ИНТЕГРАЛИ
Задаци са колоквијума

Драган Ђорић

Садржај

1 Неодређени интеграл

Колоквијум, 2009

1.1 $\displaystyle\int \frac{2\ln^2 x + 5\ln x + 2}{x(\ln x - 2)(\ln^2 x + 4\ln x + 8)}dx$

1.2 $\displaystyle\int \frac{(9\cos x - 10 - 3\cos^2 x)\cdot \sin x}{(\cos x + 2)(\cos^2 x - 4\cos x + 8)}dx$

1.3 $\displaystyle\int \frac{(3\sin^2 x + 2\sin x + 11)\cdot \cos x}{(\sin x - 1)(\sin^2 x + 2\sin x + 5)}dx$

1.4 $\displaystyle\int \frac{3e^{3x} - e^{2x} + 4e^{x}}{(e^x + 1)(e^{2x} - 2e^x + 5)}dx$

Колоквијум, 2008

1.5 $\displaystyle\int \frac{3\sin 2x}{\sin^2 x + 1}dx$

1.6 $\displaystyle\int \frac{3\ln x}{x(\ln^3 x - 1)}dx$

1.7 $\displaystyle\int \frac{3\sin 2x}{\cos^2 x + 1}dx$

1.8 $\displaystyle\int \frac{3e^{2x}dx}{e^{3x} - 1}$

1.9 $\displaystyle\int \frac{2\sin^2 x}{1 + 2\cos^2 x}dx$

1.10 $\displaystyle\int \frac{2(e^x + e^{2x})}{e^{4x} - 1}dx$

1.11 $\displaystyle\int \frac{1 - \cos 2x}{2 + \cos 2x}dx$

1.12 $\displaystyle\int \frac{2(1 + \ln x)}{x(\ln^4 - 1)}dx$

Колоквијум, 2007

1.13 $\displaystyle\int \frac{3x^2 - x - 2}{x^3 + 8}dx$

1.14 $\displaystyle\int \frac{4x^2 + 3x + 2}{x^3 - 8}dx$

1.15 $\displaystyle\int \frac{x^2 - 3x}{(x - 1)(x^2 - 2x + 3)}dx$

1.16 $\displaystyle\int \frac{x^2 + 3x}{(x + 1)(x^2 + 2x + 3)}dx$

1.17 $\displaystyle\int \frac{3x^2 + 5x}{(x - 1)(x^2 + 2x + 5)}dx$

1.18 $\int \frac{3x^2 - 4x + 1}{(x+1)(x^2 - 2x + 5)} dx$

1.19 $\int \frac{x^2 + 5x + 1}{(x+2)(x^2 + 2x + 5)} dx$

1.20 $\int \frac{-3x - 4}{(x-2)(x^2 - 2x + 5)} dx$

Колоквијум, 2006

1.21 $\int \frac{(9 \sin x + 2) \cos x}{\sin^2 x + 6 \sin x + 58} dx$

1.22 $\int \frac{(7 \cos x - 3) \sin x}{\cos^2 x + 4 \cos x + 40} dx$

1.23 $I = \int \frac{(5e^x + 2)e^x}{e^{2x} - 8e^x + 41} dx$

1.24 $\int \frac{(3e^x - 4)e^x}{e^{2x} - 12e^x + 52} dx$

1.25 $I = \int \frac{(9e^x + 2)e^x}{e^{2x} + 6e^x + 58} dx$

1.26 $I = \int \frac{(\sin x - 5) \cos x}{\sin^2 x + 8 \sin x + 97} dx$

Колоквијум, 2005

Колоквијум, 2004

1.27 $\int \frac{\sin 2x - 2 \cos^3 x}{\sin^3 x + 1} dx$

1.28 $\int \frac{\ln(1 + \cos x)}{\sin^2 x} dx$

1.29 $\int x \cdot \arcsin x dx$

1.30 $\int \frac{\sin x dx}{\cos x + \cos^2 x + \cos^3 x}$

Колоквијум, 2003

1.31 $\int \frac{(1 + \sin x) \cos x}{(1 + \cos x) \sin x} dx$

1.32 $\int \frac{\sin x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$

1.33 $\int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x - \cos^3 x}$

Колоквијум, 2002

1.34 $\int \frac{1 + lnx}{1 + (xlnx)^3} dx$

1.35 $\displaystyle\int \frac{dx}{(tgx-1)^2}$

1.36 *Одредити везу између* I_n *и* I_{n-2}, $(n \in N,\ n > 2)$ *ако је*

$$I_n = \int arcsin^n x\, dx.$$

1.37 $\displaystyle\int \frac{dx}{4 + tgx + 4ctgx}$

Колоквијум, 2001

1.38 $\displaystyle\int \arcsin x \cdot \arccos x dx$

1.39 $\displaystyle\int \frac{xe^{3x^2/2}}{\left(e^{x^2}+1\right)^2} dx$

1.40 $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$

1.41 $\displaystyle\int \frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x(1+\cos^2 x)} dx$

Колоквијум, 2000

1.42 $\displaystyle\int \frac{x\, ln(x+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}}\ dx$

1.43 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x + 1}$

1.44 $\displaystyle\int \frac{x \ln(x+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}} dx$

Колоквијум, 1999

Колоквијум није одржан због бомбардовања Југославије од стране NATO пакта.

