2+2t+5}$$

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{2dt}{t-1} + \int \frac{t+1-2}{t^2+2t+5}dt \\
&= 2\ln|t-1| + \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+2t+5)}{t^2+2t+5} - 2\int \frac{dt}{(t+1)^2+2^2} \\
&= 2\ln|t-1| + \frac{1}{2}\ln(t^2+2t+5) - \arctan\frac{t+1}{2} + C \\
&= 2\ln|\sin x - 1| + \frac{1}{2}\ln(\sin^2 x + 2\sin x + 5) - \arctan\left(\frac{\sin x + 1}{2}\right) + C
\end{aligned}$$

1.8 Сменом $e^x = t$ добијамо $I = \int \frac{3t^2-t+4}{(t+1)(t^2-2t+5)}dt$

$$\frac{3t^2-t+4}{(t+1)(t^2-2t+5)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2-2t+5} = \frac{1}{t+1} + \frac{2t-1}{t^2-2t+5}$$

$$I = \ln|t+1| + \ln(t^2 02t+5) + \frac{1}{2}\arctan\frac{t-1}{2} + C$$

$$I = \ln(e^x+1) + \ln(e^{2x}-2e^x+5) + \frac{1}{2}\arctan\frac{e^x-1}{2} + C$$

1.11 Сменом $\cos x = t$ имамо

$$I = 6\int \frac{\sin x \cos x}{\cos^3 x + 1}dx = -6\int \frac{tdt}{t^3+1} = -6J.$$

Из једнакости

$$\frac{t}{t^3+1} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2-t+1}$$

следи

$$t = A(t^2-t+1) + (Bt+C)(t+1).$$

За $t=-1$ је $-1=3A$, па је $A=-1/3$.
За $t=0$ је $0=A+C$, па је $C=1/3$.
За $t=1$ је $1=-1/3+(B+1/3)\cdot 2$, па је $B=1/3$.

$$\begin{aligned}
J &= -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{3}\int \frac{t+1}{t^2-t+1}dt \\
&= -\frac{1}{3}\ln|t+1| + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2t-1}{t^2-t+1}dt + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2-t+1} \\
&= -\frac{1}{3}\ln|t+1| + \frac{1}{6}\ln(t^2-t+1) + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t-1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2} \\
&= -\frac{1}{3}\ln|t+1| + \frac{1}{6}\ln(t^2-t+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t-1/2}{\sqrt{3}/2} + C.
\end{aligned}$$

Према томе,

$$\begin{aligned}
I &= 2\ln|\cos x + 1| - \ln(\cos^2 x - \cos x + 1) - \frac{6}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\cos x - 1}{\sqrt{3}} + C \\
&= \ln\frac{(\cos x + 1)^2}{\cos^2 x - \cos x + 1} - 2\sqrt{3}\arctan\frac{2\cos x - 1}{\sqrt{3}} + C.
\end{aligned}$$

1.13 Ако је $\tan x = t$, тада је $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$. Заменом ових израза у датом интегралу добијамо $I = 2\int \frac{t^2dt}{(t^2+1)(t^2+3)}$.

Из једнакости

$$\frac{t^2}{(t^2+1)(t^2+3)} = \frac{At+B}{t^2+1} + \frac{Ct+D}{t^2+3}$$

следи

$$t^2 = (At+B)(t^2+3) + (Ct+D)(t^2+1).$$

За $t = i$ је $-1 = (Ai+B)\cdot 2$, па је $A = 0$ и $B = -1/2$.
За $t = \sqrt{3}i$ је $-3 = (C\sqrt{3}i + D)\cdot(-2)$, па је $C = 0$ и $D = 3/2$.

Према томе,

$$\begin{aligned}
I &= -\int \frac{dt}{t^2+1} + 3\int \frac{dt}{t^2+\sqrt{3}^2} \\
&= -\arctan t + \frac{3}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}} + C \\
&= -\arctan(\tan x) + \sqrt{3}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{3}} + C \\
&= = x + \sqrt{3}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{3}} + C.
\end{aligned}$$

1.18 Из једнакости

$$\frac{4x^2+3x+2}{x^3-8} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4}$$

добијамо $A = B = 2$ и $C = 3$.

$$\begin{aligned}
I &= 2\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{2x+2}{x^2+2x+4}dx + \int \frac{dx}{x^2+2x+4} \\
&= 2\ln|x-2| + \ln(x^2+2x+4) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{3}} + C.
\end{aligned}$$

1.34 Сменом $\cos x = t$ имамо $I = -\int \frac{dt}{t+t^2+t^3}$

$$\frac{1}{t(1+t+t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{1+t+t^2} = \frac{1}{t} - \frac{t+1}{1+t+t^2}$$

$$\begin{aligned}
I &= -\int \frac{dt}{t} + \int \frac{t+1}{t^2+t+1}dt \\
&= -\ln|t| + \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+t+1)}{t^2+t+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t+1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2} \\
&= -\ln|t| + \frac{1}{2}\ln(t^2+t+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t+1/2}{\sqrt{3}/2} + C \\
&= -\ln|\cos x| + \frac{1}{2}\ln(\cos^2 x + \cos x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\cos x+1}{\sqrt{3}} + C.
\end{aligned}$$

1.36 Сменом $\cot x = t$ имамо

$$I = \int \frac{\sin x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x} = \int \frac{1}{1+\cot^3 x}\cdot\frac{dx}{\sin^2 x} = -\int \frac{dt}{1+t^3}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+t^3} &= \frac{A}{1+t} + \frac{Bt+C}{t^2-t+1} \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+t} + \frac{1}{3}\int \frac{2-t}{t^2-t+1}dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I &= -\frac{1}{3}\int\frac{dt}{1+t}+\frac{1}{3}\int\frac{t-2}{t^2-t+1}dt\\
&= -\frac{1}{3}\ln|1+t|+\frac{1}{6}\int\frac{2t-4}{t^2-t+1}dt\\
&= -\frac{1}{3}\ln|t+1|+\frac{1}{6}\int\frac{2t-1}{t^2-t+1}dt-\frac{1}{6}\int\frac{3dt}{t^2-t+1}\\
&= -\frac{1}{3}\ln|t+1|+\frac{1}{6}\ln(t^2-t+1)-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-t+1}\\
&= -\frac{1}{3}\ln|t+1|+\frac{1}{6}\ln(t^2-t+1)-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{(t-1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}\\
&= -\frac{1}{3}\ln|t+1|+\frac{1}{6}\ln(t^2-t+1)-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t-1/2}{\sqrt{3}/2}+C\\
&= -\frac{1}{3}\ln|t+1|+\frac{1}{6}\ln(t^2-t+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}+C\\
&= -\frac{1}{3}\ln|\cot x+1|+\frac{1}{6}\ln(\cot^2 x-\cot x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\cot x-1}{\sqrt{3}}+C
\end{aligned}$$

