

## **M2 - 1. ПРЕДАВАЊЕ**

Драган Ђорић

25.2.2009.

# **САДРЖАЈ ПРВОГ ДЕЛА**

- ФУНКЦИЈЕ ВИШЕ ПРОМЕНЉИВИХ
- ПАРЦИЈАЛНИ ИЗВОДИ И ТОТАЛНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛ
- ИМПЛИЦИТНА ФУНКЦИЈА
- ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРИЈЕ ПОЉА
- ТЕЈЛОРОВА ФОРМУЛА
- ЛОКАЛНИ ЕКСТРЕМУМИ
- УСЛОВНИ ЕКСТРЕМУМИ

## **ФУНКЦИЈЕ ВИШЕ ПРОМЕНЉИВИХ (ФВП)**

1. Скупови тачака у  $R^n$
2. ФВП - основни појмови
3. Ниво линије
4. Гранична вредност
5. Непрекидност

# 1 Скупови тачака у $R^n$

Из M1:

- векторски простор  $R^n$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  - вектор, тачка у  $R^n$  (користе се и ознаке  $x, a, \dots, P, Q, \dots$ ),  $x_1, \dots, x_n$  - координате тачке  $\mathbf{x}$
- скаларни производ  $(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$
- еуклидска норма  $|x| = \sqrt{(x, x)}$
- растојање између тачака  $x = (x_1, \dots, x_n)$  и  $y = (y_1, \dots, y_n)$

$$d(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

$\varepsilon$  околина тачке у  $R^n$

Нека је  $a$  произвољна тачка у  $R^n$  и нека је  $\varepsilon$  позитиван реалан број.

**Дефиниција 1** 1. Скуп  $U_\varepsilon(a)$  свих тачака  $x$  из  $R^n$  чије је растојање од тачке  $a$  мање од  $\varepsilon$  је  $\varepsilon$ -околина тачке  $a$ .

2. Скуп  $U_\varepsilon(a)$  без тачке  $a$  је пробушена  $\varepsilon$ -околина тачке  $a$  и означава се са  $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(a)$ .

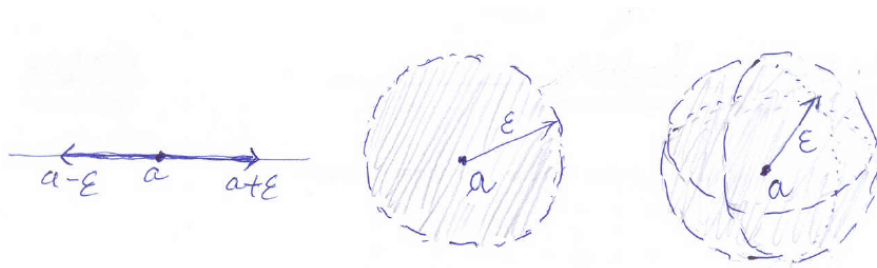
Дакле,

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in R^n : d(x, a) < \varepsilon\},$$

$$\overset{\circ}{U}_\varepsilon(a) = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\} = \{x \in R^n : 0 < d(x, a) < \varepsilon\}.$$

Специјално,

- за  $n = 1$  је  $U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  (интервал)
- за  $n = 2$  је  $U_\varepsilon(a)$  унутрашњост круга с центром у  $a$  и полупречником  $\varepsilon$
- за  $n = 3$  је  $U_\varepsilon(a)$  унутрашњост сфере с центром у  $a$  и полупречником  $\varepsilon$



## Отворен скуп

**Дефиниција 2** 1. Тачка  $a$  скупа  $A \subset R^n$  је унутрашња тачка скупа  $A$  ако постоји  $\varepsilon$ -околина тачке  $a$  која цела припада скупу  $A$ .

2. Скуп свих унутрашњих тачака скупа  $A$  је унутрашњост скупа  $A$  и означава се са  $\text{Int}A$ .

**Дефиниција 3** 1. Скуп  $A$  је отворен скуп ако је свака његова тачка унутрашња.

2. Празан скуп је отворен скуп.

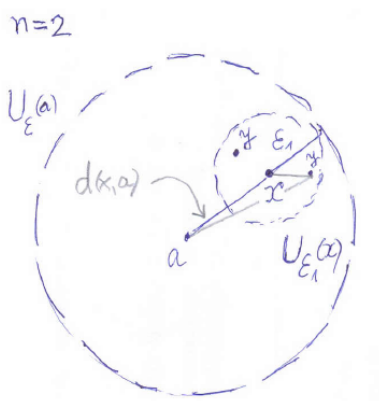
## ПРИМЕРИ

1. Свака  $\varepsilon$ -околина у  $R^n$  је отворен скуп. Ако  $x \in U_\varepsilon(a)$  и ако је  $\varepsilon_1 = \varepsilon - d(x, a)$ , тада за  $y \in U_{\varepsilon_1}(x)$  важи

$$d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) < \varepsilon_1 + d(x, a) = \varepsilon.$$

Према томе, тачка  $y$  припада скупу  $U_\varepsilon(a)$ , односно

$$U_{\varepsilon_1}(x) \subset U_\varepsilon(a).$$



2. Интервал је отворен скуп у  $R$ , унутрашњост круга је отворен скуп у  $R^2$ , унутрашњост сфере је отворен скуп у  $R^3$ .

**Теорема 1** 1. Пресек коначно много отворених скупова је отворен скуп.

2. Унија отворених скупова је отворен скуп.

## Околина тачке

**Дефиниција 4** Околина тачке  $a \in R^n$  је сваки отворен скуп  $U \subset R^n$  који садржи тачку  $a$ . Скуп  $U \setminus \{a\}$  је пробушена околина тачке  $a$ .

На пример

- $\varepsilon$ -околина тачке  $a$  је њена околина
- Отворен скуп је околина сваке своје тачке

**Дефиниција 5** 1. Тачка  $a \in R^n$  је гранична тачка скупа  $A$  ако свака  $\varepsilon$ -околина тачке  $a$  садржи и тачке скупа  $A$  и тачке које не припадају скупу  $A$ .

2. Скуп свих граничних тачака скупа  $A$  је граница скупа  $A$  и означава се са  $FrA$ .

На пример

- Граница скупова  $(0, 1)$ ,  $[0, 1)$ ,  $(0, 1]$  и  $[0, 1]$  је скуп  $\{0, 1\}$ .
- Граница  $\varepsilon$ -окоline тачке  $a$  у  $R^2$  је кружница с центром у  $a$  и полупречником  $\varepsilon$ .

### Затворен скуп

**Дефиниција 6** 1. Скуп у  $R^n$  који садржи све своје граничне тачке је затворен скуп

2. Празан скуп је затворен скуп.

Приметимо да је празан скуп и отворен и затворен.

**Дефиниција 7** 1. Скуп  $A \subset R^n$  је ограничен ако постоји позитиван реалан број  $r$  такав да за свако  $x \in A$  важи  $|x| < r$ .

2. Затворен и ограничен скуп у  $R^n$  је компактан скуп или компакт.

### Низ тачака у $R^n$

**Дефиниција 8** Низ  $(a_n)$  тачака у  $R^n$  конвергира ка тачки  $a \in R^n$  ако се у свакој околини тачке  $a$  налазе скоро сви чланови низа (сви осим коначно много првих чланова). Пише се

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

или

$$a_n \rightarrow a, \quad n \rightarrow \infty.$$

Дакле,

- низ  $(a_n)$  конвергира ка  $a$  ако за сваку околину  $U$  тачке  $a$  постоји  $n_0 \in N$  тако да  $a_n \in U$  за  $n > n_0$
- ако узмемо  $\varepsilon$ -окоline, услов конвергенције низа постаје

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(n > n_0 \Rightarrow d(a_n, a) < \varepsilon)$$



- низ  $(a_n)$  конвергира ка  $a$  ако и само ако  $d(a_n, a) \rightarrow 0$  када  $n \rightarrow \infty$ .

Може се доказати

1. да је гранична вредност низа јединствена
2. да низ конвергира ако и само ако коневргирају низови његових координата
3. да важи Кошијев критеријум за конвергенцију
4. да збир и производ конвергентних низова конвергирају

## 2 ФВП - основни појмови

Из М1:

- Функција  $f : X \rightarrow Y$ , домен, кодомен, правило пресликавања
- Сирјекција ('на') -  $(\forall y \in Y)(\exists x \in X) y = f(x)$
- Инјекција ('1-1') -  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
- Бијекција
- Реална функција -  $X, Y \subset R$ , област дефинисаности  $D_f$

Реална функција више променљивих

Постоје величине, појаве, процеси који зависе од више (коначно или бесконачно много) међусобно независних других величина, појава, процеса.

- Површине фигура, запремине тела
- Брзина тела које се креће
- Вредност евра (у динарима)
- Атмосферски притисак
- Крвни притисак и пулс одређене особе

**Дефиниција 9** Функција  $f : X \rightarrow Y$ , где је  $X \subset R^n$  и  $Y \subset R$  је реална функција више променљивих.

За  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$  и  $y \in R$  пише се  $f : \mathbf{x} \mapsto y$  или  $f(\mathbf{x}) = y$  или  $f(x_1, \dots, x_n) = y$ . Променљиве  $x_1, x_2, \dots, x_n$  су независне променљиве или аргументи.

На пример,

- $f(x_1, \dots, x_n) = c$  (константа, константна функција)

- $f(x_1, \dots, x_n) = x_1$
- $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 + x_2^2 + \dots + x_n^n$
- $f(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1 + \cos(x_2 e^{x_3}))$

Уместо  $\mathbf{x}$  може и само  $x$  ( $f(x) = y$ ) или  $P$  ( $f(P) = y$ ).

За  $n = 2$  уместо независних променљивих  $x_1$  и  $x_2$  често се узимају  $x$  и  $y$ , а вредност функције се означава за  $z$ . Дакле,  $f(x, y) = z$  или  $z = f(x, y)$ .

За  $n = 3$  уместо независних променљивих  $x_1, x_2$  и  $x_3$  често се узимају  $x, y$  и  $z$ , а вредност функције се означа, на пример са  $u$ . Дакле,  $u = f(x, y, z)$ .

### Област дефинисаности ФВП

Када је функција више променљивих описана аналитичким изразом треба се одредити за домен функције.

**Дефиниција 10** *Највећи могући домен ФВП  $f$  задате аналитичким изразом је област дефинисаности функције  $f$  и означава се са  $D_f$ .*

### ПРИМЕРИ

1.  $f : (x, y) \mapsto \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ ,  $D_f$  је круг (са кружницом) с центром у  $(0, 0)$  и полупречником 2.
2.  $f : (x, y) \rightarrow \arcsin(3 - x^2 - y^2)$ ,  $D_f$  је одређено условима  $-1 \leq 3 - x^2 - y^2 \leq 1$ ,  $D_f$  је кружни прстен кога чине кругови полупречника 2 и  $\sqrt{2}$ .

### График ФВП

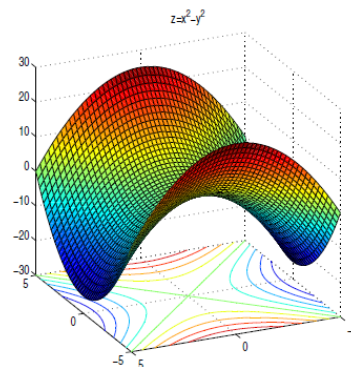
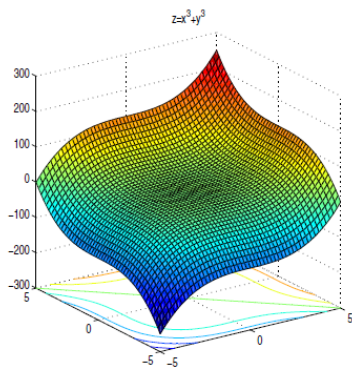
**Дефиниција 11** *График функције  $f : X \rightarrow R$ ,  $X \subset R^n$  је скуп  $\Gamma_f \subset R^{n+1}$  дефинисан са*

$$\Gamma_f = \{(x_1, \dots, x_n, y) : (x_1, \dots, x_n) \in D_f, y = f(x_1, \dots, x_n)\}.$$

У случају  $n = 2$  и  $z = f(x, y)$  имамо

$$\Gamma_f = \{(x, y, z) : (x, y) \in D_f, z = f(x, y)\},$$

што у неким случајевима представља површ у простору.

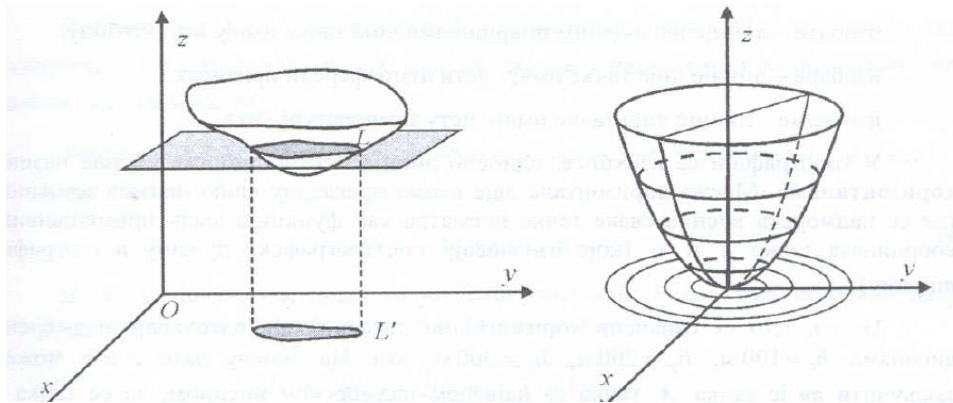


## Ниво линије

**Дефиниција 12** 1. Скуп  $\{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) = c\}$ , где је  $c$  фиксиран реалан број, је ниво линија функције  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

2. За  $n > 2$  скуп  $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = c\}$ , где је  $c$  фиксиран реалан број, је ниво површ функције  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

Скуп ниво линија (површи) за различите вредности константе  $c$  чини мрежу ниво линија (површи).