Колоквијум, 1998

1.45 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$

1.46 $\displaystyle\int \frac{x \ln x}{(x^2-1)^{3/2}} dx$

1.47 $\displaystyle\int x \sin\sqrt{x}\ dx$

Колоквијум, 1997

Колоквијум, 1996

1.48 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\sin x}}{\cos x} dx$

1.49 $\displaystyle\int \frac{5e^x}{e^{4x}-3e^{2x}-4} dx$

Колоквијум, 1995

1.50 $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx$

1.51 $\displaystyle\int \frac{x^2 \arctan x}{1+x^2}dx$

Колоквијум, 1994

Колоквијум, 1993

Колоквијум, 1992

2 Одређени интеграл

Колоквијум, 2009

2.1 *Израчунати запремину тела које настаје ротацијом око x-осе фигуре ограничене линијама* $y = \sqrt{\sqrt{x} \cdot \sin\sqrt{x}}$, $y = 0$ *за* $0 \le x \le \pi^2/4$.

2.2 *Израчунати површину површи настале ротацијом око x-осе криве* $y = \ln x - \frac{x^2}{8}$ *за* $\sqrt{e} \le x \le e$.

2.3 *Израчунати запремину тела које настаје ротацијом око x-осе фигуре ограничене линијама* $y = \sqrt{\sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}}}$, $y = 0$ *за* $0 \le x \le 1$.

2.4 *Израчунати површину површи настале ротацијом око x-осе криве* $y = x^2 - \frac{\ln x}{8}$ *за* $\sqrt{e} \le x \le e$.

Колоквијум, 2008

2.5 *Израчунати површину фигуре ограничене кривом* $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ *и правама* $y = 1$ *и* $x = 0$.

2.6 *Израчунати запремину тела које настаје ротацијом око x-осе фигуре ограничене кривом* $y = \sqrt{x}\cos x$ *и правама* $y = 0$, $x = \pi/4$ *и* $x = 3\pi/4$.

2.7 *Израчунати запремину тела које настаје ротацијом око x-осе фигуре ограничене кривом* $y = \sqrt{\ln(x + \sqrt{x^2+1}}$ *и правама* $y = 0$, $x = 0$ *и* $x = 2$.

2.8 *Израчунати површину фигуре ограничене кривом* $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$ *и правама* $y = 1$ *и* $x = 0$.

2.9 *Израчунати површину површи настале ротацијом око x-осе криве* $x = 1 + \left(\dfrac{y-1}{2}\right)^2$ *за* $0 \le y \le 1$.

2.10 *Израчунати дужину лука криве задате са* $x = t^2 \sin t$, $y = t^2 \cos t$ *за* $0 \le t \le \sqrt{5}$.

2.11 *Израчунати дужину лука криве* $y = 2\ln(x + \sqrt{x^2-4})$ *за* $2\sqrt{5} \le x \le 2\sqrt{10}$.

2.12 *Израчунати површину површи настале ротацијом око y-осе криве* $y = 1 + \left(\dfrac{x-1}{2}\right)^2$ *за* $0 \le x \le 1$.

Колоквијум, 2007

2.13 *Израчунати запремину тела које настаје ротацијом око x-осе фигуре ограничене кривом* $y = \dfrac{1}{2}(\cot x - \tan x)$ *и правама* $y = 0$, $x = \pi/6$ *и* $x = \pi/4$.

2.14 *Израчунати површину површи настале ротацијом око x-осе криве* $y = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ *за* $-2 \le x \le 2$.

2.15 *Израчунати дужину лука криве* $y = \ln(1 - x^2)$ *за* $-1/2 \le x \le 1/2$.

2.16 *Израчунати дужину лука криве задате са* $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ *за* $0 \le t \le \pi/2$ *и* $a > 0$.

2.17 *Израчунати запремину тела које настаје ротацијом око x-осе фигуре ограничене кривом* $y = \ln x$ *и правама* $y = 0$, $x = 2$ *и* $x = 5$.

2.18 *Израчунати површину површи настале ротацијом око x-осе криве* $y^2 = 4 + x$ *за* $-4 \le x \le 2$.

2.19 *Израчунати дужину лука криве* $y = \ln x$ *за* $\sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$.

2.20 *Израчунати дужину лука криве задате са* $x = (t^2-2)\sin t + 2t\cos t$, $y = (t^2-2)\cos t - 2t\sin t$ *за* $0 \le t \le \pi$.