Напомена. Ако се уведе смена $\tan x = t$, онда је $I=\displaystyle\int\frac{tdt}{1+t^3}$ и

$$\frac{t}{1+t^3}=\frac{A}{1+t}+\frac{Bt+C}{t^2-t+1},\quad A=-\frac{1}{3},\ B=C=\frac{1}{3}.$$

1.38 Сменом $x\ln x = t$ имамо да је $I=\displaystyle\int\frac{dt}{1+t^3}$.

1.40 Парцијалном интеграцијом са $u=\arcsin^n x$ и $dx = dv$ добијамо

$$I_n = x\arcsin^n x - n\int\frac{x\arcsin^{n-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\arcsin^n x - n\cdot J.$$

Ако на интеграл J такође применимо парцијалну интеграцију са $u=\arcsin^{n-1}x$ и $dv=\dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ добијамо

$$I_n = x\arcsin^n x + n\sqrt{1-x^2}\arcsin^{n-1}x - n(n-1)I_{n-2}.$$

1.42 Нека је I дати интеграл. Ако је $u=\arcsin x$ и $dv=\arccos x dx$, тада је $du=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ и

$$\begin{aligned}
v &= \int\arccos x dx\\
&= x\cdot\arccos x+\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}\\
&= x\cdot\arccos x-\frac{1}{2}\int\frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\\
&= x\cdot\arccos x-\sqrt{1-x^2},
\end{aligned}$$

па је

$$I = x\cdot\arccos x\cdot\arcsin x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x - J + x,$$

где је

$$J=\int\frac{x\cdot\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\sqrt{1-x^2}\arccos x - x + C.$$

Дакле,

$$I = x\cdot\arccos x\cdot\arcsin x+\sqrt{1-x^2}(\arccos x-\arcsin x)+2x+C.$$

1.45 Сменом $\cos x = t$ имамо

$$I = \int \frac{t-1}{t(1+t^2)}dt = \int \frac{tdt}{t(1+t^2)} - \int \frac{1+t^2-t^2}{t(1+t^2)}dt.$$

Дакле,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dt}{1+t^2} - \int \frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\int \frac{2tdt}{1+t^2} \\ &= \arctan t - \ln|t| + \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + C \\ &= \arctan(\cos x) - \ln|\cos x| + \frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x) + C. \end{aligned}$$

1.46 Дати интеграл се сменом $t = \cos^2 x$ своди на интеграл $I = \int_0^1 \arctan t dt$. Даље се парцијалном интеграцијом добија

$$I = t\arctan t|_0^1 - \int_0^1 \frac{tdt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

1.47 Користећи идентитете $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$ и $4\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \sin^2 2\alpha$, подинтегрална функција се трансформише у $\dfrac{2}{(2-\sin 2x)(2+\sin 2x)}$, па је

$$I = 2\int \frac{dx}{(2-\sin 2x)(2+\sin 2x)}.$$

Ако је $t = \tan x$, онда је $\sin 2x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$, па је

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{(t^2+1)dt}{(t^2+t+1)(t^2-t+1)}.$$

Из разлагања

$$\frac{t^2+1}{(t^2+t+1)(t^2-t+1)} = \frac{At+B}{t^2+t+1} + \frac{Ct+D}{t^2-t+1}$$

добијамо да је $B = D = \dfrac{1}{2}$, $A = C = 0$, па је $I = \dfrac{1}{4}(I_1 + I_2)$, где је

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+t+1},\ I_2 = \int \frac{dt}{t^2-t+1}.$$

Даље је

$$I_1 = \int \frac{dt}{(t+1/2)^2+3/4} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C_1,$$

$$I_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C_2,$$

па је

$$I = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + \arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) + C = \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{\sqrt{3}t}{1-t^2} + C,$$

где је $t = \tan x$.

Примедба: У сређивању резултата коришћена је формула

$$\arctan x + \arctan y = \arctan\frac{x+y}{1-xy}.$$

1.48 Применом методе парцијалне интеграције, за

$$u = \ln(x + \sqrt{x^2+1}),\ dv = \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}},$$

добија се

$$I = \sqrt{x^2+1}\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \int dx = \sqrt{x^2+1}\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - x + C.$$

1.49 Ако је I дати интеграл, онда сменом $x = \pi/2 - t$ добијамо

$$I = \int_{\pi/2}^{0} \frac{\sin^2(\pi/2-t)+\sin(\pi/2-t)}{\sin(\pi/2-t)+\cos(\pi/2-t)}(-dt) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 t + \cos t}{\cos t + \sin t + 1}dt,$$

па је $2I = \int_0^1 dx = \pi/2$. Према томе, $I = \pi/4$.