### ПРИМЕРИ

1.  $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ , ниво линије су одређене са  $x^2 + y^2 = c$ . За  $c < 0$  то је празан скуп, за  $c = 0$  то је тачка  $(0, 0)$ , а за  $c > 0$  то је кружница са центром у  $(0, 0)$  и полупречником  $\sqrt{c}$ .
2.  $f : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ , ниво површи су одређене са  $x^2 + y^2 + z^2 = c$ . За  $c < 0$  то је празан скуп, за  $c = 0$  то је тачка  $(0, 0, 0)$ , а за  $c > 0$  је сфера са центром у  $(0, 0, 0)$  и полупречником  $\sqrt{c}$ .

Термин ниво линије је преузет из картографије где се користе и појмови:

- изохипсе - скуп тачака које имају исту надморску висину,
- изобате - скуп тачака на воденим површинама у којима је иста дубина воде,
- изобаре - скуп тачака које имају исти атмосферски притисак,
- изотерме - скуп тачака које имају исту температуру.

Мрежа изохипси даје прегледну слику нагиба земљишта.

### 3 Гранична вредност

#### Тачке нагомилавања и изоловане тачке скупа

**Дефиниција 13** Тачка  $a$  је тачка нагомилавања скупа  $X \subset \mathbb{R}^n$  ако свака пробушена околина тачке  $a$  садржи тачку скупа  $X$ .

Из дефиниције следи

- Све унутрашње тачке скупа су тачке нагомилавања тог скупа.
- Тачка нагомилавања скупа  $X$  може да припада, а може и да не припада скупу  $X$  (гранична тачка која не припада скупу).
- Свака околина тачке нагомилавања скупа  $X$  садржи бесконачно много тачака скупа  $X$ .

**Дефиниција 14** Тачка  $a$  је изолована тачка скупа  $X$  ако постоји пробушена околина тачке  $a$  у којој нема елемената скупа  $X$ .

Свака тачка скупа је или тачка нагомилавања или изолована тачка тог скупа.

#### Гранична вредност функције

Претпоставимо да је функција  $f$  дефинисана у пробушеној околини тачке  $a \in \mathbb{R}^n$ .

**Дефиниција 15** Реалан број  $A$  је гранична вредност или лимес функције  $f$  у тачки  $a$  ако за сваку околину  $V$  броја  $A$  постоји пробушена околина  $\mathring{U}$  тачке  $a$  таква да је  $f(\mathring{U}) \subset V$ . Каже се још и да  $f$  конвергира (тежи) ка  $A$  када  $x$  тежи ка  $a$ , што се записује са

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

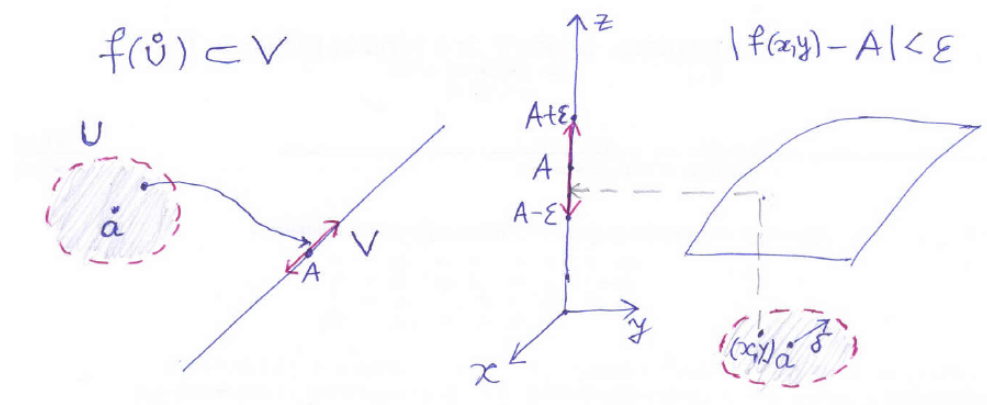
или

$$f(x) \rightarrow A, \quad x \rightarrow a.$$

Уколико је функција дефинисана и у тачки  $a$ , њена вредност у тој тачки не утиче на граничну вредност.

Из ове дефиниције и дефиниције околине следи да је уместо произвољних околина довољно узети  $\varepsilon$ -околине. Дакле,  $A$  је лимес функције  $f$  у тачки  $a$  ако за  $\varepsilon > 0$  постоји  $\delta(\varepsilon) > 0$  тако да важи

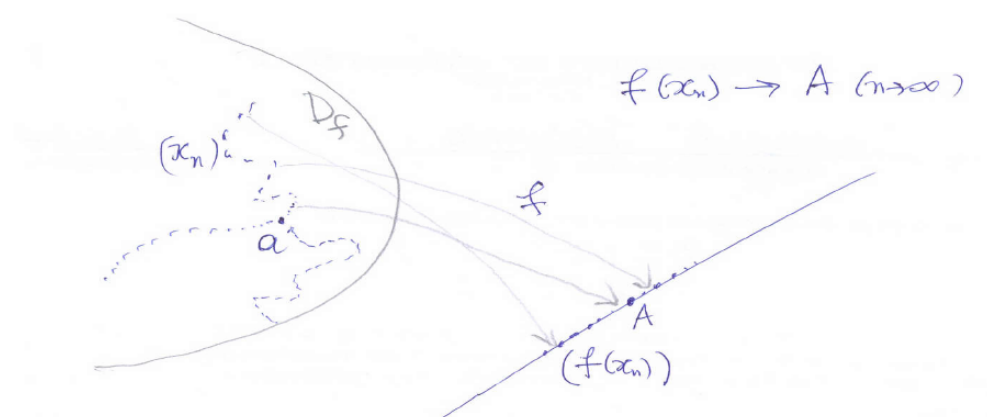
$$0 < d(x, a) < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$



### Потребан и довољан услов за постојање лimesа

Термин ' $x$  тежи  $a$ ' асоцира на то да се  $x$  тачки  $a$  приближава на произвољан начин, по било ком 'путу'.

**Теорема 2** Реалан број  $A$  је гранична вредност функције  $f$  у тачки  $a$  ако и само ако за сваки низ тачака  $(x_n)$  у  $D_f$  који тежи ка  $a$ , низ  $(f(x_n))$  тежи ка  $A$  када  $n \rightarrow \infty$ .

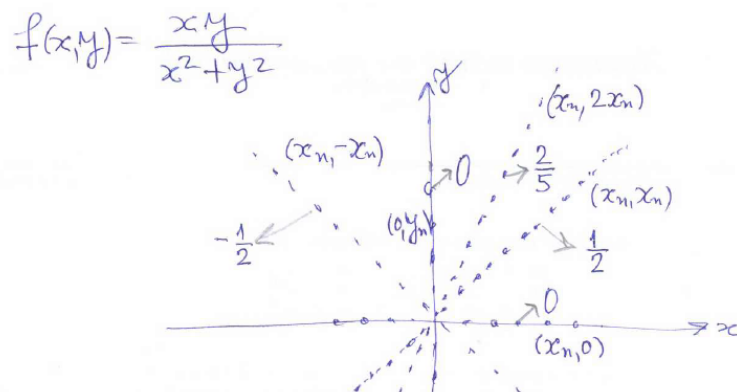


На пример, праве  $y = kx$  су ниво линије функције

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

са вредностима  $\frac{k}{1 + k^2}$ .

Према томе,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, kx) = \frac{k}{1 + k^2}$ , па гранична вредност функције  $f$  у тачки  $(0, 0)$  не постоји.



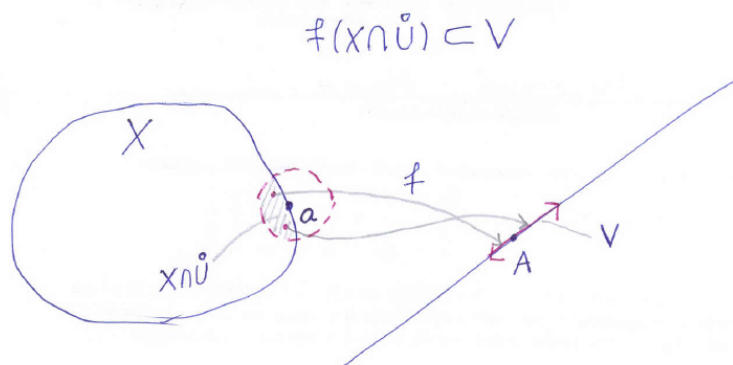
### Гранична вредност функције на скупу

Гранична вредност може да се дефинише и у тачкама нагомилавања које не припадају  $D_f$ , односно у граничним тачкама скупа  $D_f$ .

На пример, функција  $f : (x, y) \mapsto \frac{1}{y-x}$  није дефинисана у тачкама  $(x, x)$ , али те тачке припадају граници скупа  $D_f$ . За испитивање постојања лimesа функције  $f$  у тачки  $(0, 0)$  не можемо применити претходну дефиницију граничне вредности, јер не постоји пробушена околина тачке  $(0, 0)$  у којој је функција дефинисана.

**Дефиниција 16** Нека је  $a$  тачка нагомилавања скупа  $X \subset \mathbb{R}^n$  и нека је дата функција  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Реалан број  $A$  је гранична вредност функције  $f$  у тачки  $a$  на скупу  $X$  ако за сваку околинду  $V$  броја  $A$  постоји пробушена околина  $\mathring{U}$  тачке  $a$  таква да је  $f(X \cap \mathring{U}) \subset V$ . Каже се још и да  $f$  конвергира (тежи) на скупу  $X$  ка  $A$  када  $x$  тежи ка  $a$ , што се записује са

$$\lim_{x \rightarrow a, x \in X} f(x) = A.$$





## 4 Непрекидност

### 4.1 Дефиниција и основна својства

Нека је  $a$  гранична тачка скупа  $X \subset R^n$  и нека је дата функција  $f : X \rightarrow R$ .

**Дефиниција 17** *Функција  $f$  је непрекидна у тачки  $a$  ако постоји гранична вредност те функције када  $x \rightarrow a$  на скупу  $X$  и ако је*

$$\lim_{x \rightarrow a, x \in X} f(x) = f(a).$$

На основу дефиниције граничне вредности то значи да је  $f$  непрекидна у  $a \in X$  ако за сваку околину  $V(f(a))$  постоји околина  $U(a)$  тако да важи

$$x \in X \cap U(a) \Rightarrow f(x) \in V(f(a)).$$

Ако је  $a$  унутрашња тачка скупа  $X$ , претходни услов је

$$x \in U(a) \Rightarrow f(x) \in V(f(a)).$$

Специјално, ако је  $U$  једна  $\varepsilon$  околина, непрекидност функције  $f$  у тачки  $a$  значи да за свако  $\varepsilon > 0$  постоји  $\delta > 0$  тако да за  $x \in X$  важи

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

За  $n = 2$ ,  $x = (x_1, x_2)$  и  $a = (a_1, a_2)$  то је

$$\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} < \delta \Rightarrow |f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2)| < \varepsilon.$$

Функција  $f$  је непрекидна на скупу  $X$  ако је непрекидна у свакој тачки нагомилавања скупа  $X$ . На пример, константа (константна функција) је непрекидна на  $R^n$ .

Може се показати да је

1. збир, разлика, производ и количник (кад је дефинисан) непрекидних функција такође непрекидна функција
2. композиција непрекидних функција такође непрекидна функција.

### 4.2 Тачке, линије, површи прекида

Тачке скупа  $D_f \subset R^n$  у којима нису испуњени услови за непрекидност су тачке прекида функције  $f : X \rightarrow R$ .

На пример, функција

$$f : (x, y) \rightarrow \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

је дефинисана у  $R^2$ , али у тачки  $(0, 0)$  није непрекидна јер не постоји гранична вредност функције у тој тачки.

Тачке прекида могу да образују линије или површи у  $R^n$ . При разматрању прекида функције треба узети у обзир само тачке нагомилавања домена функције, обзиром да је у изолованим тачкама функција непрекидна.

### 4.3 Својства непрекидних функција на компактним скуповима

Непрекидне функције на компактним скуповима имају својства која су аналогна својствима непрекидне реалне функције једне реалне променљиве на одсечку.

**Теорема 3** *Ако је  $K$  компактан скуп у  $R^n$  и ако је  $f : K \rightarrow R$  непрекидна функција на  $K$ , тада важе следећа твђења.*

1. Функција  $f$  је ограничена на  $K$ .
2. Функција  $f$  достиже на  $K$  најмању и највећу вредност.

## M2 - 2. ПРЕДАВАЊЕ

Драган Ђорић

4.3.2009.

## ПАРЦИЈАЛНИ ИЗВОДИ И ТОТАЛНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛ ФУНКЦИЈА ВИШЕ ПРОМЕНЉИВИХ

1. Парцијални изводи првог реда ФВП
2. Диференцијабилност ФВП
3. Диференцијал ФВП
4. Парцијални изводи вишег реда ФВП
5. Диференцијали вишег реда ФВП

### 1 Парцијални изводи првог реда ФВП

#### Парцијални прираштај ФВП

Нека је  $X \subset R^n$  отворен скуп,  $f : X \rightarrow R$ ,  $x \in X$  и нека је  $\Delta x_i$  прираштај независне променљиве  $x_i$  такав да  $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \in X$ .

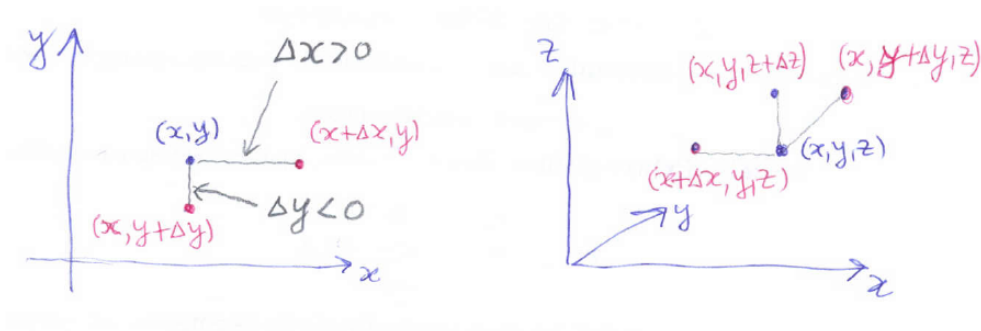
**Дефиниција 1** *Парцијални прираштај  $\Delta_i f(x)$  функције  $f$  у тачки  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , по променљивој  $x_i$  (генерисан прираштајем  $\Delta x_i$ ) за  $i \in \{1, \dots, n\}$ , је разлика вредности функције  $f$  која одговара прираштају  $\Delta x_i$ ,*

$$\Delta_i f(x) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

За  $n = 2$  и  $f : (x, y) \mapsto z$  парцијални изводи  $\Delta_1 f$  и  $\Delta_2 f$  означавају се и са  $\Delta_x f$  и  $\Delta_y f$ ,

$$\Delta_x f(x, y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y), \quad \Delta_y f(x, y) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$





Слично, за  $n = 3$  и  $f : (x, y, z) \mapsto u$  је

$$\Delta_x f(x, y, z) = f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z),$$

$$\Delta_y f(x, y, z) = f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z),$$

$$\Delta_z f(x, y, z) = f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z).$$

### Дефиниција парцијалног извода

**Дефиниција 2** Ако постоји  $\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta_i f(x)}{\Delta x_i}$ , онда ту вредност зовемо парцијалним изводом функције  $f$  по променљивој  $x_i$  у тачки  $x$  и означавамо са  $f'_{x_i}(x)$  или  $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$  или  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ .

За  $n = 2$  и  $f : (x, y) \rightarrow z$  имамо

$$f'_x(x, y) = z'_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x f(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

$$f'_y(x, y) = z'_y(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y f(x, y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Из дефиниције следи да је парцијални извод ФВП по променљивој  $x_i$  устvari извод функције једне променљиве ( $x_i$ ), при чему су остале независне променљиве фиксирane. То значи да за практично налажење парцијалних извода могу да се користе сва правила обичног извода (функције једне променљиве).

Постојање парцијалних извода у некој тачки не обезбеђује непрекидност функције у тој тачки (што је и очекивано јер се за парцијалне изводе не разматрају све тачке из околине). На пример, функција

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

има парцијалне изводе у  $(0, 0)$ ,

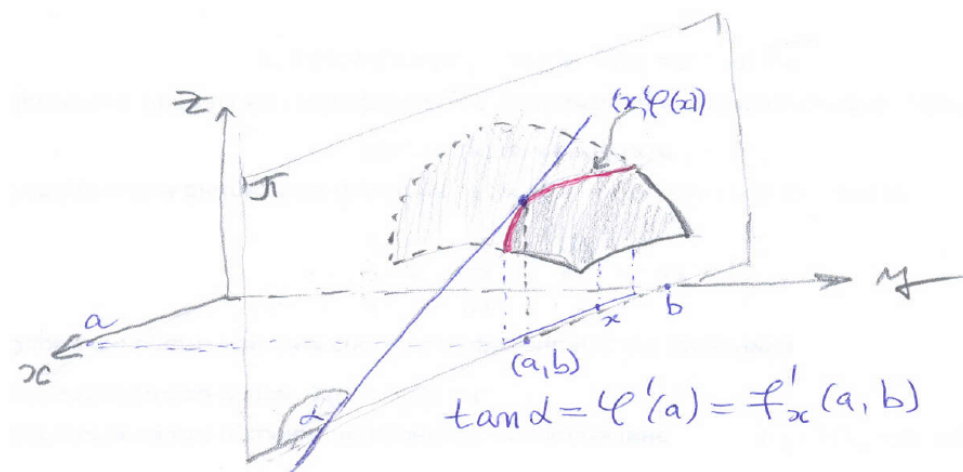
$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0,$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta y} = 0,$$

а није непрекидна у  $(0, 0)$ .

## Геометријска интерпретација

За  $n = 2$  и  $f : (x, y) \mapsto z$  постоји јасна геометријска интерпретација парцијалних извода  $f'_x$  и  $f'_y$  у тачки  $(a, b)$ . Ако је  $\varphi(x) = f(x, b)$ , тада се график функције  $\varphi$  (крива  $C$ ) добија у пресеку графика функције  $f$  (нека површ) и равни  $y = b$ .



Како је  $f'_x(a, b) = \varphi'(a)$ , то значи да  $f'_x(a, b)$  одређује положај тангенте криве  $C$  у тачки  $x = a$ , односно у тачки  $(a, b, f(a, b))$  површи (графика функције  $f$ ).

Слично важи и за  $f'_y(a, b)$ .

## 2 Диференцијабилност ФВП

### Дефиниција

Нека је  $X \subset \mathbb{R}^n$  отворен скуп,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \in X$  и нека је

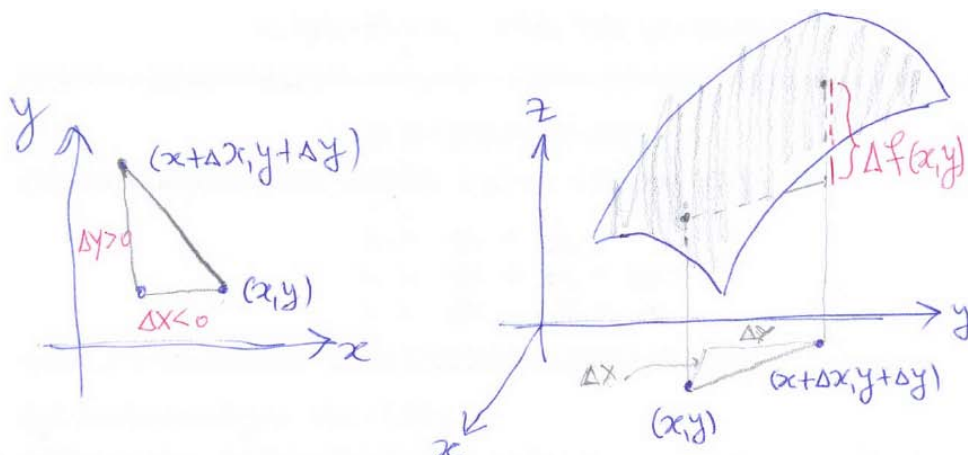
$$\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$$

вектор прираштаја независних променљивих такав да  $x + \Delta x \in X$ .

**Дефиниција 3** Тотални прираштај  $\Delta f(x)$  функције  $f$  у тачки  $x$ , генерисан прираштајем  $\Delta x$ , је разлика функције  $f$  у тачкама  $x + \Delta x$  и  $x$ .

Дакле,

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x).$$



#### Дефиниција 4 Функција $f$ је

1. диференцијабилна у тачки  $x$  ако је

$$\Delta f(x) = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \cdots + A_n \Delta x_n + o(|\Delta x|), \quad \Delta x \rightarrow 0,$$

где су  $A_1, \dots, A_n$  реалне константе.

2. диференцијабилна на  $X$  ако је диференцијабилна у свакој тачки скупа  $X$ .

За  $n = 2$  функција  $f : (x, y) \mapsto z$  је диференцијабилна у тачки  $(x, y)$  ако је

$$\Delta f(x, y) = A \Delta x + B \Delta y + o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right), \quad (\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$$

за  $A, B \in R$ . Ако је  $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \rho$ , услов диференцијабилности је

$$\Delta f(x, y) = A \Delta x + B \Delta y + o(\rho), \quad \rho \rightarrow 0.$$

#### Неопходни услови диференцијабилности

Нека је дата функција  $f : X \rightarrow R$ , где је  $X \subset R^n$  отворен скуп.

**Теорема 1** Ако је  $f$  диференцијабилна у тачки  $x \in X$ , тада  $f$  у тачки  $x$  има све парцијалне изводе првог реда.

Доказ. Из претпоставке диференцијабилности следи да је

$$\Delta f(x) = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \cdots + A_n \Delta x_n + o(|\Delta x|), \quad \Delta x \rightarrow 0.$$

За

$$\Delta x = (0 \dots 0 \Delta x_i 0 \dots 0), \quad \Delta x_i \neq 0,$$

где је  $i \in \{1, \dots, n\}$ , имамо да је  $|\Delta x| = |\Delta x_i|$ , а тотални прираштај  $\Delta f(x)$  се своди на парцијални прираштај  $\Delta_i f(x)$  по променљивој  $x_i$ .

Из једнакости

$$\Delta_i f(x) = A_i \Delta x_i + o(|\Delta x_i|)$$

добивамо

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta_i f(x)}{\Delta x_i} = A_i.$$

Према томе, постоји  $f'_{x_i}(x)$  и једнак је  $A_i$ . ■

Из теореме следи да за прираштај диференцијабилне функције у тачки  $x$  важи

$$\Delta f(x) = f'_{x_1}(x) \Delta x_1 + \cdots + f'_{x_n}(x) \Delta x_n + o(|\Delta x|), \quad \Delta x \rightarrow 0.$$

**Теорема 2** *Ако је функција  $f$  диференцијабилна у тачки  $a \in X$ , тада је она и непрекидна у тачки  $a$ .*

**Доказ.** Из претпоставке диференцијабилности и претходне теореме следи да је

$$\Delta f(a) = \sum_{k=1}^n f'_{x_k}(a) \Delta x_k + o(|\Delta x|), \quad \Delta x \rightarrow 0.$$

Како парцијални изводи постоје, то је

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(a) = 0,$$

односно за  $\Delta x = x - a$  је

$$f(x) = f(a) + \Delta f(a) \rightarrow f(a), \quad x \rightarrow a.$$

Према томе,  $f$  је непрекидна у тачки  $a$ . ■

Дакле, неопходни услови диференцијабилности функције  $f$  у тачки  $a$  су:

- постојање парцијалних извода у тачки  $a$
- непрекидност функције у тачки  $a$

Ниједан од ових услова, нити оба заједно, нису довољни за диференцијабилност функције  $f$  у тачки  $a$ .

Довољни услови диференцијабилности

Нека је  $X \subset \mathbb{R}^n$  отворен скуп и нека функција  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  има све парцијалне изводе првог реда у околини тачке  $a \in X$ .

**Теорема 3** *Ако су сви парцијални изводи првог реда функције  $f$  у тачки  $a$  непрекидни, тада је функција  $f$  диференцијабилна у тачки  $a$ .*

**Доказ.** Ради једноставности дат је доказ за  $n = 2$ , а аналогно се доказује и општи случај.

Ако је  $a = (x, y)$ , функција  $f$  има парцијалне изводе у свакој тачки  $(x + \Delta x, y + \Delta y)$  неке околине  $U_\delta(a)$ , при чему су у самој тачки  $a$  они непрекидни. Применом Лагранжове теореме (за функцију једне променљиве) на  $[x, x + \Delta x]$

(односно  $[x + \Delta x, x]$  ако је  $\Delta x < 0$ ) и на  $[y, y + \Delta y]$  (односно  $[y + \Delta y, y]$  ако је  $\Delta y < 0$ ) добијамо

$$\begin{aligned} \Delta f(x, y) &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ &= f'_x(c_1, y + \Delta y) \Delta x + f'_y(x, c_2) \Delta y \\ &= (f'_x(x, y) + \alpha) \Delta x + (f'_y(x, y) + \beta) \Delta y \\ &= f'_x(x, y) \Delta x + f'_y(x, y) \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y \end{aligned}$$

где је  $c_1 \in (x, x + \Delta x)$ ,  $c_2 \in (y, y + \Delta y)$  и где су  $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y)$  и  $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y)$  бесконачно мале величине за  $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ .

Како за  $\rho = |(\Delta x, \Delta y)| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$  важи

$$\frac{|\alpha\Delta x + \beta\Delta y|}{\rho} \leq |\alpha| \frac{|\Delta x|}{\rho} + |\beta| \frac{|\Delta y|}{\rho} \leq |\alpha| + |\beta| \rightarrow 0$$

при  $\rho \rightarrow 0$ , то је

$$\alpha\Delta x + \beta\Delta y = o(\rho), \quad \rho \rightarrow 0,$$

па је  $f$  диференцијабилна у тачки  $a = (x, y)$ .

Скуп свих функција  $f : X \rightarrow R$  које у свакој тачки  $a \in X$  имају непрекидне све парцијалне изводе првог реда означава се са  $C^1(X)$ . Из теореме следи да су функције из скупа  $C^1(X)$  диференцијабилне.

### 3 Диференцијал ФВП

#### Дефиниција

Нека је  $X \subset R^n$  отворен скуп и нека је функција  $f : X \rightarrow R$  диференцијабилна у тачки  $x \in X$ .

**Дефиниција 5** *Линеарни део (у односу на  $\Delta x$ ) тоталног прираштаја функције  $f$  у тачки  $x$  је тотални диференцијал или само диференцијал функције  $f$  у тачки  $x$  и означава се са  $df(x)$ .*

Како је

$$\Delta f(x) = f'_{x_1}(x)\Delta x_1 + \cdots + f'_{x_n}(x)\Delta x_n + o(|\Delta x|),$$

то је

$$df(x) = f'_{x_1}(x)\Delta x_1 + \cdots + f'_{x_n}(x)\Delta x_n,$$

што значи да је диференцијал једнозначно одређен. За  $f(x) = x_i$  добијамо да је  $df(x) = dx_i = \Delta x_i$ , па диференцијал може да се запише и у облику

$$df(x) = f'_{x_1}(x)dx_1 + \cdots + f'_{x_n}(x)dx_n,$$

при чему је  $f'_{x_i}dx_i$  парцијални диференцијал функције  $f$  у тачки  $x$  који представља линеарни део парцијалног прираштаја  $\Delta_i f(x)$  функције  $f$  у тачки  $x$ .

За  $n = 2$  и функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  имамо да је

$$df(x, y) = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy,$$

а за  $n = 3$  и функцију  $f : (x, y, z) \mapsto u$  је

$$df(x, y, z) = f'_x(x, y, z)dx + f'_y(x, y, z)dy + f'_z(x, y, z)dz.$$

#### Својства диференцијала

За диференцијал ФВП важе иста правила као за диференцијал функција једне променљиве.

На пример, за  $f, g \in C^1(X)$  и  $c \in R$  важи

$$d(cf) = c \cdot df, \quad d(f \pm g) = df \pm dg, \quad d(fg) = f dg + g df, \quad d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g df - f dg}{g^2} \quad (g \neq 0).$$

## 4 Парцијални изводи вишег реда ФВП

### Парцијални изводи другог реда

Нека функција  $f : X \rightarrow R$ ,  $X \subset R^n$  има у околини  $U$  тачке  $a$  парцијални извод  $f'_{x_i}(x)$ . Тада је он такође функција  $n$  променљивих,  $f'_{x_i} : U \rightarrow R$ .