Колоквијум, 2006

2.21 *Израчунати дужину лука криве* $y = \sqrt{x^2 - 48} + 4\sqrt{6}\ln(x + \sqrt{x^2 - 48})$ *за* $7 \le x \le 8$.

2.22 *Израчунати запремину тела које настаје ротацијом око x-осе фигуре ограничене кривом* $y = x\sqrt{\ln\dfrac{1+2x}{1-x}}$ *и правама* $y = 0$, $x = 0$ *и* $x = 1/2$.

2.23 *Израчунати површину фигуре ограничене линијама* $y = \dfrac{e^x + 1}{e^{2x} + 1}$, $x = 0$, $x = \ln 2$ *и* $y = 0$.

2.24 *Израчунати површину фигуре ограничене линијама* $y = \dfrac{\sin x \cdot \ln(\cos x)}{(\cos x + 1)^2}$, $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{3}$ *и* $y = 0$.

Колоквијум, 2005

Колоквијум, 2004

2.25 *Израчунати запремину тела које настаје ротацијом око y-осе конвексне фигуре ограничене линијама* $x^2 + y^2 = x$ *и* $x^2 + y^2 = y$.

2.26 *Израчунати дужину лука криве* $y = \sqrt{x^2 - 24} + 4\sqrt{3}\ln(x + \sqrt{x^2 - 24})$ *за* $5 \le x \le 7$.

2.27 *Израчунати површину фигуре ограничене кривом* $y = \dfrac{1}{\sqrt{10x - x^2 - 21}}$ *и правама* $x = 4$, $x = 6$, $y = 0$.

Колоквијум, 2003

2.28 *Израчунати запремину тела које настаје ротацијом око x-осе фигуре ограничене кривом*
$y = x$
$sqrt\arccos x$ *и правом* $y = 0$.

2.29 *Израчунати запремину тела које настаје ротацијом око x-осе фигуре ограничене кривом $y = \sqrt{x}\cos x$ и правама $x = \dfrac{\pi}{2}$ и $y = 0$.*

2.30 *Израчунати дужину лука криве $y = \sqrt{x^2 - 48} + 4\sqrt{6}\ln(x + \sqrt{x^2 - 48})$ за $7 \leq x \leq 8$.*

Колоквијум, 2002

2.31 *Израчунати дужину лука криве дате са $x(t) = 2\sqrt{2}\sqrt{1 - t^2}$, $y(t) = t\sqrt{1 - t^2}$ за $0 \leq t \leq 1$.*

2.32 *Израчунати запремину тела које настаје ротацијом око x-осе фигуре ограничене кривом $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ и правама $y = 0$ и $x = 1$.*

2.33 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$

Колоквијум, 2001

2.34 *Израчунати запремину тела које настаје ротацијом око x-осе фигуре ограничене кривом $y = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$ и правама $y = 0$, $x = 2$ и $x = 3$.*

2.35 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^x dx}{(e^x + 1)(x^2 + 1)}$

2.36 *Нека је $I_n = \int_0^1 x^2 \ln^n x dx$. Одредити најпре везу између I_n и I_{n-1}, а затим израчунати I_n.*

Колоквијум, 2000

Колоквијум, 1999

Колоквијум није одржан због бомбардовања Југославије од стране NATO пакта.

Колоквијум, 1998

Колоквијум, 1997

Колоквијум, 1996

Колоквијум, 1995

Колоквијум, 1994

Колоквијум, 1993

Колоквијум, 1992

3 Двојни интеграл

Колоквијум, 2009

3.1 $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} y e^{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}, \quad \mathcal{D} = \{(x, y) \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 16, x \geq 0,\ y \geq 0\}$

3.2 $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} (3x + y)\cos(\pi(x - 3y))dxdy,$ $\mathcal{D}$ *- паралелограм ограничен правама:* $y = -3x + 3$, $y = -3x + 1$, $y = \frac{x}{3}$, $y = \frac{x}{3} - \frac{1}{12}$.

3.3 $\iint_{\mathcal{D}} \arcsin \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy, \quad \mathcal{D} = \{(x,y) \;:\; x^2+y^2 \leq 16,\; -y \leq x \leq y\}$

3.4 $\iint_{\mathcal{D}} (x-2y)\sin(\pi(2x+y))dxdy$, $\quad \mathcal{D}$ *- паралелограм ограничен правама:* $y = \frac{x}{2}+2$, $y = \frac{x}{2}+3$, $y=-2x$, $y = -2x+\frac{1}{2}$.

Колоквијум, 2008

3.5 $\iint_{\mathcal{D}} (x^2-y^2-2xy)dxdy, \quad \mathcal{D} = \{(x,y) \;:\; x^2+y^2 \leq 4,\; x \geq 0,\; y \geq 0,\; x \leq y\}$

3.6 $\iint_{\mathcal{D}} xe^{y/2-x}dxdy$, $\quad \mathcal{D}$ *- паралелограм ограничен правама:* $y = 2x-1$, $y = 2x+3$, $y = -\dfrac{x}{2}-3$, $y = -\dfrac{x}{2}+1$.