Друго решење. Сменом $\tan(x/2) = t$ добијамо

$$I = 2\int_0^1 \frac{t^2+t}{(1+t^2)^2}dt = 2\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} + 2\int_0^1 \frac{t-1}{(t^2+1)^2}dt = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

1.51 Дати интеграл се сменом $x = t^2$ своди на интеграл $\int 2t^3 \sin t dt$. После једне парцијалне интеграције, узимајући да је $u = t^3$, $dv = \sin t dt$, добија се

$$I = -2t^3\cos t + 6I_1,\ \text{где је}\ I_1 = \int t^2 \cos t dt$$

После две парцијалне интеграције се добија

$$I_1 = t^2 \sin t + 2t\cos t - 2\sin t,$$

па је

$$I = -2t^3\cos t + 6t^2\sin t + 12t\cos t - 12\sin t + C,\ \text{где је}\ t = \sqrt{x}.$$

1.54 Ако је $t = \sqrt{\sin x}$ $(x \in [0, \pi/2))$, онда је

$$I = \int \frac{\sqrt{\sin x}}{\cos x}dx = \int \frac{dt}{1-t^2} - \int \frac{dt}{1+t^2}, \quad t \in [0,1],$$

па је

$$I = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}} - \arctan\sqrt{\sin x} + C, \quad x \in [0, \pi/2).$$

1.55 Ако је $e^x = t$, ($x \in (-\infty, \ln 2)$ или $x \in (\ln 2, +\infty)$), онда је

$$\int \frac{5e^x}{e^{4x} - 3e^{2x} - 4}dx = \int \frac{5dt}{(t^2-4)(t^2+1)}, \quad t \in (2, +\infty)\ \text{или}\ t \in (0,2).$$

Како је

$$\frac{5}{(t^2-4)(t^2+1)} = \frac{1}{t^2-4} - \frac{1}{t^2+1},$$

то је

$$\int \frac{5e^x}{e^{4x} - 3e^{2x} - 4}dx = \frac{1}{4}\ln\frac{e^x-2}{e^x+2} - \arctan e^x + C\ \text{за}\ x > \ln 2,$$

односно

$$\int \frac{5e^x}{e^{4x} - 3e^{2x} - 4}dx = \frac{1}{4}\ln\frac{2-e^x}{e^x+2} - \arctan e^x + C\ \text{за}\ x < \ln 2.$$

1.56 Ако је

$$I=\int\frac{\arctan x}{x^2}dx,\qquad \text{а}\quad J=\int\frac{\arctan x dx}{1+x^2}dx,$$

онда је дати интеграл једнак $I-J$. Парцијалном интеграцијом добијамо да је

$$I=-\frac{1}{x}\arctan x+\int\frac{dx}{x(1+x^2)}=-\frac{1}{x}\arctan x+\ln\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}+C_1,$$

а сменом $t=\arctan x$ добијамо да је $J=\arctan^2 x/2+C_2$. Према томе,

$$\int\frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx=-\frac{1}{x}\arctan x-\frac{1}{2}\arctan^2 x+\ln\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

1.57 Ако је

$$I=\int\arctan x dx,\qquad \text{а}\quad J=\int\frac{\arctan x dx}{1+x^2}dx,$$

онда је дати интеграл једнак $I-J$. Парцијалном интеграцијом добијамо да је

$$I=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1,$$

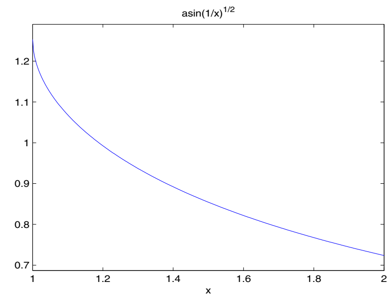
а сменом $t=\arctan x$ добијамо да је

$$J=\frac{1}{2}\arctan^2 x+C_2.$$

Према томе,

$$\int\frac{x^2\arctan x}{1+x^2}dx=x\arctan x+\frac{1}{2}\arctan^2 x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$$

2.3 Фигура ограничена датим линијама је криволинијски трапез (Слика 1).



Сл 1: Фигура која ротира око x-осе

На основу формуле за запремину ротационог тела имамо $V=\pi\int_1^2\arcsin\frac{1}{x}dx=\pi\cdot I$. Интеграл I налазимо парцијалном интеграцијом: $u=\arcsin\frac{1}{x}$, $dx=dv$, при чему је

$$du=\frac{1}{\sqrt{1-1/x^2}}\cdot\frac{-dx}{x^2}=-\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}},\qquad v=x.$$

$$\begin{aligned}
I &= x\cdot\arcsin\frac{1}{x}\Big|_1^2+\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}\\
&= 2\arcsin\frac{1}{2}-\arcsin 1+\ln(x+\sqrt{x^2-1})\Big|_1^2\\
&= 2\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}+\ln(2+\sqrt{3})-\ln 1\\
&= \frac{\pi}{6}+\ln(2+\sqrt{3}).
\end{aligned}$$

Према томе, $V = -\dfrac{\pi^2}{6} + \pi \cdot \ln(2+\sqrt{3})$.

2.8 Уочимо најпре да је $1 + y' = \left(2x + \dfrac{1}{8x}\right)^2$.

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \int_{\sqrt{e}}^{e} y\sqrt{1+y'^2}\, dx \\ &= 2\pi \int_{\sqrt{e}}^{e} \left(2x^3 + \frac{x}{8} - \frac{1}{4}x\ln x - \frac{1}{64}\cdot\frac{\ln x}{x}\right)\, dx \\ &= 2\pi \left(\frac{x^4}{2}\Big|_{\sqrt{e}}^{e} + \frac{x^2}{16}\Big|_{\sqrt{e}}^{e} - \frac{1}{4}J - \frac{1}{64}K\right) \end{aligned}$$

где је

$$J = \int_{\sqrt{e}}^{e} x\ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\Big|_{\sqrt{e}}^{e}, \quad K = \int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}\ln^2 x\Big|_{\sqrt{e}}^{e}.$$

Заменом граница и сређивањем добијамо

$$P = \left(e^4 - e^2 - \frac{1}{8}e - \frac{3}{256}\right)\pi.$$

2.11 $V = \pi \displaystyle\int_0^2 \ln(x+\sqrt{x^2+1})dx = \pi I$. Ако на интеграл I применимо парцијалну интеграцију са $u = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ и $dv = dx$, добијамо

$$du = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}\, x = \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}, \quad v = x,$$

па је

$$\begin{aligned} I &= x\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= x\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= x\ln(x+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}\Big|_0^2 \\ &= 2\ln(2+\sqrt{5}) - \sqrt{5} - (0-1) \\ &= 2\ln(2+\sqrt{5}) + 1 - \sqrt{5}. \end{aligned}$$

2.13 Из дате везе x и y имамо да је $y = 1 \pm 2\sqrt{x-1}$. Како је $P = 2\pi I$, где је

$$I = \int_1^{5/4} (1 - 2\sqrt{x-1})\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}dx = \int_1^{5/4} \sqrt{\frac{x}{x-1}}dx - 2\int_1^{5/4} \sqrt{x}dx = I_1 - 2I_2,$$

треба израчунати интеграле I_1 и I_2.