**Дефиниција 6** Ако постоји парцијални извод функције  $f'_{x_i}$  по  $x_j$  у тачки  $a$ , зовемо га парцијалним изводом другог реда функције  $f$  у тачки  $a$  и означавамо са  $f''_{x_i x_j}(a)$  или  $\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_i}$ .

Дакле,

$$f''_{x_i x_j}(a) = (f'_{x_i})'_{x_j}(a).$$

Функција  $f$  има укупно  $n^2$  парцијалних извода другог реда. За  $i \neq j$  су мешовити парцијални изводи, а за  $i = j$  користи се ознака  $f''_{x_i^2}(a)$  или  $\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i^2}$ .

За  $n = 2$  и  $f : (x, y) \mapsto z$  имамо  $f''_{xx}$ ,  $f''_{xy}$ ,  $f''_{yx}$  и  $f''_{yy}$ .

За  $n = 3$  и  $f : (x, y, z) \mapsto u$  имамо  $f''_{xx}$ ,  $f''_{xy}$ ,  $f''_{xz}$ ,  $f''_{yx}$ ,  $f''_{yy}$ ,  $f''_{yz}$ ,  $f''_{zx}$ ,  $f''_{zy}$  и  $f''_{zz}$ .

### Парцијални изводи $k$ -тог реда

Парцијални изводи  $k$ -тог реда ( $k > 2$ ) се дефинишу као парцијални изводи  $k - 1$ -вог реда.

На пример за  $f : (x, y) \mapsto z$  за сваки од парцијалних извода  $f''_{xx}$ ,  $f''_{xy}$ ,  $f''_{yx}$  и  $f''_{yy}$  можемо одредити парцијални извод по  $x$  и парцијални извод по  $y$ . Тако добијамо 8 ( $= 2^3$ ) парцијалних извода трећег реда

$$f'''_{x^3}, f'''_{x^2 y}, f'''_{x y x}, f'''_{x y^2}, f'''_{y x^2}, f'''_{y x y}, f'''_{y^2 x}, f'''_{y^3},$$

16 ( $= 2^4$ ) парцијалних извода четвртог реда, ...,  $2^k$  парцијалних извода  $k$ -тог реда.

### Једнакост мешовитих парцијалних извода

**Теорема 4** Нека је  $X \subset R^2$  отворен скуп и нека функција  $f : X \rightarrow R$  има у околини  $U$  тачке  $(a, b) \in R^2$  парцијалне изводе  $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ . Ако су функције  $f''_{xy}$  и  $f''_{yx}$  непрекидне у тачки  $(a, b)$ , тада је

$$f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b).$$

**Доказ.** Изаберимо  $\delta > 0$  тако да за  $|\Delta x| < \delta$  и  $|\Delta y| < \delta$  тачка  $(a + \Delta x, b + \Delta y)$  припада околини  $U$ . Тада је на  $(-\delta, \delta) \times (-\delta, \delta)$  дефинисана функција

$$g(\Delta x, \Delta y) = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a + \Delta x, b) - f(a, b + \Delta y) + f(a, b).$$

Ако је

$$\varphi(x) = f(x, b + \Delta y) - f(x, b),$$



тада применом Лагранжове теореме добијамо

$$\begin{aligned}
 g(\Delta x, \Delta y) &= \varphi(a + \Delta x) - \varphi(a) \\
 &= \varphi'(c_1)\Delta x \\
 &= (f'_x(c_1, b + \Delta y) - f'_x(c_1, b))\Delta x \\
 &= f''_{xy}(c_1, c_2)\Delta y\Delta x,
 \end{aligned}$$

где је  $a < c_1 < a + \Delta x$  и  $b < c_2 < b + \Delta y$ .

Слично за

$$\psi(y) = f(a + \Delta x, y) - f(a, y)$$

имамо

$$\begin{aligned}
 g(\Delta x, \Delta y) &= \psi(b + \Delta y) - \psi(b) \\
 &= \psi'(c_3)\Delta y \\
 &= (f'_y(a + \Delta x, c_3) - f'_y(a, c_3))\Delta y \\
 &= f''_{yx}(c_4, c_3)\Delta x\Delta y,
 \end{aligned}$$

где је  $b < c_3 < b + \Delta y$  и  $a < c_4 < a + \Delta x$ .

Према томе,

$$f''_{xy}(c_1, c_2) = f''_{yx}(c_4, c_3).$$

Како  $c_1, c_4 \rightarrow a$  када  $\Delta x \rightarrow 0$  и  $c_2, c_3 \rightarrow b$  када  $\Delta y \rightarrow 0$ , из непрекидности функција  $f''_{xy}$  и  $f''_{yx}$  у тачки  $(a, b)$  следи једнакост

$$f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b),$$

што је и требало доказати. ■

Применом ове теореме добијамо

- Ако функција  $f : X \rightarrow R$ ,  $X \subset R^n$  има непрекидне парцијалне изводе  $f''_{x_i x_j}$  и  $f''_{x_j x_i}$  у тачки  $a = (a_1, \dots, a_n)$ , тада је

$$f''_{x_i x_j}(a) = f''_{x_j x_i}(a).$$

- Ако су непрекидни мешовити парцијални изводи вишег реда онда важе аналогне једнакости. На пример, за  $n = 2$

$$f'''_{x^2 y} = f'''_{xyx} = f'''_{yx^2}.$$

У том случају уместо  $2^k$  имамо  $k + 1$  различитих парцијалних извода реда  $k$ .

Услов непрекидности мешовитих парцијалних извода је неопходан. На пример, за

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

је  $f''_{xy}(0, 0) = -1$  и  $f''_{yx}(0, 0) = 1$ .

## 5 Диференцијали вишег реда ФВП

### Диференцијал другог реда

Нека је функција  $f : X \rightarrow R$ ,  $X \subset R^n$  диференцијабилна у околини тачке  $x$ . Ако је  $df$  диференцијабилна функција у тачки  $x$ , тада се  $d^2f(x)$  дефиниса са

$$d^2f(x) = d(df(x))$$

зове диференцијал другог реда функције  $f$  у тачки  $x$ . У том смислу би  $df(x)$  био диференцијал првог реда.

Из

$$df(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i$$

следи

$$d^2f(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial df(x)}{\partial x_j} dx_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i} dx_i dx_j.$$

За егзистенцију  $d^2f(x)$  неопходно је постојање парцијалних извода другог реда, а довољно је да ти изводи буду непрекидни у тачки  $x$ .

На пример, за  $n = 2$

$$\begin{aligned} d^2f &= d(f'_x dx + f'_y dy) \\ &= (f'_x dx + f'_y dy)'_x dx + (f'_x dx + f'_y dy)'_y dy \\ &= f''_{xx} dx^2 + 2f''_{xy} dx dy + f''_{yy} dy^2. \end{aligned}$$

Може и

- $d^2f(x, y) = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 f(x, y)$ , где је
$$\left( \frac{\partial}{\partial x} dx \right)^2 = f''_{xx} dx^2, \quad \left( \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 = f''_{yy} dy^2$$
- $d^2f = (dx \ dy) \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$



Слично за  $n = 3$  добија се

$$\begin{aligned}d^2 f &= \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right)^2 f \\&= f''_{xx} dx^2 + f''_{yy} dy^2 + f''_{zz} dz^2 + 2f''_{xy} dx dy + 2f''_{xz} dx dz + 2f''_{yz} dy dz \\&= (dx \ dy \ dz) \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Диференцијал  $k$ -тог реда

$$d^k f(x) = d(d^{k-1} f(x)).$$

Важи

$$d^k f(x) = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^k f(x),$$

где је

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_i} dx_i \right)^m = \frac{\partial^m}{\partial x_i^m} dx_i^m, \quad dx_i^m = (dx_i)^m.$$

За  $n = 2$  и  $k = 3$  добија се

$$\begin{aligned}d^3 f(x, y) &= \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 f(x, y) \\&= f'''_{x^3} dx^3 + 3f'''_{x^2 y} dx^2 dy + 3f'''_{xy^2} dx dy^2 + f'''_{y^3} dy^3\end{aligned}$$

## М2 - 3. ПРЕДАВАЊЕ

Драган Ђорић

11.3.2009.

## ИМПЛИЦИТНЕ ФУНКЦИЈЕ

1. Парцијални изводи и диференцијал сложених функција
2. Егзистенција и диференцијабилност имплицитне функције
3. Тангентна раван и нормала површи

# 1 Парцијални изводи и диференцијал сложених функција

Парцијални изводи функције  $g : (x, y) \mapsto f(u(x, y))$

Ако је  $g(x, y) = f(u(x, y))$ , тада  $g'_x$  добијамо по правилу извода сложене функције једне променљиве ( $x$ ), док је друга фиксирана ( $y$ ). Слично за  $g'_y$ . Дакле,

$$g'_x = f'_u u'_x, \quad g'_y = f'_u u'_y.$$

За диференцијал  $dg$  важи

$$dg = g'_x dx + g'_y dy = f'_u u'_x dx + f'_u u'_y dy = f'_u (u'_x dx + u'_y dy) = f'_u du.$$

На пример, за  $g(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$  и  $u(x, y) = \frac{y}{x}$  имамо  $g(x, y) = f(u) = \arctan u$ , па је

$$\begin{aligned} dg &= f' du \\ &= \frac{1}{1+u^2} \cdot du \\ &= \frac{1}{1+y^2/x^2} \cdot d\left(\frac{y}{x}\right) \\ &= \frac{1}{1+y^2/x^2} \cdot \frac{xdy - ydx}{x^2} \\ &= -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy. \end{aligned}$$

Из последње једнакости следи да је

$$g'_x = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad g'_y = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Извод функције  $g : x \mapsto f(u(x), v(x))$

Неке функције једне променљиве можемо посматрати као функције двеју (или више) променљивих, при чему аргументи зависе од једне (исте) променљиве. На пример, за функцију  $g : x \mapsto x^{\sin x}$  можемо узети

$$g(x) = f(u, v) = u^v, \quad u = x, \quad v = \sin x.$$

Користећи парцијалне изводе функције  $f$  можемо једноставније одредити извод функције  $g$ .

**Теорема 1** *Ако су функције  $u : [a, b] \rightarrow R$  и  $v : [a, b] \rightarrow R$  диференцијабилне у  $x$ , а функција  $f : X \rightarrow R$ ,  $X \subset R^2$  диференцијабилна у тачки  $(u(x), v(x))$ , тада је функција  $g : x \mapsto f(u(x), v(x))$  диференцијабилна у тачки  $x$  и важи*

$$g'(x) = f'_u(u(x), v(x))u'(x) + f'_v(u(x), v(x))v'(x).$$

Доказ.

- Прираштај  $\Delta x$  одређује прираштаје  $\Delta u$  и  $\Delta v$ .
- Из претпоставке диференцијабилности за  $f$  имамо

$$\Delta g = \Delta f = f'_u(u, v)\Delta u + f'_v(u, v)\Delta v + o\left(\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}\right), \quad \Delta x \rightarrow 0.$$

- Из претходног следи

$$\frac{\Delta g}{\Delta x} = f'_u \frac{\Delta u}{\Delta x} + f'_v \frac{\Delta v}{\Delta x} + o\left(\sqrt{\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)^2}\right), \quad \Delta x \rightarrow 0.$$

- Из претпоставке диференцијабилности за  $u$  и  $v$ , када  $\Delta x \rightarrow 0$  добијамо

$$g' = f'_u u' + f'_v v'. \quad \blacksquare$$

На исти начин се доказује да за функцију  $g$  дефинисану са

$$g(x) = f(u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x))$$

важи

$$g' = f'_{u_1} u'_1 + f'_{u_2} u'_2 + \dots + f'_{u_n} u'_n.$$

Парцијални изводи функције  $g : (x, y) \mapsto f(u(x, y), v(x, y))$

Претпоставимо сада да је  $g(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ . Фиксирањем променљиве  $y$  имамо парцијални извод функције  $g$  по  $x$  као извод функције једне променљиве (претходни случај). Слично и за парцијални извод по  $y$ . Дакле,

$$g'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x, \quad g'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y.$$

На пример, за  $g(x, y) = e^{xy} \sin(x + y)$ ,  $u(x, y) = xy$  и  $v(x, y) = x + y$  имамо  $g(x, y) = f(u, v) = e^u \sin v$ , па је

$$\begin{aligned} g'_x &= f'_u u'_x + f'_v v'_x \\ &= e^u \sin v \cdot y + e^u \cos v \\ &= e^{xy} (y \sin(x + y) + \cos(x + y)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'_y &= f'_u u'_y + f'_v v'_y \\ &= e^u \sin v \cdot x + e^u \cos v \\ &= e^{xy} (x \sin(x + y) + \cos(x + y)). \end{aligned}$$

На исти начин закључујемо да за функцију  $g$  дефинисану са

$$g(x, y, z) = f(u(x, y, z), v(x, y, z), \dots, w(x, y, z))$$

важи

$$g'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x + \cdots + f'_w w'_x.$$

$$g'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y + \cdots + f'_w w'_y.$$

$$g'_z = f'_u u'_z + f'_v v'_z + \cdots + f'_w w'_z.$$

Диференцијал функције  $g : (x, y) \mapsto f(u(x, y), v(x, y))$

Ако у  $dg = g'_x dx + g'_y dy$  заменимо изразе за  $g'_x$  и  $g'_y$  добијамо

$$\begin{aligned} dg &= (f'_u u'_x + f'_v v'_x) dx + (f'_u u'_y + f'_v v'_y) dy \\ &= f'_u (u'_x dx + u'_y dy) + f'_v (v'_x dx + v'_y dy) \\ &= f'_u du + f'_v dv \end{aligned}$$

Према томе, диференцијал је инваријантан на то да ли су аргументи функције независни или су функције других променљивих.

## 2 Егзистенција и диференцијабилност имплицитне функције

Имплицитна функција

Једначина  $F(x, y) = 0$  са две непознате  $x$  и  $y$  може у скупу реалних бројева да има једно или више решења, а може и да нема решења. На пример, једначина  $x^2 + y^2 = 0$  има само једно решење  $(0, 0)$ , једначина  $x^2 + y^2 + 1 = 0$  нема решења, а једначина  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  има бесконачно много решења.