3.7 $\iint_{\mathcal{D}} x\sin(3x-y)dxdy$, $\quad \mathcal{D}$ *- паралелограм ограничен правама:* $y = 3x$, $y = 3x - \dfrac{\pi}{2}$, $y = -x-1$, $y = -x+3$.

3.8 $\iint_{\mathcal{D}} (x^2-y^2+2xy)dxdy, \quad \mathcal{D} = \{(x,y) \;:\; x^2+y^2 \leq 9,\; x \geq 0,\; y \geq 0,\; x \leq y\}$

3.9 $\iint_{\mathcal{D}} (x+y)^2 e^{x^2-y^2}dxdy$, $\quad \mathcal{D}$ *- паралелограм ограничен правама:* $y = x$, $y = x+1$, $y = -x-1$, $y = -x+1$.

3.10 $\iint_{\mathcal{D}} \dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy, \quad \mathcal{D} = \{(x,y) \;:\; 1 \leq x^2+y^2 \leq 4,; x \leq 0,\; y \geq 0\}$

3.11 $\iint_{\mathcal{D}} \dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy, \quad \mathcal{D} = \{(x,y) \;:\; 4 \leq x^2+y^2 \leq 9,\; x \geq 0,\; y \leq 0\}$

3.12 $\iint_{\mathcal{D}} (y-x)^2\cos(x^2-y^2)dxdy$, $\quad \mathcal{D}$ *- паралелограм ограничен правама:* $y = x$, $y = x+\dfrac{\pi}{2}$, $y = -x-1$, $y = -x+1$.

Колоквијум, 2007

3.13 $\iint_{\mathcal{D}} (x-y)\sin(x+y)dxdy$, $\quad \mathcal{D}$ *- паралелограм ограничен правама:* $y = -x$, $y = -x+\dfrac{\pi}{2}$, $y = 3x+1$, $y = 3x+5$.

3.14 $\iint_{\mathcal{D}} \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy, \quad \mathcal{D} = \{(x,y) \;:\; 4 \leq x^2+y^2 \leq \dfrac{\pi^2}{4},\; x \geq 0,\; y \leq 0\}$

3.15 $\iint_{\mathcal{D}} (x^2+y^2)dxdy$, $\quad \mathcal{D}$ *- паралелограм са теменима* $A(-1,1)$, $B(1,-1)$, $C(2,2)$ *и* $D(0,4)$.

3.16 $\iint_{\mathcal{D}} \sqrt{x^2+y^2}dxdy, \quad \mathcal{D} = \{(x,y) \;:\; x^2+y^2 \leq 3y\}$

3.17 $\iint_{\mathcal{D}} (y^2-x^2)dxdy$, $\quad \mathcal{D}$ *- паралелограм са теменима* $A(-1,2)$, $B(1,-2)$, $C(2,-1)$ *и* $D(0,3)$.

3.18 $\iint_{\mathcal{D}} \cos\sqrt{x^2+y^2}dxdy, \quad \mathcal{D} = \{(x,y) \;:\; x^2+y^2 \leq \dfrac{\pi^2}{4},\; x \leq 0,\; y \geq 0\}$

3.19 $\iint_{\mathcal{D}} (x+y)\cos(x-y)dxdy$, $\quad \mathcal{D}$ *- паралелограм ограничен правама:* $y = x$, $y = x + \dfrac{\pi}{2}$, $y = -2x+1$, $y = -2x+4$.

3.20 $\iint_{\mathcal{D}} \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, $\quad \mathcal{D} = \{(x,y) \; : \; x^2+y^2 \leq 4y\}$

Колоквијум, 2006

3.21 $\iint_{\mathcal{D}} \ln x^2 + y^2 dxdy$, $\quad \mathcal{D} = \{(x,y) \; : \; e^2 \leq x^2+y^2 \leq e^4\}$

3.22 $\iint_{\mathcal{D}} \dfrac{25xdxdy}{(y+3x-3)(y-2x-4)}$, $\quad \mathcal{D}$ *- паралелограм ограничен правама:* $y = 2x+5$, $y = -3x+4$, $y = 2x+9$, $y = -3x+8$.

3.23 $\iint_{\mathcal{D}} \dfrac{\arctan\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, $\quad \mathcal{D} = \{(x,y) \; : \; \dfrac{1}{3} \leq x^2+y^2 \leq 3\}$

3.24 $\iint_{\mathcal{D}} \dfrac{64xdxdy}{(y+3x-3)(y-2x-4)}$, $\quad \mathcal{D}$ *- паралелограм ограничен правама:* $y = 3x+2$, $y = -5x+5$, $y = 3x+5$, $y = -5x+8$.

Колоквијум, 2005

Колоквијум, 2004

3.25 *Израчунати* $\iint_D (x^2-y^2)e^{x+y}dxdy$ *ако је* D *паралелограм одређен правама* $y = -x-1$, $y = -x+3$, $y = x+2$ *и* $y = x-4$.