За I_1 сменом $x - 1 = t^2$ добијамо $I_1 = 2\displaystyle\int_0^{1/2} \sqrt{1+t^2}dt = 2J$, где је

$$J = t\sqrt{1+t^2}\Big|_0^{1/2} - \int_0^1 \frac{t^2dt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{4}\sqrt{5} - J + \ln(t+\sqrt{1+t^2})\Big|_0^{1/2},$$

односно $2J = \dfrac{\sqrt{5}}{4} + \ln\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Заменом I_1 и $I_2 = \frac{5}{12}\sqrt{5} - \frac{2}{3}$ у I добијамо

$$P = 2\pi\left(-\frac{7}{12}\sqrt{5} + \ln\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{4}{3}\right).$$

2.18 Како је $\sqrt{1+y'^2} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = y$, то је

$$P = 2\pi\int_{-2}^{2} y^2 dx = \frac{\pi}{2}\int_{2}^{2}(e^x + e^{-x})^2 dx = \frac{\pi}{2}(e^4 - e^{-4} + 8).$$

2.22 Како је $y = \sqrt{4+x}$, то је

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{4+x}}, \quad 1 + y'^2 = 1 + \frac{1}{4(4+x)}, \quad \sqrt{1+y'^2} = \frac{\sqrt{4x+17}}{2\sqrt{4+x}},$$

па је

$$P\pi\int_{-4}^{2}\sqrt{4x+17}dx = \frac{\pi}{6}(4x+17)^{3/2}\Big|_{-4}^{2} = \frac{62}{3}\pi.$$

2.25 Видети исти задатак 2003. године.

2.34 Како је

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2-48}} + \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{x^2-48}} = \frac{x_4\sqrt{6}}{\sqrt{x^2-48}}, \quad \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{2}\cdot\frac{x+2\sqrt{6}}{\sqrt{x^2-48}},$$

то је

$$\begin{aligned} l &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_7^8 \frac{d(x^2-48)}{\sqrt{x^2-48}} + \sqrt{2}\cdot 2\sqrt{6}\int_7^8\frac{dx}{\sqrt{x^2-(4\sqrt{3})^2}} \\ &= \sqrt{2}\sqrt{x^2-48}\Big|_7^8 + 4\sqrt{3}\ln(x+\sqrt{x^2-48})\Big|_7^8 \\ &= 3\sqrt{2} + 4\sqrt{3}\ln\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

2.35 Како је $x'(t) = -2\sqrt{2}\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ и $y'(t) = \sqrt{1-t^2} - \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}$, то је

$$x'^2 + y'^2 = \frac{(2t^2+1)^2}{1-t^2}, \quad \sqrt{x'^2+y'^2} = \frac{2t^2+1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Према формули за дужину лука криве која је дата параметарски имамо да је

$$l = \int_0^1 \frac{2t^2+1}{\sqrt{1-t^2}}dt = -2\int_0^1\sqrt{1-t^2}dt + 3\arcsin t\Big|_0^1 = -2I + \frac{3}{2}\pi,$$

где је

$$I = \int_0^1\sqrt{1-t^2}dt = \int_0^{\pi/2}\cos^2 u du = \int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2u}{2}du = \frac{1}{2}u\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{4}\sin 2u\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Према томе, $l = -2\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\pi = \pi$.

2.39 Ако је $I = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ дати интеграл, тада је $I = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx = I_1 + I_2$. Сменом $x = -t$ у интегралу I_1 добијамо

$$\begin{aligned}
I &= -\int_{1}^{0} \frac{e^{-t}dt}{(e^{-t}+1)(t^2+1)} + I_2 \\
&= \int_{0}^{1} \frac{dt}{(1+e^t)(t^2+1)} + \int_{0}^{1} \frac{e^t dt}{(e^t+1)(t^2+1)} \\
&= \int_{0}^{1} \frac{1+e^t}{1+e^t} \cdot \frac{dt}{t^2+1} \\
&= \int_{0}^{1} \frac{dt}{t^2+1} \\
&= \pi/4.
\end{aligned}$$

2.40 Ако је $u = \ln^n x$ и $dv = x^2 dx$, тада је $du = n \ln^{n-1} x \cdot \dfrac{dx}{x}$ и $v = \dfrac{x^3}{3}$, па је

$$I - n = \frac{x^3}{3} \ln^n x \Big|_0^1 - \frac{n}{3} \int_0^1 x^2 \ln^{n-1} x dx = -\frac{n}{3} I_{n-1}.$$

Како је $I_0 = \int_0^1 x^2 dx = \dfrac{1}{3}$, то је

$$I_n = (-1)^n \frac{n!}{3^n} I_0 = (-1)^n \frac{n!}{3^{n+1}}.$$

2.41 Према формули за дужину лука је

$$l = \int_1^2 \sqrt{{x'_t}^2 + {y'_t}^2} dt = \int_1^2 \frac{\sqrt{1+t^4}}{t} dt.$$

Увођењем смене $t^4 + 1 = u^2$ добија се $\dfrac{2dt}{t} = \dfrac{udu}{t^4}$, односно $\dfrac{dt}{t} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{udu}{u^2-1}$, па је

$$\begin{aligned}
l &= \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{17}} \frac{u^2 du}{u^2-1} \\
&= \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{17}} \left(1 + \frac{1}{u^2-1}\right) du \\
&= \frac{1}{2} \left(u + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| \right) \Bigg|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{17}} \\
&= \frac{1}{2} (\sqrt{17} + 2\ln 2 - \ln(\sqrt{17}+1) - \sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)).
\end{aligned}$$

2.42 Обзиром да је $\arcsin \dfrac{2x}{1+x^2} > 0$ за $x \in \left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$, то је

$$P = \int_{1/2}^{2} \arcsin \frac{2x}{1+x^2} dx.$$

Имајући у виду да је

$$\left(\arcsin \frac{2x}{1+x^2}\right)' = \frac{2(1-x^2)}{|1-x^2|(1+x^2)} = \begin{cases} \dfrac{2}{1+x^2}, & \text{за } |x| < 1 \\ -\dfrac{2}{1+x^2}, & \text{за } |x| > 1 \end{cases},$$