Једначина  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  дефинише бар две функције (на пример,  $y$  у зависности од  $x$ ) на  $[-1, 1]$ . На пример,

$$f : x \mapsto \sqrt{1 - x^2}, \quad g : x \mapsto -\sqrt{1 - x^2}.$$

Да ли једначина  $e^y + y - x + \ln x = 0$  дефинише неку функцију ( $y$  у зависности од  $x$  или обрнуто)?

Услови егзистенције имплицитне функције једне променљиве

**Теорема 2** Нека је  $X \subset \mathbb{R}^2$  отворен скуп и нека функција  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  има следећа својства:

1.  $F$  је непрекидна функција на  $X$ ,
2. постоји  $(x_0, y_0) \in X$  за коју је  $F(x_0, y_0) = 0$ ,
3.  $F'_y$  је непрекидна функција на  $X$ ,
4.  $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ .

Тада постоји околина  $U \times V$  тачке  $(x_0, y_0)$  и једнозначно одређена непрекидна функција  $f : U \rightarrow V$  таква да је  $f(x_0) = y_0$  и  $F(x, f(x)) = 0$  за  $x \in U$ .

**Доказ.** Претпоставимо да је  $F'_y(x_0, y_0) > 0$ . Због непрекидности функције  $F'_y$  постоји околина тачке  $(x_0, y_0)$  која је у  $X$  и у којој је  $F'_y(x, y) > 0$ . Ако је  $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \times [y_0 - b, y_0 + b]$  правоугаоник у тој околини, тада је  $F(x_0, y_0 - b) < 0$  и  $F(x_0, y_0 + b) > 0$  (јер је  $F(x_0, y_0) = 0$  и  $F'_y(x_0, y) > 0$  за  $y \in [y_0 - b, y_0 + b]$ ).

Због непрекидности функције  $F$  аналогне неједнакости важе и у некој околини тачке  $x_0$ , а то значи и у неком одсечку  $[x_0 - a, x_0 + a]$ . Дакле,

$$F(x, y_0 - b) < 0 < F(x, y_0 + b), \quad x \in [x_0 - a, x_0 + a].$$

За фиксирано  $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$  функција  $F(x, y)$  дефинише функцију по  $y$  на  $[y_0 - b, y_0 + b]$  која на крајевима има вредности различитог знака. Према томе постоји вредност  $y \in (y_0 - b, y_0 + b)$  за коју је  $F(x, y) = 0$  (Коши-Болцанова теорема за функције једне променљиве). Та вредност  $y$  дефинише функцију  $f : U \rightarrow V$ , где је

$$U = (x_0 - a, x_0 + a), \quad V = (y_0 - b, y_0 + b), \quad f(x) = y, \quad f(x_0) = y_0.$$

Докажимо још да је функција  $f$  непрекидна на  $U$ . Довољно је доказати непрекидност у тачки  $x_0$  јер су исти услови и у другим тачкама скупа  $U$ . По конструкцији функције  $f$  је

$$|f(x) - f(x_0)| = |y - y_0|,$$

што значи да је  $f$  непрекида у  $x_0$ . ■

Наравно, променљиве  $x$  и  $y$  могу да замене улоге.

Диференцијабилност имплицитне функције једне променљиве

**Теорема 3** *Нека важе услови претходне теореме и нека је још функција  $F'_x$  непрекидна на  $X$ . Тада је функција  $f$  из претходне теореме непрекидно диференцијабилна на  $U$  и важи*

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}.$$

**Доказ.** За  $x \in U$  постоје  $c_1 \in (x, x + \Delta x)$  и  $c_2 \in (y, y + \Delta y)$  (Лагранжова теорема) такви да је

$$\begin{aligned} \Delta F(x, y) &= F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y) + F(x, y + \Delta y) - F(x, y) \\ &= F'_x(c_1, y + \Delta y)\Delta x + F'_y(x, c_2)\Delta y \end{aligned}$$

Како је  $\Delta F(x, y) = 0$  (због конструкције функције  $f$ ), то је

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(c_1, y + \Delta y)}{F'_y(x, c_2)}.$$

Из претпоставке о непрекидности функција  $F'_x$  и  $F'_y$  следи да је

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}. \quad \blacksquare$$

### Имплицитна функција више променљивих

За функцију више променљивих која је дефинисана имплицитно важи аналогно тврђење. Ради једноставности, овде се даје формулација одговарајуће теорем за функцију две променљиве.

**Теорема 4** Нека је  $X \subset \mathbb{R}^3$  отворен скуп и нека функција  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  има следећа својства:

1.  $F$  је непрекидна функција на  $X$ ,
2. постоји  $(x_0, y_0, z_0) \in X$  за коју је  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ ,
3.  $F'_z$  је непрекидна функција на  $X$ ,
4.  $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ .

Тада постоји околина  $U \times V$  тачке  $(x_0, y_0, z_0)$  и једнозначно одређена непрекидна функција  $f : U \rightarrow V$  таква да је  $f(x_0, y_0) = z_0$  и  $F(x, y, f(x, y)) = 0$  за  $x \in U$ .

Уз додатни услов,  $F \in C^1(X)$ , за функцију  $f$  важи  $f \in C^1(U)$  и

$$f'_x(x, y) = -\frac{F'_x(x, y, f(x, y))}{F'_z(x, y, f(x, y))}, \quad f'_y(x, y) = -\frac{F'_y(x, y, f(x, y))}{F'_z(x, y, f(x, y))}.$$

Дакле, ако је функција  $f : (x, y) \rightarrow z$  дефинисана имплицитно са  $F(x, y, z) = 0$ , тада је (у скраћеном запису)

$$f'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad f'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Даљим диференцирањем по  $x$ , односно  $y$ , добијамо

$$\begin{aligned} f''_{x^2} &= \frac{-F''_{x^2}F'^2_z + 2F''_{xz}F'_xF'_z - F''_{z^2}F'^2_x}{F'^2_z}, \\ f''_{y^2} &= \frac{-F''_{y^2}F'^2_z + 2F''_{yz}F'_yF'_z - F''_{z^2}F'^2_y}{F'^2_z}, \\ f''_{xy} &= \frac{-F''_{xy}F'^2_z + F''_{xz}F'_yF'_z + F''_{yz}F'_xF'_z - F''_{z^2}F'_xF'_y}{F'^2_z}. \end{aligned}$$

Систем који дефинише више имплицитних функција

Под одређеним условима систем

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0$$

одређује две имплицитно дефинисане функције  $f : x \mapsto y$  и  $g : x \mapsto z$  у околини неке тачке.

Из овог система се добија систем за  $f'$  и  $g'$

$$F'_x + F'_y y' + F'_z z' = 0,$$

$$G'_x + G'_y y' + G'_z z' = 0.$$



### 3 Тангентна раван и нормала површи

Нека је  $S$  површ у простору и нека је  $M(x_0, y_0, z_0)$  тачка те површи.

#### Тангентна раван

**Дефиниција 1** Ако постоји раван  $\pi$ , којој припадају тангенте свих линија које садрже тачку  $M$  и које су на површи  $S$ , онда је  $\pi$  тангентна раван површи  $S$  у тачки  $M$ .

Претпоставимо да је површ  $S$  график функције  $f : (x, y) \mapsto z$  дате имплицитно са  $F(x, y, z) = 0$ .

**Теорема 5** Ако је

1. функција  $F$  диференцијабилна у тачки  $M$ ,
2.  $(F'_x(M), F'_y(M), F'_z(M)) \neq (0, 0, 0)$ ,

тада тангентна раван  $\pi$  површи  $S$  у тачки  $M$  постоји и њена једначина је

$$F'_x(M)(x - x_0) + F'_y(M)(y - y_0) + F'_z(M)(z - z_0) = 0.$$

Доказ.

- Линија  $C$  на површи  $S$  може да се опише параметарски са

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in [a, b],$$

при чему су координате тачке  $M$  одређене са  $t_0$ .

- Вектор  $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$  је вектор тангенте криве  $C$  у тачки  $M$ .
- За тачке  $(x(t), y(t), z(t))$  криве  $C$  важи

$$F(x(t), y(t), z(t)) = 0.$$

- Диференцирањем по  $t$  добијамо да је у тачки  $M$

$$F'_x(M)x'(t_0) + F'_y(M)y'(t_0) + F'_z(M)z'(t_0) = 0.$$

- Из претходне једнакости следи да је вектор тангенте криве  $C$  нормалан на вектор  $(F'_x(M), F'_y(M), F'_z(M))$ .
- Како то важи за сваку криву на површи  $S$ , раван  $\pi$  постоји, а претходни вектор можемо узети за вектор нормале те равни. ■

Ако је површ график експлицитно дате функције  $f : (x, y) \mapsto z$ , тада је

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z.$$

Како је

$$F'_x(M) = f'_x(x_0, y_0), \quad F'_y(M) = f'_y(x_0, y_0), \quad F'_z(M) = -1,$$

једначина тангентне равни је

$$z = z_0 + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

## Геометријска интерпретација диференцијала

Ако је функција  $f : (x, y) \mapsto z$  диференцијабилна у тачки  $(a, b)$ , тада је

$$dz = f'_x(a, b)dx + f'_y(a, b)dy.$$

Површ која је график функције  $f$  има у тачки  $(a, b, f(a, b))$  тангентну равани која је једначина

$$z - c = f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b),$$

односно

$$\Delta z = f'_x(a, b)\Delta x + f'_y(a, b)\Delta y$$

за  $\Delta x = x - a$ ,  $\Delta y = y - b$  и  $\Delta z = z - c$ .

Према томе, за  $\Delta x = dx$  и  $\Delta y = dy$  биће и  $\Delta z = dz$ , што значи да је прираштај тангентне равни у тачки  $M$  једнак диференцијалу у тачки  $M$ .

### Нормала површи

**Дефиниција 2** *Правна  $l$  која садржи тачку  $M$  површи  $S$  и која је нормална на тангентну равани  $\pi$  те површи у тачки  $M$  је нормала површи  $S$  у тачки  $M$ .*

При условима претходне теореме нормала површи  $S$  у тачки  $M$  постоји и њена једначина је

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M)},$$

односно

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

за експлицитно дату функцију  $f$ .

## **M2** - 4. ПРЕДАВАЊЕ

Драган Ђорић

18.3.2009.

## ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРИЈЕ ПОЉА

1. Градијент и извод у смеру датог вектора
2. Векторске функције скаларног аргумента
3. Скаларно поље



# 1 Градијент и извод у смеру датог вектора

Појмови *градијент* и *извод у смеру датог вектора* се користе у теорији поља. Овде су ови појмови дати у општијем случају, односно за функције више променљивих.

## Градијент

Нека функција  $f : X \rightarrow R$ ,  $X \subset R^n$  има парцијалне изводе у тачки  $x \in X$ .

**Дефиниција 1** Вектор парцијалних извода функције  $f$  у тачки  $x$  је градијент функције  $f$  у тачки  $x$  и означава се са  $\text{grad } f(x)$  или  $\nabla f(x)$ .

Дакле,

$$\text{grad } f(x) = (f'_{x_1}(x), f'_{x_2}(x), \dots, f'_{x_n}(x)).$$

За  $n = 2$  и  $f : (x, y) \rightarrow z$  је

$$\text{grad } f(x, y) = (f'_x(x, y), f'_y(x, y)).$$

На пример, за  $f(x, y) = e^{xy}$  имамо  $f'_x(x, y) = ye^{xy}$  и  $f'_y(x, y) = xe^{xy}$ , па је  $\text{grad } f(1, 2) = (2e^2, e^2)$ .

За  $n = 3$  и  $f : (x, y, z) \rightarrow u$  је

$$\text{grad } f(x, y, z) = (f'_x(x, y, z), f'_y(x, y, z), f'_z(x, y, z)).$$

На пример, за  $f(x, y, z) = xyz$  је

$$\text{grad } f(x, y, z) = (yz, xz, xy).$$

Из дефиниције градијента и својстава парцијалних извода директно следи да важи

1.  $\text{grad}(f + g) = \text{grad } f + \text{grad } g$ ,
2.  $\text{grad}(cf) = c \cdot \text{grad } f$ ,
3.  $\text{grad}(fg) = g \cdot \text{grad } f + f \cdot \text{grad } g$ ,
4.  $\text{grad} \frac{f}{g} = \frac{g \cdot \text{grad } f - f \cdot \text{grad } g}{g^2}$ .

Ако је  $\{e_1, \dots, e_n\}$  једна ортонормирана база Еуклидског простора  $R^n$ , тада је

$$\text{grad } f(x) = f'_{x_1}(x)e_1 + f'_{x_2}(x)e_2 + \dots + f'_{x_n}(x)e_n.$$

За  $n = 2$  једна таква база је  $\{i, j\}$ , па је

$$\text{grad } f(x, y) = f'_x(x, y)i + f'_y(x, y)j,$$

а за  $n = 3$  и базу  $\{i, j, k\}$  имамо

$$\text{grad } f(x, y, z) = f'_x(x, y, z)i + f'_y(x, y, z)j + f'_z(x, y, z)k.$$

### Извод у смеру датог вектора

Нека је  $X \subset \mathbb{R}^2$  отворен скуп,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  и  $(x_0, y_0) \in X$ .

Знамо да парцијални извод  $f'_x(x_0, y_0)$  одређује брзину промене функције дуж праве која садржи тачку  $(x_0, y_0)$  и која је паралелна  $x$  оси.

Да ли може да се одреди брзина промене функције дуж произвољне праве која садржи тачку  $(x_0, y_0)$ ?

Нека је  $v = (v_x, v_y)$  јединични вектор ( $|v| = 1$ , односно  $v_x^2 + v_y^2 = 1$ ).

### **Дефиниција 2** *Ако постоји гранична вредност*

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + tv_x, y_0 + tv_y) - f(x_0, y_0)}{t},$$

она је извод функције  $f$  у тачки  $(x_0, y_0)$  у смеру вектора  $v$  и означава се са  $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$  или  $f'_v(x_0, y_0)$ .

Извод  $f'_v$  управо одређује брзину промене функције дуж праве дефинисане вектором  $v$  и у смеру вектора  $v$ . За  $v = (1, 0)$  је  $f'_v = f'_x$ , а за  $v = (0, 1)$  је  $f'_v = f'_y$ .