3.26 *Израчунати запремину тела ограниченог параболоидом* $2z = 4 - x^2 - y^2$, *равни* $z = 0$ *и цилиндром* $x^2+y^2-2x = 0$ *(унутар цилиндра).*

3.27 *Израчунати запремину тела ограниченог параболоидом* $x^2+y^2 = 2z$ *и конусом* $4(x^2+y^2) = (z+2)^2$.

3.28 *Израчунати* $\iint_D \dfrac{dxdy}{(x^2+y^2)^2}$ *ако је* D *област ограничена кривим линијама* $x^2+y^2 = 4x$, $x^2+y^2 = 8x$, $y = 0$ *и* $y = x$.

Колоквијум, 2003

3.29 *Израчунати* $\iint_D xydxdy$ *ако је* D *паралелограм одређен правама* $y = 2x-1$, $y = 2x+1$, $y = \dfrac{x}{2}+1$ *и* $y = \dfrac{x}{2}+3$.

3.30 *Израчунати запремину тела ограниченог површима:* $x^2+y^2 = 2x$, $z = 2x+y$ *и* $z = 0$ *за* $y \geq 0$.

3.31 *Израчунати запремину тела ограниченог површима:* $x^2+y^2 = 2y$, $z = x+2y$ *и* $z = 0$ *за* $x \geq 0$.

Колоквијум, 2002

3.32 *Израчунати запремину тела ограниченог сфером* $x^2+y^2+z^2 = r^2$ *и цилиндром* $x^2+y^2 = rx$ $(z \geq 0,\ r > 0)$.

3.33 $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} x\cdot\sin|y-x^2|dxdy, \quad \mathcal{D}=\{(x,y)\ :\ 0\le x\le\sqrt{\frac{\pi}{2}}\}$

3.34 $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} (x^2+y^2+2y)dxdy, \quad \mathcal{D}=\{(x,y)\ :\ x^2+y^2\le 1,\ x^2-y\le 1\}$

3.35 *Израчунати запремину тела ограниченог површима:* $x^2+y^2=2(x+y)$, $z=x^2+y^2$ *и* $z=0$.

Колоквијум, 2001

3.36 $\iint_{\mathcal{D}} \frac{xdxdy}{x^2+y^2}$, $\quad\mathcal{D}$ *- област ограничена линијама* $x^2=2y$ *и* $x^2+y^2=8$ *за* $x\ge 0$ *и* $y\ge 0$.

3.37 *Израчунати запремину тела ограниченог површима:* $x^2+y^2-2x=0$, $2z=x^2+y^2$ *и* $z=0$.

3.38 *Израчунати површину фигуре ограничене линијама* $xy=\dfrac{a^2}{2}$, $xy=2a^2$, $y=\dfrac{x}{2}$ *и* $y=2x$ *за* $a>0$.

3.39 *Израчунати запремину тела ограниченог површима:* $x^2+y^2-2x=0$, $2z=4-x^2-y^2$ *и* $z=0$ *(унутар цилиндра).*

Колоквијум, 2000

3.40 $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} \frac{xy\ dxdy}{\sqrt{9x^2+4y^2}}, \quad \mathcal{D}=\left\{(x,y): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1,\ x\ge 0, y\ge 0\right\}.$

3.41 *Израчунати површину ограничену линијама*

$$x^2+y^2=2ax,\ x^2+y^2=2bx,\ y=x,\ y=0, \quad (0<a<b).$$

Колоквијум, 1999

Колоквијум није одржан због бомбардовања Југославије од стране NATO пакта.

Колоквијум, 1998

Колоквијум, 1997

Колоквијум, 1996

Колоквијум, 1995

Колоквијум, 1994

Колоквијум, 1993

Колоквијум, 1992

Упутства и резултати

1.1 Сменом $\ln x = t$ имамо $I = \displaystyle\int \frac{2t^2+5t+2}{(t-2)(t^2+4t+8)}dt$

$$\frac{2t^2+5t+2}{(t-2)(t^2+4t+8)} = \frac{A}{t-2} + \frac{Bt+C}{t^2+4t+8} = \frac{1}{t+2} + \frac{t+3}{t^2+4t+8}$$

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{dt}{t-2} + \int \frac{t+2+1}{t^2+4t+8}dt \\
&= \ln|t-2| + \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+4t+8)}{t^2+4t+8} + \int \frac{dt}{(t+2)^2+2^2} \\
&= \ln|t-2| + \frac{1}{2}\ln(t^2+4t+8) + \frac{1}{2}\arctan\frac{t+2}{2} + C \\
&= \ln|\ln x - 2| + \frac{1}{2}\ln(\ln^2 x + 4\ln x + 8) + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\ln x + 2}{2}\right) + C
\end{aligned}$$