дати интеграл представљамо у облику збира $I_1 + I_2$, где је

$$I_1 = \int_{1/2}^{1} \arcsin \frac{2x}{1+x^2} dx, \;\; I_2 = \int_{1}^{2} \arcsin \frac{2x}{1+x^2} dx.$$

Парцијалном интеграцијом се добија

$$I_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{4}{5} - \ln 2 + \ln \frac{5}{4}, \;\; I_2 = 2 \arcsin \frac{4}{5} - \frac{\pi}{2} + \ln 5 - \ln 2,$$

па је

$$P = I_1 + I_2 = \arcsin \frac{4}{5} + 2 \ln \frac{5}{4}.$$

2.44 Ако је V_F запремина тела које настаје ротацијом дате фигуре (F) око y осе, онда је

$$V_F = \pi \int_0^1 x^2(y) dy = \pi \int_0^1 (1 - \sqrt{1-y})^2 dy = \frac{\pi}{6}.$$

Друго решење. Ако је V_G запремина тела које настаје ротацијом око y осе фигуре ограничене датом кривом и правама $x = 1$ и $y = 0$, онда је

$$V_F = \pi - V_G = \pi - 2\pi \int_0^1 (2x^2 - x^3) dx = \frac{\pi}{6}.$$

3.2 Израчунавањем одговарајућег неодређеног итеграла I добијамо да је

$$I = -\frac{\arctan \frac{x}{2}}{x-2} + \frac{1}{4} \ln \frac{|x-2|}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{4} \arctan \frac{x}{2} + C = F(x) + C.$$

Из

$$\lim_{x \to -\infty} (\ln |x-2| - \ln \sqrt{x^2+4} = \lim_{x \to -\infty} \ln \frac{|x-2|}{\sqrt{x^2+4}} = \ln 1 = 0$$

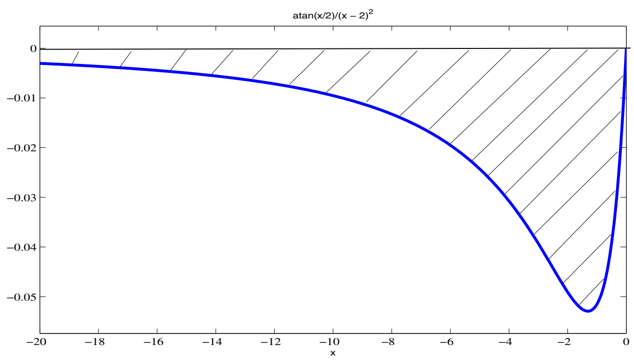
имамо

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 + \frac{1}{4} \cdot 0 - \frac{1}{4} \cdot \frac{-\pi}{2} = \frac{\pi}{8}.$$

Према томе, дати интеграл постоји (конвергира),

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\arctan \frac{x}{2}}{(x-2)^2} dx = F(0) - F(-\infty) = 0 - \frac{\pi}{8} = -\frac{\pi}{8}.$$

Апсолутна вредност овог интеграла представља површину између графика интегранда и x-осе на интервалу $(-\infty, 0]$ (Слика 2).



Сл 2: График интегранда

3.5 $P = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2x}\cos^2 x dx$. Парцијалном интеграцијом ($u = \cos^2 x,\ dv = e^{-2x}dx$) добијамо

$$P = -\frac{1}{2}e^{-2x}\cos^2 x\Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-2x}\sin 2x dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}J.$$

Применом парцијалне интеграција на интеграл J имамо да је

$$\begin{aligned} J &= -\frac{1}{2}e^{-2x}\sin 2x\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-2x}\cos 2x \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-2x}\cos 2x \\ &= -\frac{1}{2}e^{-2x}\cos 2x\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-2x}\sin 2x dx \\ &= \frac{1}{2} - J, \end{aligned}$$

па је $J = 1/4$. Према томе, $P = 3/8$.

3.7 За $a = 0$ је $I(a) = 0$. Нака је за $a \neq 0$

$$J = \int e^{-ax}\sin ax dx, \quad K = \int e^{-ax}\cos ax dx.$$

Применом парцијалне интеграције добијамо

$$J = -\frac{1}{a}e^{-ax}\cos ax - K, \quad K = \frac{1}{a}e^{-ax}\sin ax + J.$$

Из ових једнакости следи да је $J = -\dfrac{1}{2a}e^{-ax}(\cos ax + \sin ax)$.

1. Како $J(+\infty)$ постоји за $-a < 0$, односно $a < 0$, то значи да интеграл $I(a)$ конвергира за $a > 0$.

2. $I(a) = J(+\infty) - J(0) = \dfrac{1}{2a}$.

3.8 На основу низа неједнакости

$$\frac{\sqrt{x+1}}{1 + 2\sqrt{x} + x^2} < \frac{\sqrt{x+1}}{x^2} \leq \frac{\sqrt{x+x}}{x^2} = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{x^{3/2}},$$

које важе за $x \geq 1$ закључујемо да дати интеграл конвергира.

3.9 Ако $x \to 0+$, онда је

$$\frac{\sin^2 x - e^x + 1 + x}{x^\alpha} \sim \frac{x^2 - 1 - x + 1 + x}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha-2}}.$$

Интеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha-2}}$ конвергира ако и само ако је $\alpha - 2 < 1$, тј. ако и само ако је $\alpha < 3$. За $\alpha \geq 3$ интеграл дивергира.

3.10 Нека је $f(x) = x/\sinh x$, $g(x) = xe^{-x}$ и нека је G примитивна функција функције g. Како $f(x) \to 1/2$, $(x \to 0+)$ и $f(x) \to 0$, $(x \to +\infty)$, то је f ограничена функција на $(0, +\infty)$. Из $f(x) \sim 2g(x)$, $(x \to +\infty)$ следи да дати интеграл конвергира ако и само ако конвергира $\int_0^{+\infty} g(x)dx$. Међутим, $G(x) = -xe^{-x} - e^{-x}$, одакле следи да $G(x) \to 0$, $(x \to +\infty)$, што значи да је $\int_0^{+\infty} g(x)dx$ конвергентан. Према томе, конвергентан је и дати интеграл.