За постојање извода  $f'_v$  за произвољан вектор  $v$  није довољно постојање парцијалних извода  $f'_x$  и  $f'_y$ .

### **ПРИМЕРИ**

1. Ако  $f : (x, y) \mapsto \sqrt[3]{xy}$ , тада је

$$\frac{f(tv_x, tv_y) - f(0, 0)}{t} = \frac{\sqrt[3]{tv_x tv_y}}{t} = \frac{\sqrt[3]{v_x v_y}}{\sqrt[3]{t}},$$

па извод у тачки  $(0, 0)$  у правцу вектора  $(v_x, v_y)$  постоји једино за  $v_x = 0$  или за  $v_y = 0$ , односно само постоје парцијални изводи функције  $f$  у тачки  $(0, 0)$ .

2. Ако  $f : (x, y) \mapsto \sqrt[3]{x^2 y}$ , тада је

$$\frac{f(tv_x, tv_y) - f(0, 0)}{t} = \frac{\sqrt[3]{t^2 v_x^2 tv_y}}{t} = \sqrt[3]{v_x^2 v_y},$$

па извод у тачки  $(0, 0)$  постоји у правцу сваког вектора  $(v_x, v_y)$  и једнак је  $\sqrt[3]{v_x^2 v_y}$ . Међутим, функција  $f$  у тачки  $(0, 0)$  није диференцијабилна (проверити!).

Ако су  $\alpha$  и  $\beta$  углови између вектора  $v$  и координатних оса  $Ox$  и  $Oy$ , тада је  $v = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ , па је

$$f'_v(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \sin \alpha) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

На исти начин дефинише се и извод  $f'_v(a)$  у смеру јединичног вектора  $v = (v_1, \dots, v_n)$  ( $|v| = 1$ ) у тачки  $a \in X \subset R^n$  функције  $f : X \rightarrow R$

$$f'_v(a) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}.$$

На пример, за  $n = 3$  и  $a = (x_0, y_0, z_0)$ ,  $v = (v_x, v_y, v_z)$  биће

$$f'_v(a) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + tv_x, y_0 + tv_y, z_0 + tv_z) - f(x_0, y_0, z_0)}{t}.$$

Ако  $s$  није јединични вектор, онда се он дељењем са интензитетом своди на јединични вектор  $v = \frac{s}{|s|}$  вектора  $s$ , па се под изводом  $f'_s(a)$  подразумева извод  $f'_v(a)$ .

Следећа теорема даје довољан услов за постојање извода у правцу датог вектора.

**Теорема 1** *Ако је функција  $f : X \rightarrow R$  ( $X \subset R^n$ ) диференцијабилна у тачки  $a \in X$ , тада*

1. *постоји  $f'_v$  за произвољан јединични вектор  $v \in R^n$ ,*
2. *извод  $f'_v$  је вредност диференцијала функције  $f$  у тачки  $a$  на вектору  $v$ ,*
3. *важи једнакост (веза са градијентом)*

$$f'_v(a) = \text{grad } f(a) \cdot v.$$

Доказ.

1. Из претпоставке диференцијабилности функције  $f$  за прираштај  $h = tv$  (дуж праве одређене вектором  $v$ ) имамо да је

$$\begin{aligned} f(a + h) - f(a) &= f'_{x_1} h_1 + \dots + f'_{x_n} h_n + o(|h|), \quad h \rightarrow 0 \\ &= t(f'_{x_1} v_1 + \dots + f'_{x_n} v_n) + o(|t|), \quad t \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Према томе,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = f'_{x_1} v_1 + \dots + f'_{x_n} v_n,$$

па  $f'_v(a)$  постоји.

2. Тврђење следи из форме израза на десној страни претходне једнакости.
3. Тврђење следи из једнакости

$$f'_{x_1} v_1 + \dots + f'_{x_n} v_n = \text{grad } f(a) \cdot v. \quad \blacksquare$$

### Извод у смеру градијента

Ако је функција  $f$  диференцијабилна у тачки  $x \in R^n$  и ако је  $v = \text{grad } f(x)$ , тада је

$$\begin{aligned} f'_v(x) &= \text{grad } f \cdot \frac{\text{grad } f(x)}{|\text{grad } f(x)|} \\ &= \frac{|\text{grad } f(x)|^2}{|\text{grad } f(x)|} \\ &= |\text{grad } f(x)|. \end{aligned}$$

Из ове једнакости и неједнакости (Коши-Буњаковски,  $x \cdot y \leq |x||y|$ )

$$\text{grad } f(x) \cdot v \leq |\text{grad } f(x)||v| = |\text{grad } f(x)|$$

слиди да се највећа вредност извода у некој тачки добија у смеру градијента у тој тачки. Другим речима, функција најбрже расте у смеру градијента. Може се показати да ни у једном другом смеру функција не расте таквом брзином као у смеру градијента. Исто тако, функција најбрже опада у смеру вектора  $-\text{grad } f(x)$  (антиградијент).

## **2 Векторске функције скаларног аргумента**

### Дефиниција векторске функције

Векторска функција скаларног аргумента је функција  $f : X \rightarrow R^n$ , где је  $X \subset R$ . Овде се ограничавамо на случај  $n = 3$  и уместо  $f$  за функцију користимо ознаку  $r$  (према ознаци за радијус вектор).

**Дефиниција 3** *Функција  $r : T \rightarrow R^3$ ,  $T \subset R$  која пресликава  $t \in T$  у  $(x, y, z) \in R^3$  је векторска функција скаларног аргумента  $t$ .*

За  $t \in T$  пишемо  $r : t \mapsto (x, y, z)$  или  $r(t) = (x, y, z)$ . Заправо и  $x, y, z$  су такође функције од  $t$  (координатне функције). Ако је  $T = [\alpha, \beta]$  и ако су функције

$$x : t \mapsto x(t), \quad y : t \mapsto y(t), \quad z : t \mapsto z(t)$$

непрекидне, тада вредности функције  $r$  представљају координате тачака неке линије у простору.

Како елемент  $(x, y, z)$  из  $R^3$  можемо поистоветити са тачком  $M(x, y, z)$ , односно радијус вектором  $\overrightarrow{OM}$ , за вредност функције  $r$  се узима и сама тачка  $M$  или било који вектор једнак радијус вектору  $\overrightarrow{OM}$ . Нека је у даљем вредност функције  $r$  баш вектор (оријентисани) тродимензионалног простора,  $r : t \mapsto \mathbf{r}$ .

За векторску функцију могу да се дефинишу многи појмови који су аналогни појмовима за скаларну функцију (гранична вредност, непрекидност, диференцијабилност,...).

## Гранична вредност и непрекидност векторске функције

Нека је функција  $r$  дефинисана у пробушеној околини тачке  $t_0$  и нека је  $\mathbf{a}$  вектор.

**Дефиниција 4** Вектор  $\mathbf{a}$  је гранична вредност функције  $r$  када  $t \rightarrow t_0$  ако важи

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |r(t) - \mathbf{a}| = 0.$$

Пишемо  $\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = \mathbf{a}$  или  $r(t) \rightarrow \mathbf{a}$  ( $t \rightarrow t_0$ ).

Ако је

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad \mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z),$$

тада из једнакости

$$|r(t) - \mathbf{a}| = \sqrt{(x(t) - a_x)^2 + (y(t) - a_y)^2 + (z(t) - a_z)^2}$$

слиди да је  $\mathbf{a} = \lim_{t \rightarrow t_0} r(t)$  ако и само ако је

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = a_x, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = a_y, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = a_z.$$

Из неједнакости

$$||r(t)| - |\mathbf{a}|| \leq |r(t) - \mathbf{a}|$$

слиди да важи

$$\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = \mathbf{a} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} |r(t)| = |\mathbf{a}|.$$

За скаларни и векторски производ двеју функција  $r_1$  и  $r_2$  важе једнакости

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (r_1(t) \cdot r_2(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} r_1(t) \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} r_2(t),$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (r_1(t) \times r_2(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} r_1(t) \times \lim_{t \rightarrow t_0} r_2(t).$$

**Дефиниција 5** Векторска функција  $r$  која је дефинисана у околини тачке  $t_0$  је у тој тачки непрекидна ако има граничну вредност и ако је

$$\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = r(t_0).$$

Из еквивалентног услова за граничну вредност слиди да је  $r$  непрекидна у  $t_0$  ако и само ако су функције  $x$ ,  $y$  и  $z$  непрекидне у  $t_0$ .

### Извод векторске функције

Прираштај  $\Delta r$  векторске функције у тачки  $t$  је дат са

$$\Delta r = r(t + \Delta t) - r(t).$$

**Дефиниција 6** *Коначна гранична вредност (ако постоји) количника прираштаја  $\Delta r$  и прираштаја аргумента  $\Delta t$ , када  $\Delta t \rightarrow 0$ , је извод векторске функције  $r$  у тачки  $t$  и означава се са  $\frac{dr(t)}{dt}$  или са  $\dot{r}(t)$ . Вектор  $dr(t) = \dot{r}(t)dt$  је диференцијал функције  $r$ .*

Дакле,

$$\dot{r}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t}.$$

Како је

$$\Delta r = (x(t + \Delta t) - x(t), y(t + \Delta t) - y(t), z(t + \Delta t) - z(t)),$$

из дефиниције граничне вредности следи да за диференцијабилне функције  $x$ ,  $y$  и  $z$  важи

$$\dot{r}(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}.$$

За извод векторске функције (као и за извод скаларне функције) важи линеарност

$$\frac{d}{dt}(\alpha_1 r_1(t) + \alpha_2 r_2(t)) = \alpha_1 \dot{r}_1(t) + \alpha_2 \dot{r}_2(t),$$

а за скаларни, векторски и мешовити производ важе једнакости

$$\frac{d}{dt}(r_1(t) \cdot r_2(t)) = \dot{r}_1(t) \cdot r_2(t) + r_1(t) \cdot \dot{r}_2(t),$$

$$\frac{d}{dt}(r_1(t) \times r_2(t)) = \dot{r}_1(t) \times r_2(t) + r_1(t) \times \dot{r}_2(t),$$

$$\frac{d}{dt}[r_1(t), r_2(t), r_3(t)] = [\dot{r}_1(t), r_2(t), r_3(t)] + [r_1(t), \dot{r}_2(t), r_3(t)] + [r_1(t), r_2(t), \dot{r}_3(t)].$$

## **3 Скаларно поље**

### Дефиниција скаларног поља

Појам скаларног поља се углавном везује за скаларне функције дефинисане на скупу тачака тродимензионалног (физичког) простора.

**Дефиниција 7** *Нека је  $\Omega$  скуп тачака у простору и нека је  $T$  скуп који представља време.*

1. *Функција  $g : \Omega \rightarrow R$  је стационарно скаларно поље или само скаларно поље.*
2. *Функција  $g : \Omega \times T \rightarrow R$  је нестационарно скаларно поље.*

Ови појмови су у честој употреби у механици, метеорологији, електротехници и другим областима примењене математике.



Ако је у простору дат координатни систем  $Oxyz$ , тада свакој тачки  $P$  простора одговара тачка из  $R^3$  која представља координате тачке  $P$ . Скаларно поље  $g$  је тада једнозначно одређено функцијом  $f : X \rightarrow R$ , где  $X \subset R^3$  одговара скупу  $\Omega$ . Функција  $f$  репрезентује скаларно поље  $g$ .

Својства функције  $f$  (непрекидност, диференцијабилност,...) можемо приписати и функцији  $g$ , односно скаларном пољу. На пример, скаларно поље  $g$  је класе  $C^1$  на  $\Omega$  ако је функција  $f$  класе  $C^1$  на отвореном скупу  $X$ .

Ипак, једноставније је да и функцију  $f$  зовемо скаларним пољем. У том смислу скаларно поље је само специјалан случај функције више променљивих (за  $n = 3$ ).

У применама се често користе *ниво површи* функције  $f$ , односно скаларног поља.

Користи се и појам *равног скаларног поља* у случају да је  $\Omega$  скуп тачака у равни. Такво поље репрезентује функција двеју променљивих.

### Градијент скаларног поља

Ако функција  $f$  репрезентује скаларно поље у ортонормираном координатном систему са ортовима  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{k}$ , тада је градијент скаларног поља заправо градијент функције  $f$ , при чему је

$$\text{grad } f = f'_x \mathbf{i} + f'_y \mathbf{j} + f'_z \mathbf{k}.$$

На пример, ако је скаларно поље дефинисано као растојање тачке  $P(x, y, z)$  од координатног почетка, тада је оно репрезентовано функцијом

$$f : (x, y, z) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Налажењем парцијалних извода добијамо

$$\text{grad } f = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{k}.$$

Ниво површи овог скаларног поља су концентричне сфере чији су центри у  $(0, 0, 0)$ . Интензитет вектора  $\text{grad } f$  је једнак 1.

**Теорема 2** *Градијент у тачки  $P(x_0, y_0, z_0)$  скаларног поља  $f$  је нормала ниво површи која садржи тачку  $P$ .*

**Доказ.** Како је ниво површ која садржи тачку  $P$  дата имплицитно једначином  $F(x, y, z) = 0$ , где је

$$F(x, y, z) = f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0),$$

то је  $(f'_x(x_0, y_0, z_0), f'_y(x_0, y_0, z_0), f'_z(x_0, y_0, z_0))$  вектор нормале те површи. Међутим, то је истовремено и градијент функције  $f$  у тачки  $(x_0, y_0, z_0)$ . ■

У равном скаларном пољу које за тачке  $P(x, y)$  дефинише функција  $f : (x, y) \mapsto z$  вектор

$$\text{grad } f = f'_x \mathbf{i} + f'_y \mathbf{j}$$

је ортогоналан на ниво линије функције  $f$ .

На пример, ако је равно скаларно поље одређено функцијом  $f : (x, y) \rightarrow x^2 + y^2$ , тада су ниво линије кружнице  $x^2 + y^2 = C$ . Како је

$$\text{grad } f(x, y) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j},$$

за тачке ниво линија је  $|\text{grad } f| = 2\sqrt{C}$ .

#### Извод скаларног поља у смеру датог вектора

Важна карактеристика скаларног поља је брзина промене поља у у датом смеру. О томе управо говори извод скаларног поља (односно функције која га репрезентује) у смеру датог вектора.