1.2 Сменом $\cos x = t$ добијамо $I = \displaystyle\int \frac{3t^2-9t+10}{(t+2)(t^2-4t+8)}dt$

$$\frac{3t^2-9t+10}{(t+2)(t^2-4t+8)} = \frac{A}{t+2} + \frac{Bt+C}{t^2-4t+8} = \frac{2}{t+2} + \frac{t-3}{t^2-4t+8}$$

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{2dt}{t+2} + \int \frac{t-2-1}{t^2-4t+8}dt \\
&= 2\ln|t+2| + \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2-4t+8)}{t^2-4t+8} - \int \frac{dt}{(t-2)^2+2^2} \\
&= 2\ln|t+2| + \frac{1}{2}\ln(t^2-4t+8) - \frac{1}{2}\arctan\frac{t-2}{2} + C \\
&= 2\ln|\cos x + 2| + \frac{1}{2}\ln(\cos^2 x - 4\cos x + 8) - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\cos x - 2}{2}\right) + C
\end{aligned}$$

1.3 Сменом $\sin x = t$ имамо $I = \displaystyle\int \frac{3t^2+2t+11}{(t-1)(t^2+2t+5)}dt$

$$\frac{3t^2+2t+11}{(t-1)(t^2+2t+5)} = \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+2t+5} = \frac{2}{t-1} + \frac{t-1}{t^2+2t+5}$$

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{2dt}{t-1} + \int \frac{t+1-2}{t^2+2t+5}dt \\
&= 2\ln|t-1| + \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+2t+5)}{t^2+2t+5} - 2\int \frac{dt}{(t+1)^2+2^2} \\
&= 2\ln|t-1| + \frac{1}{2}\ln(t^2+2t+5) - \arctan\frac{t+1}{2} + C \\
&= 2\ln|\sin x - 1| + \frac{1}{2}\ln(\sin^2 x + 2\sin x + 5) - \arctan\left(\frac{\sin x + 1}{2}\right) + C
\end{aligned}$$

1.4 Сменом $e^x = t$ добијамо $I = \displaystyle\int \frac{3t^2-t+4}{(t+1)(t^2-2t+5)}dt$

$$\frac{3t^2-t+4}{(t+1)(t^2-2t+5)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2-2t+5} = \frac{1}{t+1} + \frac{2t-1}{t^2-2t+5}$$

$$I = \ln|t+1| + \ln(t^2 02t+5) + \frac{1}{2}\arctan\frac{t-1}{2} + C$$

$$I = \ln(e^x+1) + \ln(e^{2x} - 2e^x + 5) + \frac{1}{2}\arctan\frac{e^x-1}{2} + C$$

1.6 Сменом $\cos x = t$ имамо

$$I = 6\int \frac{\sin x \cos x}{\cos^3 x + 1}dx = -6\int \frac{tdt}{t^3+1} = -6J.$$

Из једнакости

$$\frac{t}{t^3+1} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2-t+1}$$

следи

$$t = A(t^2-t+1) + (Bt+C)(t+1).$$

За $t=-1$ је $-1=3A$, па је $A=-1/3$.
За $t=0$ је $0=A+C$, па је $C=1/3$.
За $t=1$ је $1=-1/3+(B+1/3)\cdot 2$, па је $B=1/3$.

$$\begin{aligned}
J &= -\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t+1} + \frac{1}{3}\int\frac{t+1}{t^2-t+1}dt \\
&= -\frac{1}{3}\ln|t+1| + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{2t-1}{t^2-t+1}dt + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^2-t+1} \\
&= -\frac{1}{3}\ln|t+1| + \frac{1}{6}\ln(t^2-t+1) + \frac{1}{2}\int\frac{dt}{(t-1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2} \\
&= -\frac{1}{3}\ln|t+1| + \frac{1}{6}\ln(t^2-t+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t-1/2}{\sqrt{3}/2} + C.
\end{aligned}$$

Према томе,

$$\begin{aligned}
I &= 2\ln|\cos x+1| - \ln(\cos^2 x - \cos x + 1) - \frac{6}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\cos x - 1}{\sqrt{3}} + C \\
&= \ln\frac{(\cos x+1)^2}{\cos^2 x - \cos x + 1} - 2\sqrt{3}\arctan\frac{2\cos x - 1}{\sqrt{3}} + C.
\end{aligned}$$

1.9 Ако је $\tan x = t$, тада је $\sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$. Заменом ових израза у датом интегралу добијамо $I = 2\displaystyle\int\frac{t^2dt}{(t^2+1)(t^2+3)}$.

Из једнакости

$$\frac{t^2}{(t^2+1)(t^2+3)} = \frac{At+B}{t^2+1} + \frac{Ct+D}{t^2+3}$$

следи

$$t^2 = (At+B)(t^2+3) + (Ct+D)(t^2+1).$$

За $t=i$ је $-1=(Ai+B)\cdot 2$, па је $A=0$ и $B=-1/2$.
За $t=\sqrt{3}i$ је $-3=(C\sqrt{3}i+D)\cdot(-2)$, па је $C=0$ и $D=3/2$.