3.13 (а) Пошто је $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{a+x^2}$ парна функција, довољно је испитати конвергенцију интеграла $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{a+x^2}$.

(1) Ако је $a = 0$, онда је $f(x) = 1/x^2$, па је $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ дивергентан.

(2) Ако је $a > 0$, онда је $f(x) \sim 1/x^2$ $(x \to +\infty)$, па је $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ конвергентан, а тиме и $I(a)$.

(3) Ако је $a < 0$, онда је $f(x) \sim \dfrac{1}{2b}\dfrac{1}{x-b}$ $(x \to b)$, где је $a = -b^2$, па је $\displaystyle\int_b^{b+1} f(x)dx$ дивергентан.

Према томе, $A = (0, \infty)$.

(б) За $a \in A$ је

$$I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{a+x^2} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(x/\sqrt{a})}{1+(x/\sqrt{a})^2} = \frac{\pi}{\sqrt{a}}.$$

3.14 Пресечна тачка $A(2,1)$ датих кривих добија се решавањем система

$$y = \frac{8}{x^2+4}, \qquad y = \frac{4x}{x^2+4},\ x > 0.$$

За $0 < x < 2$ је $\dfrac{4x}{x^2+4} < \dfrac{8}{x^2+4}$, а за $x > 2$ је $\dfrac{4x}{x^2+4} > \dfrac{8}{x^2+4}$, па је

$$P = \int_0^2 \frac{4x}{x^2+4}dx + \int_2^{+\infty} \frac{8}{x^2+4}dx = 2\ln 2 + \pi.$$

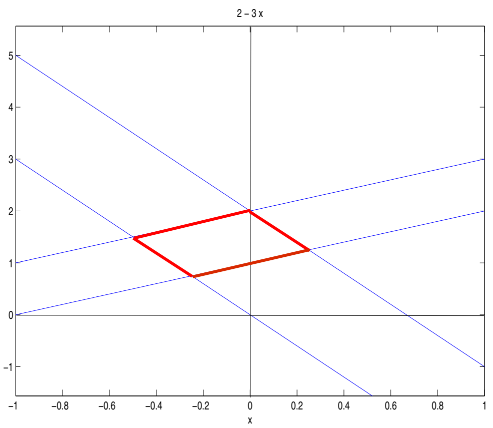
3.15 Тражена површина се може израчунати интеграљењем дате функције у границама од 1 до $+\infty$. Сменом $x - 1 = t^2$, а затим парцијалном интеграцијом добија се

$$\int \frac{\ln x dx}{(x-1)^{3/2}} = 2\int \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}dt = -\frac{2\ln x}{\sqrt{x-1}} + 4\arctan\sqrt{x-1} = F(x),$$

па је

$$P = \lim_{b\to+\infty} F(b) - \lim_{a\to 1+} F(a) = 2\pi.$$

4.3 Трансформацијом $u = y - x$, $v = y + 3x$ област интеграције D (Слика 3, црвени паралелограм) пресликава се у правоугаоник $G : [1,2] \times [0,2]$, при чему је Јакобијан једнак $-1/4$.



Сл 3: Област интеграције

Према томе,

$$\begin{aligned}
\iint_D (x^2-2xy+y^2)e^{x+3y}dxdy &= \frac{1}{4}\iint_G u^2e^v dudv\\
&= \frac{1}{4}\int_1^2 u^2du\cdot\int_0^2 e^v dv\\
&= \frac{1}{4}\cdot\frac{u^3}{3}\Big|_1^2\cdot e^v\Big|_0^2\\
&= \frac{7}{12}(e^2-1).
\end{aligned}$$

4.8 Трансформацијом $u = 2x + y$, $v = x - 2y$ област интеграције D пресликава се у правоугаоник $G : [0, 1/2] \times [-6, -4]$, при чему је Јакобијан једнак $-1/5$. Према томе,

$$I = \iint_G v\cdot\sin(u\pi)\cdot\frac{1}{5}dudv = \frac{1}{5}\int_{-6}^{-4} vdv\cdot\int_0^{1/2}\sin(u\pi)du = \frac{1}{5}\cdot(-10)\cdot\frac{1}{\pi} = -\frac{2}{\pi}.$$

4.11 Трансформацијом $u = y - 3x$, $v = x + y$ област интеграције D пресликава се у правоугаоник $G : [-\pi/2, 0] \times [-1, 3]$, при чему је

$$x = -\frac{1}{4}u+\frac{1}{4}v,\quad y = \frac{1}{4}u+\frac{3}{4}v,\quad J = \begin{vmatrix} -1/4 & 1/4\\ 1/4 & 3/4\end{vmatrix} = -\frac{1}{4}.$$

Ако је I дати интеграл, тада је

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{4}\int_{-\pi/2}^0\int_{-1}^3\left(-\frac{1}{4}u+\frac{1}{4}v\right)\sin(-u)dudv\\
&= \frac{1}{16}\int_{-\pi/2}^0 \sin u du\ \int_{-1}^3 (u-v)dv\\
&= \frac{1}{16}\int_{-\pi/2}^0 u\sin u du\cdot\int_{-1}^3 dv - \frac{1}{16}\int_{-\pi/2}^0\sin udu\cdot\int_{-1}^3 vdv\\
&= \frac{1}{16}\cdot 1\cdot v\Big|_{-1}^3 - \frac{1}{16}\cdot(-1)\cdot\frac{v^2}{2}\Big|_1^3\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

4.13 Трансформацијом $u = y-x$, $v = x+y$ област интеграције D пресликава се у правоугаоник $G : [0, 1] \times [-1, 1]$, при чему је Јакобијан једнак $1/2$. Према томе,

$$I = \frac{1}{2}\iint_G v^2e^{-uv}dudv = \frac{1}{2}\int_0^1 du\int_{-1}^1 v^2e^{-uv}dv = \frac{1}{2}J,$$

где је

$$J = \int_{-1}^1 v^2dv\left[-\frac{1}{v}e^{-uv}\Big|_0^1\right] = -\int_{-1}^1 ve^{-v}dv + \int_{-1}^1 vdv = \frac{2}{e}.$$

Дакле, $I = 1/e$.