Нека је скаларно поље дефинисано диференцијабилном функцијом  $f : (x, y, z) \rightarrow u$  и нека је дат вектор  $v$ . Ако је  $v_0$  јединични вектор вектора  $v$ , односно  $v_0 = \frac{v}{|v|}$ , тада је (као што је раније доказано)

$$f'_v = \text{grad } f \cdot v_0.$$

Из дефиниције скаларног производа вектора следи да је  $f'_v$  пројекција градијента на вектор  $v$ . То значи да је извод у смеру вектора  $v$  највећи ако су

$v$  и  $\text{grad } f$  паралелни. Према томе, највећа вредност извода у смеру (у да тој тачки) је  $|\text{grad } f|$ , а најмања  $-|\text{grad } f|$ . Другим речима, скаларно поље најбрже расте у смеру градијента и најбрже опада у смеру супротном од смера градијента.

Ако су  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  углови између вектора  $v$  и координатних оса, тада је

$$v_0 = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k},$$

па је

$$f'_v = f'_x \cos \alpha + f'_y \cos \beta + f'_z \cos \gamma.$$

На пример, ако је скаларно поље дефинисано функцијом

$$f : (x, y, z) \mapsto x^2 - 2y^2 + 3z^2,$$

и ако је дат вектор  $v = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ , тада је

$$\text{grad } f = 2x\mathbf{i} - 4y\mathbf{j} + 6z\mathbf{k}, \quad v_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}v,$$

па је

$$f'_v(-1, 1, 2) = \text{grad } f(-1, 1, 2) \cdot v_0 = -\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{12}{\sqrt{3}} = -\frac{18}{\sqrt{3}}.$$



## ПРИМЕНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОГ РАЧУНА ФУНКЦИЈА ВИШЕ ПРОМЕНЉИВИХ

### 1. Теорема о средњој вредности

### 2. Тејлорова формула

### 3. Локални екстремуми

#### 1 Теорема о средњој вредности

Лагранжева теорема за функције једне променљиве може да се уопшти за функције више променљивих.

Нека је  $D \subset \mathbb{R}^2$  отворен скуп и нека је функција  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  диференцијабилна у  $D$ .

**Теорема 1** (*О средњој вредности*) *Ако су тачке  $A(x_0, y_0)$  и  $B(x_1, y_1)$  такве да дуж  $AB$  припада области  $D$ , тада је*

$$f(B) - f(A) = f'_x(\xi, \eta)\Delta x + f'_y(\xi, \eta)\Delta y,$$

где је  $(\xi, \eta)$  унутрашња тачка дужи  $AB$  и где је  $\Delta x = x_1 - x_0$  и  $\Delta y = y_1 - y_0$ .

Доказ. Функција  $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  дефинисана са

$$F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$$

је диференцијабилна на  $[0, 1]$  (као композиција диференцијабилних функција). Ако на функцију  $F$  применимо Лагранжову теорему на  $[0, 1]$  добијамо

$$F(1) - F(0) = F'(\theta), \quad 0 < \theta < 1.$$

Како је (извод сложене функције)

$$F'(t) = f'_x(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\Delta x + f'_y(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\Delta y,$$

то је

$$F'(\theta) = f'_x(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta x + f'_y(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta y,$$

односно

$$F'(\theta) = f'_x(\xi, \eta)\Delta x + f'_y(\xi, \eta)\Delta y.$$

Заменом израза за  $F'(\theta)$  у једнакост из Лагранжове теореме, уз  $F(1) = f(B)$  и  $F(0) = f(A)$ , следи тврђење. ■

- За тврђење теореме није неходно да функција буде диференцијабилна на  $D$ . Довољно је да буде непрекидна на дужи  $AB$  и диференцијабилна у унутрашњим тачкама те дужи (то су услови за Лагранжову теорему).
- Ако уместо тачака  $A$  и  $B$  узмемо тачке  $(x, y)$  и  $(x + h, y + k)$ , Теорема о средњој вредности даје једнакост

$$f(x + h, y + k) - f(x, y) = f'_x(\xi, \eta)h + f'_y(\xi, \eta)k,$$

односно

$$\Delta f(x, y) = df(\xi, \eta).$$

- Из теореме непосредно следи да је диференцијабилна функција на некој области константна ако и само ако су њени парцијални изводи у тој области једнаки нули. Наиме, ако је функција константна, онда су парцијални изводи једнаки нули, а ако су парцијални изводи једнаки нули, онда је прираштај функције једнак нули.
- На исти начин се доказује да у случају  $D \subset R^n$ ,  $f : D \rightarrow R$  и  $a = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $b = (b_1, \dots, b_n) \in D$  важи једнакост

$$f(b) - f(a) = \text{grad } f(c) \cdot (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots, b_n - a_n),$$

где је  $c = (c_1, \dots, c_n)$  нека унутрашња тачка сегмента  $[a, b]$ , односно где је

$$c_k = a_k + \theta(b_k - a_k), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

за неко  $\theta \in (0, 1)$ .

Ако уместо тачака  $a$  и  $b$  узмемо тачке  $x = (x_1, \dots, x_n)$  и  $x + \Delta x$ , где је  $\Delta x = (h_1, \dots, h_n)$  имамо једнакост

$$\begin{aligned} \Delta f(x_1, \dots, x_n) &= \text{grad } f(x_1 + \theta h_1, \dots, x_n + \theta h_n) \cdot (h_1, \dots, h_n) \\ &= d f(x_1 + \theta h_1, \dots, x_n + \theta h_n) \end{aligned}$$

## 2 Тејлорова формула

Тејлорова формула за функцију  $f$  једне променљиве може да се напише у облику

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + df(x_0) + \frac{1}{2}d^2f(x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0) + R_n(\Delta x).$$

Слично је и у случају функције више променљивих. Ради лакшег праћења, даје се доказ за функције две променљиве.

**Теорема 2** *Ако је  $D \subset \mathbb{R}^2$  отворен скуп и ако функција  $F : D \rightarrow \mathbb{R}$  има непрекидне парцијалне изводе реда  $n + 1$  у околини тачке  $P(x_0, y_0)$ , тада за тачку  $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$  из те околине важи*

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(P) + df(P) + \frac{1}{2}d^2f(P) + \cdots + \frac{1}{n!}d^n f(P) + R_n(\Delta x, \Delta y),$$

где је

$$R_n(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y), \quad 0 < \theta < 1.$$

Доказ. Функција  $F$  дефинисана са

$$F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$$

је  $n + 1$  пута диференцијабилна у околини нуле. Применом Тејлорове формуле на  $F$  добијамо

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{1}{2}F''(0)t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(0)t^n + \frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\theta t)t^{n+1},$$

где је  $0 < \theta < 1$ . Диференцирањем функције  $F$  добијамо (извод сложене функције)

$$F'(t) = f'_x(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\Delta x + f'_y(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\Delta y,$$

па је

$$F'(0) = f'_x(P)\Delta x + f'_y(P)\Delta y = df(P),$$

при чему је диференцијал срачунат за  $\Delta x$  и  $\Delta y$ .

Слично се добија да је

$$F''(0) = f''_{xx}(P)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(P)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(P)\Delta y^2 = d^2f(P).$$

Индукцијом се доказује да је

$$F^k(0) = d^k f(P), \quad k = 3, \dots, n$$

и

$$F^{(n+1)}(\theta t) = d^{n+1}f(x_0 + \theta t\Delta x, y_0 + \theta t\Delta y).$$

Осим тога,

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = F(1), \quad f(x_0, y_0) = F(0).$$

Из ових једнакости и Тејлорове формуле за  $F$  (за  $t = 1$ ) следи Тејлорова формула за  $f$ . ■

- Израз на десној страни једнакости из теореме је Тејлоров полином степена  $n$  по  $\Delta x$  и  $\Delta y$ . Заменом  $\Delta x = x - x_0$  и  $\Delta y = y - y_0$  добија се полином  $T_n(x, y)$  којим се апроксимира  $f(x, y)$  у околини тачке  $(x_0, y_0)$ .
- Остатак  $R_n$  из теореме је Лагранжов облик остатка. Као и код функција једне променљиве постоје и други облици остатка. На пример, Пеанов облик је

$$R_n(\Delta x, \Delta y) = o(\rho^n), \quad \rho \rightarrow 0.$$

- Из теореме за  $n = 0$  добијамо тврђење о средњој вредности.
- За  $n = 1$  добијамо

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= f(x_0, y_0) + d f(x_0, y_0) + o(\rho) \\ &\approx f(x_0, y_0) + d f(x_0, y_0). \end{aligned}$$

На пример, за  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  у околини тачке  $(12, 5)$  имамо

$$f(x, y) = f(12 + \Delta x, 5 + \Delta y) \approx f(12, 5) + f'_x(12, 5)\Delta x + f'_y(12, 5)\Delta y.$$

Како је  $f(12, 5) = 13$  и

$$f'_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad f'_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

за  $\Delta x = 0.01$  и  $\Delta y = -0.02$  добијамо

$$\sqrt{12.01^2 + 4.98^2} \approx 13 + \frac{12}{1300} - \frac{10}{1300} \approx 13.0015$$

- За  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  користе се називи *Маклоренова формула* и *Маклоренов полином*.
- Аналогна формула важи и за функцију три или више променљивих.

### 3 Локални екстремуми

Нека је дата функција  $f : D \rightarrow R$ , где је  $D$  отворен скуп у  $R^n$  и нека тачка  $a = (a_1, \dots, a_n)$  припада скупу  $D$ .

**Дефиниција 1** Функција  $f$  има у тачки  $a$

1. локални максимум ако постоји околина  $U(a)$  тачке  $a$  таква да је

$$f(x) \leq f(a), \quad x \in \overset{\circ}{U},$$

2. локални минимум ако у 1. уместо  $\leq$  стоји  $\geq$ ,

3. строги локални максимум ако 1. уместо  $\leq$  стоји  $<$ .

4. строги локални минимум ако у 1. уместо  $\leq$  стоји  $>$ .

5. локални екстремум ако важи 1. или 2.

6. строги локални екстремум ако важи 3. или 4.

#### 3.1 Неопходни услови

За диференцијабилне функције постоји једноставан неопходан услов за локални екстремум.

**Теорема 3** Ако диференцијабилна функција  $f$  има у тачки  $a$  локални екстремум, тада је  $df(a) = 0$ .

**Доказ.** Нека је  $U(a, r)$  једна  $r$  - околина тачке  $a$ , у којој је испуњен услов локалног екстремума функције  $f$ . Тада за  $k = 1, \dots, n$  функција  $f_k : (a_k - r, a_k + r) \rightarrow R$  дефинисана са

$$f_k(x_k) = f(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$$

има у тачки  $a_k$  локални екстремум, па је њен извод у тој тачки једнак нули. Како је то истовремено парцијални извод функције  $f$  у тачки  $a$ , то је

$$f'_{x_1}(a) = f'_{x_2}(a) = \dots = f'_{x_n}(a) = 0,$$

односно  $\nabla f(a) = 0$ , односно  $df(a) = 0$ . ■

- Једнакост  $\nabla f(a) = 0$  важи и ако функција није диференцијабилна, али има парцијалне изводе у тачки локалног екстремума. Исто тако ако у тачки локалног екстремума постоје само неки парцијални изводи, они су у тој тачки једнаки нули.
- У случају  $n = 2$  тангентна раван површи  $z = f(x, y)$  у тачки  $(a, b, f(a, b))$ , (где је  $(a, b)$  тачка локалног екстремума) је паралелна равни  $Oxy$ .
- Услови из теореме нису довољни. На пример, за  $f(x, y) = xy$  је  $df(0, 0) = 0$ , а у  $(0, 0)$  није локални екстремум.
- Тачке у којима су парцијални изводи једнаки нули су потенцијалне тачке локалног екстремума (*стационарне тачке*).

- Функција може имати локални екстремум и у тачки у којој није диференцијабилна или нема неки парцијални извод.
- *Критичне тачке* функције су њене стационарне тачке или тачке у којима неки парцијални извод не постоји.

### 3.2 Довољни услови за функцију две променљиве

Нека је дата функција  $f : D \rightarrow R$ , где је  $D$  отворен скуп у  $R^2$  и нека је  $P_0(x_0, y_0)$  стационарна тачка функције  $f$ . Претпоставимо да у тачки  $P_0$  постоје парцијални изводи првог и другог реда и да су непрекидни, при чему је

$$a = f''_{x^2}(P_0), \quad b = f''_{xy}(P_0), \quad c = f''_{y^2}(P_0).$$

**Теорема 4** *Уз наведене претпоставке за функцију  $f$  важи:*

1. *Ако је  $ac - b^2 > 0$  и  $a < 0$ , функција у  $P_0$  има локални максимум.*
2. *Ако је  $ac - b^2 > 0$  и  $a > 0$ , функција у  $P_0$  има локални минимум.*
3. *Ако је  $ac - b^2 < 0$ , функција у  $P_0$  нема локални екстремум.*

## M2 - 6. ПРЕДАВАЊЕ

Драган Ђорић

1.4.2009.

### ДОВОЉНИ УСЛОВИ ЗА ЛОКАЛНИ ЕКСТРЕМУМ

1. Квадратна форма
2. Силвестеров критеријум
3. Други диференцијал као квадратна форма
4. Довољни услови за локални екстремум - општи случај
5. Довољни услови за локални екстремум функције две променљиве
6. Довољни услови за локални екстремум функције три променљиве



# 1 Квадратна форма

**Дефиниција 1** Нека је  $A = (a_{ij})$  симетрична матрица реалних бројева. Функциј  $Q : R^n \rightarrow R$  дефинисана са

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$$

назива се квадратном формом променљивих  $x_1, \dots, x_n$ . Бројеви  $a_{ij}$  ( $a_{ij} = a_{ji}$ ) су коефицијенти, а матрица  $A$  је матрица квадратне форме.

Ако је само једна променљива,  $x_1$  (или  $x$ ), онда је  $Q(x_1) = a_{11}x_1^2$  или  $Q(x) = ax^2$ .