Према томе,

$$\begin{aligned}
I &= -\int\frac{dt}{t^2+1} + 3\int\frac{dt}{t^2+\sqrt{3}^2} \\
&= -\arctan t + \frac{3}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}} + C \\
&= -\arctan(\tan x) + \sqrt{3}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{3}} + C \\
&= = x + \sqrt{3}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{3}} + C.
\end{aligned}$$

1.14 Из једнакости

$$\frac{4x^2+3x+2}{x^3-8} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4}$$

добијамо $A = B = 2$ и $C = 3$.

$$\begin{aligned} I &= 2\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{2x+2}{x^2+2x+4}dx + \int \frac{dx}{x^2+2x+4} \\ &= 2\ln|x-2| + \ln(x^2+2x+4) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

1.30 Сменом $\cos x = t$ имамо $I = -\int \frac{dt}{t+t^2+t^3}$

$$\frac{1}{t(1+t+t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{1+t+t^2} = \frac{1}{t} - \frac{t+1}{1+t+t^2}$$

$$\begin{aligned} I &= -\int \frac{dt}{t} + \int \frac{t+1}{t^2+t+1}dt \\ &= -\ln|t| + \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+t+1)}{t^2+t+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t+1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2} \\ &= -\ln|t| + \frac{1}{2}\ln(t^2+t+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t+1/2}{\sqrt{3}/2} + C \\ &= -\ln|\cos x| + \frac{1}{2}\ln(\cos^2 x + \cos x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\cos x+1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

1.32 Сменом $\cot x = t$ имамо

$$I = \int \frac{\sin x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x} = \int \frac{1}{1+\cot^3 x}\cdot\frac{dx}{\sin^2 x} = -\int \frac{dt}{1+t^3}.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+t^3} &= \frac{A}{1+t} + \frac{Bt+C}{t^2-t+1} \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+t} + \frac{1}{3}\int \frac{2-t}{t^2-t+1}dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{1+t} + \frac{1}{3}\int \frac{t-2}{t^2-t+1}dt \\ &= -\frac{1}{3}\ln|1+t| + \frac{1}{6}\int \frac{2t-4}{t^2-t+1}dt \\ &= -\frac{1}{3}\ln|t+1| + \frac{1}{6}\int \frac{2t-1}{t^2-t+1}dt - \frac{1}{6}\int \frac{3dt}{t^2-t+1} \\ &= -\frac{1}{3}\ln|t+1| + \frac{1}{6}\ln(t^2-t+1) - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2-t+1} \\ &= -\frac{1}{3}\ln|t+1| + \frac{1}{6}\ln(t^2-t+1) - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t-1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2} \\ &= -\frac{1}{3}\ln|t+1| + \frac{1}{6}\ln(t^2-t+1) - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t-1/2}{\sqrt{3}/2} + C \\ &= -\frac{1}{3}\ln|t+1| + \frac{1}{6}\ln(t^2-t+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C \\ &= -\frac{1}{3}\ln|\cot x+1| + \frac{1}{6}\ln(\cot^2 x - \cot x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\cot x-1}{\sqrt{3}} + C \end{aligned}$$

Напомена. Ако се уведе смена $\tan x = t$, онда је $I = \int \frac{tdt}{1+t^3}$ и

$$\frac{t}{1+t^3} = \frac{A}{1+t} + \frac{Bt+C}{t^2-t+1}, \quad A = -\frac{1}{3},\ B = C = \frac{1}{3}.$$

1.34 Сменом $x \ln x = t$ имамо да је $I = \int \frac{dt}{1+t^3}$.

1.36 Парцијалном интеграцијом са $u = \arcsin^n x$ и $dx = dv$ добијамо

$$I_n = x \arcsin^n x - n \int \frac{x \arcsin^{n-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin^n x - n \cdot J.$$

Ако на интеграл J такође применимо парцијалну интеграцију са $u = \arcsin^{n-1} x$ и $dv = \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ добијамо

$$I_n = x \arcsin^n x + n\sqrt{1-x^2} \arcsin^{n-1} x - n(n-1) I_{n-2}.$$

1.41 Сменом $\cos x = t$ имамо

$$I = \int \frac{t-1}{t(1+t^2)} dt = \int \frac{tdt}{t(1+t^2)} - \int \frac{1+t^2-t^2}{t(1+t^2)} dt.$$

Дакле,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dt}{1+t^2} - \int \frac{dt}{t} + \frac{1}{2} \int \frac{2tdt}{1+t^2} \\ &= \arctan t - \ln|t| + \frac{1}{2} \ln(1+t^2) + C \\ &= \arctan(\cos x) - \ln|\cos x| + \frac{1}{2} \ln(1+\cos^2 x) + C. \end{aligned}$$