4.18 Трансформацијом у поларне координате ($x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$) област интеграције D пресликава се у правоугаоник $G : [-\pi/2, 0] \times [0, \pi/2]$, при чему је Јакобијан једнак ρ.

$$\begin{aligned}
\iint_D \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy &= \iint_G \rho\sin\rho d\rho d\varphi\\
&= \int_{-\pi/2}^0 \varphi\cdot\int_0^{\pi/2}\rho\sin\rho d\rho\\
&= \varphi\Big|_{-\pi/2}^0\cdot 1\\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

4.20 Трансформацијом у поларне координате ($x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$) област интеграције D пресликава се у област$G = \{(\varphi, \rho)\ :\ 0 \le \rho \le 3\sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi\}$, при чему је Јакобијан једнак ρ.

$$
\begin{aligned}
\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy &= \iint_G \rho^2 d\rho d\varphi \\
&= \int_0^{\pi} \varphi \int_0^{3\sin\varphi} \rho^2 d\rho \\
&= 9\int_0^{\pi} \sin^3\varphi d\varphi \\
&= 9\int_0^{\pi} (\cos^2\varphi - 1)d(\cos\varphi) \\
&= 12.
\end{aligned}
$$

4.22 Трансформацијом у поларне координате ($x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$) област интеграције D пресликава се у правоугаоник $G : [\pi/2, \pi] \times [0, \pi/2]$, при чему је Јакобијан једнак ρ.

$$
\begin{aligned}
\iint_D \cos\sqrt{x^2+y^2}dxdy &= \iint_G \rho\cos\rho d\rho d\varphi \\
&= \int_{\pi/2}^{\pi} \varphi \cdot \int_0^{\pi/2} \rho\cos\rho d\rho \\
&= \frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).
\end{aligned}
$$

4.24 Трансформацијом у поларне координате ($x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$) област интеграције D пресликава се у област $G = \{(\varphi, \rho)\ :\ 0 \le \rho \le 4\cos\varphi,\ -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2\}$, при чему је Јакобијан једнак ρ.

$$
\begin{aligned}
\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy &= \iint_G \rho\cdot\rho^2 d\rho d\varphi \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \varphi \int_0^{4\cos\varphi} \rho^3 d\rho \\
&= 64\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\varphi d\varphi \\
&= 64\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi \\
&= 16\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi)d\varphi \\
&= 24\pi.
\end{aligned}
$$

4.32 Трансформацијом у поларне координате ($x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$) област интеграције D пресликава се у област

$$G = \{(\varphi, \rho)\ :\ 4\cos\varphi \le \rho \le 8\cos\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi/4\},$$

при чему је Јакобијан једнак ρ.

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2} &= \iint_G \frac{\rho d\rho d\varphi}{\rho^4} \\
&= \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} \frac{d\rho}{\rho^3} \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{\rho^2}\Big|_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi}\right) d\varphi \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{64\cos^2\varphi} - \frac{1}{16\cos^2\varphi}\right) d\varphi \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{64} - \frac{1}{16}\right)\int_0^{\pi/4} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} \\
&= \frac{3}{128}\tan\varphi\Big|_0^{\pi/4} \\
&= \frac{3}{128}.
\end{aligned}$$

4.34 Користећи поларне координате ($x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$) имамо да је

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{\pi/2}(2\cos\varphi+\sin\varphi)d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho^2 d\rho \\
&= \frac{16}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^4\varphi d\varphi - \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^3\varphi d(\cos\varphi) \\
&= \frac{16}{3}\cdot\frac{3\pi}{16} - \frac{8}{3}\cdot\frac{-1}{4} \\
&= \pi + 2/3.
\end{aligned}$$

Друго решење. Ако је $x = 1 + r\cos\theta$ и $y = r\sin\theta$, тада је

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 (2+2r\cos\theta + r\sin\theta) r dr \\
&= \int_0^{\pi}\left(1+\frac{2}{3}\cos\theta + \frac{1}{3}\sin\theta\right)d\theta \\
&= \pi + 2/3.
\end{aligned}$$

4.37 Нека је $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$, где је

$$\mathcal{D}_1 = \{(x,y) \,:\, 0\le x\le\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ 0\le y\le x^2\},\quad \mathcal{D}_2 = \{(x,y) \,:\, 0\le x\le\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ x^2\le y\le \pi\}.$$

Како је

$$|y-x^2| = \begin{cases} y-x^2, & y\ge x^2 \\ x^2-y, & y<x^2\end{cases} = \begin{cases} y-x^2, & (x,y)\in\mathcal{D}_1 \\ x^2-y, & (x,y)\in\mathcal{D}_2\end{cases}$$

то је

$$I = \iint_{\mathcal{D}_1} f(x,y)dxdy + \iint_{\mathcal{D}_2} f(x,y)dxdy = I_1 + I_2,$$

где је

$$I_1 = \int_0^{\sqrt{\pi/2}} xdx \int_{x^2}^{\pi}\sin(y-x^2)dy = \int_0^{\sqrt{\pi/2}} x(\cos x^2+1)dx = \frac{1}{2}\sin x^2 + \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{\pi/2}} = \frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$$

$$I_2=\int_0^{\sqrt{\pi/2}} xdx\int_0^{x^2}\sin(x^2-y)dy=\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x(1-\cos x^2)dx=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\sin x^2\Big|_0^{\sqrt{\pi/2}}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

Дакле, $I=I_1+I_2=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}$.

4.41 $V=\frac{1}{2}\iint_D(x^2+y^2)dxdy$, где је D унутрашњост круга $x^2+y^2-2x=0$.