1.43 Користећи идентитете $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$ и $4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \sin^2 2\alpha$, подинтегрална функција се трансформише у $\frac{2}{(2-\sin 2x)(2+\sin 2x)}$, па је

$$I = 2 \int \frac{dx}{(2-\sin 2x)(2+\sin 2x)}.$$

Ако је $t = \tan x$, онда је $\sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, па је

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{(t^2+1)dt}{(t^2+t+1)(t^2-t+1)}.$$

Из разлагања

$$\frac{t^2+1}{(t^2+t+1)(t^2-t+1)} = \frac{At+B}{t^2+t+1} + \frac{Ct+D}{t^2-t+1}$$

добијамо да је $B = D = \frac{1}{2}$, $A = C = 0$, па је $I = \frac{1}{4}(I_1 + I_2)$, где је

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+t+1},\ I_2 = \int \frac{dt}{t^2-t+1}.$$

Даље је

$$I_1 = \int \frac{dt}{(t+1/2)^2 + 3/4} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C_1,$$

$$I_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C_2,$$

па је

$$I = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\arctan \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + \arctan \frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right) + C = \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan \frac{\sqrt{3}t}{1-t^2} + C,$$

где је $t = \tan x$.

Примедба: У сређивању резултата коришћена је формула

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}.$$

1.44 Применом методе парцијалне интеграције, за

$$u = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \; dv = \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}},$$

добија се

$$I = \sqrt{x^2+1} \ln(x + \sqrt{x^2+1}) - \int dx = \sqrt{x^2+1} \ln(x + \sqrt{x^2+1}) - x + C.$$

1.47 Дати интеграл се сменом $x = t^2$ своди на интеграл $\int 2t^3 \sin t dt$. После једне парцијалне интеграције, узимајући да је $u = t^3$, $dv = \sin t dt$, добија се

$$I = -2t^3 \cos t + 6I_1, \text{ где је } I_1 = \int t^2 \cos t dt$$

После две парцијалне интеграције се добија

$$I_1 = t^2 \sin t + 2t \cos t - 2 \sin t,$$

па је

$$I = -2t^3 \cos t + 6t^2 \sin t + 12t \cos t - 12 \sin t + C, \text{ где је } t = \sqrt{x}.$$

1.48 Ако је $t = \sqrt{\sin x}$ $(x \in [0, \pi/2))$, онда је

$$I = \int \frac{\sqrt{\sin x}}{\cos x} dx = \int \frac{dt}{1-t^2} - \int \frac{dt}{1+t^2}, \quad t \in [0,1],$$

па је

$$I = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}} - \arctan \sqrt{\sin x} + C, \quad x \in [0, \pi/2).$$

1.49 Ако је $e^x = t$, $(x \in (-\infty, \ln 2)$ или $x \in (\ln 2, +\infty))$, онда је

$$\int \frac{5e^x}{e^{4x} - 3e^{2x} - 4} dx = \int \frac{5dt}{(t^2-4)(t^2+1)}, \quad t \in (2, +\infty) \text{ или } t \in (0,2).$$

Како је

$$\frac{5}{(t^2-4)(t^2+1)} = \frac{1}{t^2-4} - \frac{1}{t^2+1},$$

то је

$$\int \frac{5e^x}{e^{4x} - 3e^{2x} - 4} dx = \frac{1}{4} \ln \frac{e^x - 2}{e^x + 2} - \arctan e^x + C \text{ за } x > \ln 2,$$

односно

$$\int \frac{5e^x}{e^{4x} - 3e^{2x} - 4} dx = \frac{1}{4} \ln \frac{2 - e^x}{e^x + 2} - \arctan e^x + C \text{ за } x < \ln 2.$$

1.50 Ако је

$$I=\int\frac{\arctan x}{x^2}dx,\qquad \text{а}\quad J=\int\frac{\arctan x dx}{1+x^2}dx,$$

онда је дати интеграл једнак $I-J$. Парцијалном интеграцијом добијамо да је

$$I=-\frac{1}{x}\arctan x+\int\frac{dx}{x(1+x^2)}=-\frac{1}{x}\arctan x+\ln\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}+C_1,$$

а сменом $t=\arctan x$ добијамо да је $J=\arctan^2 x/2+C_2$. Према томе,

$$\int\frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx=-\frac{1}{x}\arctan x-\frac{1}{2}\arctan^2 x+\ln\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

1.51 Ако је

$$I=\int\arctan x dx,\qquad \text{а}\quad J=\int\frac{\arctan x dx}{1+x^2}dx,$$

онда је дати интеграл једнак $I-J$. Парцијалном интеграцијом добијамо да је

$$I=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1,$$

а сменом $t=\arctan x$ добијамо да је

$$J=\frac{1}{2}\arctan^2 x+C_2.$$

Према томе,

$$\int\frac{x^2\arctan x}{1+x^2}dx=x\arctan x+\frac{1}{2}\arctan^2 x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$$