Користећи поларне координате имамо да је

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho^3 d\rho\\
&= \frac{1}{8}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(2\cos\varphi)^4 d\varphi\\
&= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi\\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi+\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos 2\varphi d\varphi+\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 2\varphi d\varphi\\
&= \frac{\pi}{2}+0+\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\cos 4\varphi}{2}d\varphi\\
&= \frac{3}{4}\pi.
\end{aligned}$$

4.44 Увођењем уопштених поларних координата $x=2\varrho\cos\varphi$, $y=3\varrho\sin\varphi$, област D се пресликава у област

$$D'=\left\{(\varphi,\varrho):0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\varrho\le 1\right\},$$

па је

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^1\frac{6\varrho^2\cos\varphi\sin\varphi}{6\varrho}\cdot 6\varrho d\varrho\\
&= 3\int_0^{\pi/2}\sin 2\varphi d\varphi\cdot\frac{\varrho^3}{3}\Big|_0^1\\
&= -\frac{1}{2}\cos 2\varphi\Big|_0^{\pi/2}\\
&= 1.
\end{aligned}$$

4.45 Имамо да је $P=\iint_D dxdy$, где је D област ограничена датим линијама. Преласком на поларне координате $x=\varrho\cos\varphi$, $y=\varrho\sin\varphi$ добија се

$$\begin{aligned}
P &= \int_0^{\pi/4}d\varphi\int_{2a\cos\varphi}^{2b\cos\varphi}\varrho d\varrho\\
&= 2(b^2-a^2)\int_0^{\pi/4}\cos^2\varphi d\varphi\\
&= (b^2-a^2)\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\pi/4}\\
&= \frac{(b^2-a^2)(\pi+2)}{4}.
\end{aligned}$$

4.46 Тражена запремина се може израчунати помоћу двојног интеграла.

$$V = \iint_D [1 + x^2 + y^2 - (1 - x^2 - y^2)]dxdy = 2\iint_D (x^2 + y^2)dxdy,$$

где је $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Увођењем поларних координата $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$, добија се

$$V = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \varrho^2 \cdot \varrho d\varrho = \pi.$$

4.47 Ако је D пресек кругова $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ и $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$, онда је

$$V = \iint_D (x+y)dxdy = 2\int_0^{\pi/4} (\cos\varphi + \sin\varphi)d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} \varrho^2 d\varrho = \frac{16}{3}(I + J),$$

где је

$$I = \int_0^{\pi/4} \cos\varphi \sin^3\varphi d\varphi = \int_0^{\pi/4} \sin^3\varphi d\sin\varphi) = \frac{1}{16},$$

$$J = \int_0^{\pi/4} \sin^4\varphi d\varphi = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\cos 4\varphi - \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right) d\varphi = \frac{3}{8} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}.$$

Према томе,

$$V = \frac{16}{3}\left(\frac{3}{8} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{3}{16}\right) = \frac{\pi}{2} - 1.$$

4.48 Тражена запремина је

$$V = \frac{1}{3}\iint_D (x^2 + y^2)dxdy,$$

где је D област ограничена линијама $x^2 + y^2 = 6x$ и $y = \sqrt{3}x$, $0 \leq y \leq 3\sqrt{3}/2$. Преласком на поларне координате $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, област D се пресликава у област

$$D' = \left\{(\varphi, \rho) : \frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 6\cos\varphi\right\},$$

па је

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\int_{\pi/3}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{6\cos\varphi} \rho^2 \cdot \rho d\rho \\ &= 108\int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos^4\varphi d\varphi \\ &= 27\int_{\pi/3}^{\pi/2} (1 + \cos 2\varphi)^2 d\varphi \\ &= 27\int_{\pi/3}^{\pi/2} \left(1 + 2\cos 2\varphi + \frac{1 + \cos 4\varphi}{2}\right) d\varphi \\ &= \frac{27(4\pi - 7\sqrt{3})}{16}. \end{aligned}$$

4.52 Ако је I дати интеграл, онда је

$$I = \int_0^{\pi/6} d\phi \int_0^{2\sqrt{3}} \rho^2 \sin\phi \, d\phi + \int_0^3 dx \int_{x/\sqrt{3}}^{(6-x)/\sqrt{3}} ydy = 8\sqrt{3} - 3.$$

Други начин. Ако правом $x = 3$ поделимо дату област на два дела, онда је

$$I = \int_0^3 dx \int_0^{-\sqrt{3}x/3 + 2\sqrt{3}} ydy + \int_3^{2\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{12 - x^2}} ydy = 8\sqrt{3} - 3.$$

4.53 Постоје два тела ограничена датим површима. Једно тело (T_1) је део ваљка између $z = 0$ и $z = 9 - x^2 - y^2$, а друго (T_2) је део параболоида (P) без T_1. Према томе,

$$V_{T_1} = \int_0^{\pi} d\phi \int_0^3 \rho(9-\rho^2)\; d\rho = \frac{15\pi}{2},$$

$$V_P = 4\int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^3 \rho(9-\rho^2)\; d\rho = \frac{81\pi}{2}$$

и $V_{T_2} = V_P - V_{T_1} = 33\pi$.

Напомена. Може и

$$V_{T_2} = \frac{V_P}{2} + 2\int_0^{\pi/2} d\phi \int_{2\sin\phi}^3 (9-\rho^2)\rho d\rho.$$

4.54 Сменом $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$ добијамо да је

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\, dx\, dy = \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\phi \int_{4\cos\phi}^{8\cos\phi} \frac{d\phi}{\rho^3} = \frac{1}{64}\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{d\phi}{\cos^2\phi} = \frac{\sqrt{3}-1}{64}.$$

4.55 Сменом $\begin{cases} u = 2x - y \\ v = x + y \end{cases}$ односно $\begin{cases} x = (u+v)/3 \\ y = (2v-u)/3 \end{cases}$ добија се да је

$$\iint_{\mathcal{D}} xy\, dx\, dy = \iint_{\mathcal{D}_1} (u+v)(2v-u)|J|\, du\, dv,$$

где је

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}, \quad \mathcal{D}_1 = \{(u,v),\ 1 \le u \le 3,\ -2 \le v \le 0\}.$$

Свођењем на двоструки интеграл добија се да је дати интеграл једнак $-22/81$.

5.1 За дати степени ред је $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$, па је полупречник конвергенције реда

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n+1}{n}} = 1.$$

Према томе, ако је $\left|\dfrac{x-1}{3}\right| < 1$, тј. ако $x \in (-2,4)$ ред конвергира апсолутно. За $x = -2$ ред постаје $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ и дивергентан је. За $x = -2$ ред постаје $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ и конвергира по Лајбницовом критеријуму, али не и апсолутно. Област апсолутне конвергенције реда је, дакле, интервал $(-2,4)$, а условне $[-2,4)$.