Ако су две променљиве,  $x_1$  и  $x_2$  (или  $x$  и  $y$ ), онда је

$$Q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

или

$$Q(x, y) = ax^2 + bxy + byx + cy^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Очигледно је  $Q(0, 0, \dots, 0) = 0$ . Међутим,  $Q$  може узимати вредност 0 и за друге вредности променљивих. На пример, ако је  $Q(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$ , тада је  $Q(1, -1) = 0$ .

**Дефиниција 2** Квадратна форма је

1. позитивно дефинитна (дефинисана) ако је

$$Q(x_1, \dots, x_n) > 0, \quad (x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$$

2. негативно дефинитна ако је

$$Q(x_1, \dots, x_n) < 0, \quad (x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$$

3. истог (сталног) знака ако је или позитивно дефинитна или негативно дефинитна

4. ненегативно дефинитна (позитивно полуdefинитна) ако је

$$Q(x_1, \dots, x_n) \geq 0, \quad (x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$$

5. непозитивно дефинитна (негативно полуdefинитна) ако је

$$Q(x_1, \dots, x_n) \leq 0, \quad (x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$$

6. променљивог знака (мења знак), ако не важи ниједан од услова 1.-5.

## 2 Силвестеров критеријум

Нека је  $A(Q) = (a_{ij})$  матрица (симетрична) квадратне форме  $Q : R^n \rightarrow R$  и нека су  $A_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) њени главни минори,

$$A_1 = a_{11}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad A_n = |A|.$$

**Теорема 1** *Квадратна форма  $Q$  је*

*1. позитивно дефинитна ако и само ако је  $A_k > 0$  за  $k = 1, \dots, n$*

$$A_1 > 0, \quad A_2 > 0, \quad A_3 > 0, \quad \dots, \quad A_n > 0$$

*2. негативно дефинитна ако и само ако је  $(-1)^k A_k > 0$  за  $k = 1, \dots, n$*

$$A_1 < 0, \quad A_2 > 0, \quad A_3 > 0, \quad \dots, \quad (-1)^n A_n > 0$$

**Доказ.** (*Само почетак*) У доказу се користи метод математичке индукције, уз погодне трансформације квадратне форме и својства детерминанти. За  $n = 2$  услови за позитивну дефинитност следе из једнакости

$$Q(x_1, x_2) = a_{11} \left( x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 \right)^2 + \left( a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}} \right) x_2^2.$$

За  $x_2 = 0$  имамо неопходан услов  $a_{11} > 0$ , а за  $x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 = 0$  имамо неопходан услов  $a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}} > 0$ . Наравно, ови услови су довољни за позитивну дефинитност. Дакле,  $Q(x_1, x_2)$  је позитивно дефинитна ако и само ако је

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,$$

односно

$$a_{11} > 0, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0.$$

Слично се за негативну дефинитност добија потребан и довољан услов

$$a_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,$$

односно

$$a_{11} < 0, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0. \quad \blacksquare$$

Како својства квадратне форме зависе само од њене матрице, то се и за симетричну матрицу користе исти појмови дефинитности. Тако је симетрична матрица  $A$  **позитивно дефинитна** ако је одговарајућа квадратна форма позитивно дефинитна. Према Силвестеровом критеријуму, симетрична матрица је позитивно дефинитна ако су сви њени главни минори позитивни.

### 3 Други диференцијал као квадратна форма

Нека је  $Q$  квадратна форма чији су коефицијенти  $a_{ij}$  дати са

$$a_{ij} = f''_{x_i x_j}(M),$$

а променљиве  $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$ . Ако је  $\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ , тада је

$$d^2 f(M) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f''_{x_i x_j} \Delta x_i \Delta x_j = \Delta x \cdot A \cdot \Delta x^T = Q(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n).$$

Матрица  $A = (a_{ij})$  је позната као **Хесеова** матрица функције  $f$  у тачки  $M$  и означава се и са  $f''(M)$ .

Према томе,  $d^2 f(M)$  је квадратна форма прираштаја независних променљивих у тачки  $M$  са Хесеовом матрицом,

$$d^2 f(M) = \Delta x \cdot f''(M) \cdot \Delta x^T.$$

То значи да позитивна и негативна дефинитност другог диференцијала зависе до Хесеове матрице.

На основу Силвестеровог критеријума имамо да је други диференцијал  $d^2 f(M)$

1. позитивно дефинитан ако и само ако су сви главни минори матрице  $A = f''(M)$  позитивни,

$$A_1 > 0, \quad A_2 > 0, \quad A_3 > 0, \quad \dots, \quad A_n > 0$$

2. негативно дефинитан ако и само ако главни минори матрице  $A$  наизменично мењају знак,

$$A_1 < 0, \quad A_2 > 0, \quad A_3 > 0, \quad \dots, \quad (-1)^n A_n > 0$$

### 4 Довољни услови за локални екстремум - општи случај

Нека  $f : D \rightarrow R$ , где је  $D \subset R^n$  отворен скуп, има стационарну тачку  $M \in D$ .

**Теорема 2** *Ако је  $f \in C^2(D)$ , тада важи:*

1.  *$f$  у тачки  $M$  има локални минимум ако је квадратна форма  $d^2 f(M)$  позитивно дефинитна,*
2.  *$f$  у тачки  $M$  има локални максимум ако је квадратна форма  $d^2 f(M)$  негативно дефинитна,*
3.  *$f$  у тачки  $M$  нема локални екстремум ако је квадратна форма  $d^2 f(M)$  променљивог знака.*

Доказ. (*Само скица*) На основу Тејлорове формуле имамо

$$\begin{aligned}\Delta f(M) &= df(M) + \frac{1}{2}d^2f(M) + o(\rho^2) \\ &= \frac{1}{2}d^2f(M) + o(\rho^2) \\ &= \frac{\rho^2}{2} \left( \frac{1}{\rho^2}d^2f(M) + o(1) \right)\end{aligned}$$

- Ако је квадратна форма  $d^2f(M)$  позитивно дефинитна, тада постоји околина тачке  $M$  у којој је  $\Delta f(M) > 0$ , па функција  $f$  у тачки  $M$  има строги локални минимум.
- Ако је квадратна форма  $d^2f(M)$  негативно дефинитна, тада постоји околина тачке  $M$  у којој је  $\Delta f(M) < 0$ , па функција  $f$  у тачки  $M$  има строги локални максимум.
- Ако квадратна форма  $d^2f(M)$  мења знак, тада у свакој околини тачке  $M$  прираштај  $\Delta f(M)$  мења знак, па функција  $f$  у тачки  $M$  нема локални екстремум.

У овим закључцима користи се непрекидност квадратне форме, као и својства непрекидне функције на компактном скупу. ■

У случају када је квадратна форма  $d^2f(M)$  полудефинитна, функција  $f$  може а и не мора имати локални екстремум. На пример,  $M(0,0)$  је стационарна тачка функција  $f$ ,  $g$  и  $h$  датих са

$$f(x, y) = x^3 + y^3, \quad g(x, y) = x^4 + y^4, \quad h = -g,$$

при чему је  $d^2f(M) = d^2g(M) = d^2h(M) = 0$ ). Међутим, у тачки  $M$  функција  $f$  нема локални екстремум, функција  $g$  има локални минимум, а функција  $h$  има локални максимум.

Ако је  $A = (a_{ij})$  матрица квадратне форме  $d^2f(M)$ ,

$$a_{ij} = f''_{x_i x_j}(M),$$

и ако су  $A_1, \dots, A_n$  њени главни минори, тада на основу претходне теореме и Силвестеровог критеријума имамо следећа тврђења.

- Функција  $f$  у тачки  $M$  има строги локални минимум ако је

$$A_1 > 0, \quad A_2 > 0, \quad A_3 > 0, \quad \dots, \quad A_n > 0$$

- Функција  $f$  у тачки  $M$  има строги локални максимум ако је

$$A_1 < 0, \quad A_2 > 0, \quad A_3 > 0, \quad \dots, \quad (-1)^n A_n > 0$$

## 5 Довољни услови за локални екстремум функције две променљиве

Нека је, у случају функције две променљиве,  $df(M) = 0$  и

$$a = f''_{xx}(M), \quad b = f''_{xy}(M), \quad c = f''_{yy}(M), \quad D = ac - b^2.$$

**Теорема 3** *Функција  $f$  у тачки  $M$*

1. *има локални минимум ако је  $D > 0$  и  $a > 0$ ,*
2. *има локални максимум ако је  $D > 0$  и  $a < 0$ ,*
3. *нема локални екстремум ако је  $D < 0$ .*

Доказ. Хесеова матрица и диференцијал другог реда функције  $f$  у тачки  $M$  могу да се изразе преко  $a$ ,  $b$  и  $c$

$$f''(M) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

$$d^2f(M) = adx^2 + 2b dx dy + c dy^2.$$

1. Из теореме о довољном услову за локални екстремум следи да је у  $M$  локални минимум ако је  $d^2f(M)$  позитивно дефинитан. На основу Силвестеровог критеријума то је испуњено ако су главни минори Хесеове матрице позитивни. Дакле, ако је  $a > 0$  и  $ac - b^2 > 0$ , функција  $f$  у тачки  $M$  има строги локални минимум.
2. Слично као у 1. следи из Силвестеровог критеријума и теореме о довољном услову за локални максимум.
3. Из једнакости

$$d^2f(M) = a \left( dx + \frac{b}{a} dy \right)^2 + \left( c - \frac{b^2}{a} \right) dy^2$$

следи да је  $d^2f(M) < 0$  за  $dx + \frac{b}{a} dy = 0$  и  $d^2f(M) > 0$  за  $dy = 0$  ( $dx \neq 0$ ).

Према томе,  $d^2f(M)$  мења знак, па према теорему о довољном услову за локални екстремум функција  $f$  у тачки  $M$  нема локални екстремум.



У случају  $D = 0$  не можемо ништа закључити. Функција може а и не мора да има локални екстремум (примери за то су наведени раније).

## 6 Довољни услови за локални екстремум функције три променљиве

Нека је, у случају функције три променљиве,  $df(M) = 0$  и нека су  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$  главни минори Хесеове матрице

$$f''(M) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(M) & f''_{xy}(M) & f''_{xz}(M) \\ f''_{yx}(M) & f''_{yy}(M) & f''_{yz}(M) \\ f''_{zx}(M) & f''_{zy}(M) & f''_{zz}(M) \end{bmatrix}.$$

Из Силвестеровог критеријума и теореме о довољним условима за локални екстремум имамо:

1. Ако је  $A_1 > 0$ ,  $A_2 > 0$ ,  $A_3 > 0$ , онда функција  $f$  у тачки  $M$  има локални минимум.
2. Ако је  $A_1 < 0$ ,  $A_2 > 0$ ,  $A_3 < 0$ , онда функција  $f$  у тачки  $M$  има локални максимум.

Може се доказати да у случају  $A_2 < 0$ , као и у случајевима  $A_1 > 0$ ,  $A_3 < 0$  и  $A_1 < 0$ ,  $A_3 > 0$  диференцијал другог реда  $d^2f(M)$  мења знак. Према томе, важи и:

3. Ако је  $A_2 < 0$ , онда функција  $f$  у тачки  $M$  нема локални екстремум.
4. Ако је  $A_1 > 0$  и  $A_3 < 0$ , онда функција  $f$  у тачки  $M$  нема локални екстремум.
5. Ако је  $A_1 < 0$  и  $A_3 > 0$ , онда функција  $f$  у тачки  $M$  нема локални екстремум.

У осталим случајевима (на пример,  $A_1 > 0$ ,  $A_2 > 0$ ,  $A_3 = 0$ ) потребна су упоређивања са вредностима функције у околини тачке  $M$ .

### ПРИМЕРИ

1. За функцију

$$f : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^4$$

у стационарној тачки  $(0, 0, 0)$  је  $A_1 > 0$ ,  $A_2 > 0$  и  $A_3 = 0$ , а функција у тој тачки очигледно има локални минимум.

2. За функцију

$$f : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^3$$

у стационарној тачки  $(0, 0, 0)$  је  $A_1 > 0$ ,  $A_2 > 0$  и  $A_3 = 0$ , а функција у тој тачки нема локални екстремум јер је  $f(0, 0, 0) = 0$  и  $f(0, 0, z) = z^3$ .

3. За функцију

$$f : (x, y, z) \mapsto 2x^2 + y^2 - 3z^2$$

у стационарној тачки  $(0, 0, 0)$  је  $A_1 > 0$ ,  $A_2 > 0$  и  $A_3 < 0$ , па функција у тој тачки нема локални екстремум.



## M2 - 7. ПРЕДАВАЊЕ

Драган Ђорић

8.4.2009.

2. Дефиниција условног екстремума
3. Условни екстремум функције две променљиве
4. Условни екстремум - општи случај
5. Најмања и највећа вредност функције на компакту

### 2 Дефиниција условног екстремума

У општем случају, за функцију чији је домен  $A$  у  $R^n$  услови могу бити облика

$$\begin{aligned}\varphi_1(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ \varphi_2(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ \vdots &\quad \quad \quad \vdots \\ \varphi_m(x_1, \dots, x_n) &= 0\end{aligned}$$

где је  $m < n$ .

**Дефиниција 1** Функција  $f : A \rightarrow R$  у тачки  $a \in A$  има услови (везани, релативни) локални максимум при условима

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \dots, \quad \varphi_m = 0$$

ако постоји околина  $U(a)$  таква да важи

$$x \in \overset{\circ}{U}(a), \quad \varphi_1(x) = \dots = \varphi_m(x) = 0 \Rightarrow f(x) \leq f(a).$$

Аналогно се дефинишу појмови локални услови минимум, строги локални услови максимум, строги локални услови минимум.

Одређивање локалног условног екстремума функције  $f : A \rightarrow R$  при датим условима је познато и као **задатак условног екстремума**. Ако се уведу ознаке

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)^T,$$

задатак условног екстремума се кратко записује са

$$\begin{aligned}f(x) &\rightarrow \text{extr} \\ \varphi(x) &= 0,\end{aligned}$$

при чему је  $f$  функција циља.

### 3 Условни екстремум функције две променљиве

#### 3.1 Теорема о неопходном услову

Нека је  $A \subset \mathbb{R}^2$  отворен скуп,  $M(a, b) \in A$  и нека су функције  $f, \varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$  непрекидно диференцијабилне у околини тачке  $M$ .

**Теорема 1** *Ако функција  $f$  у тачки  $M$  има локални екстремум при услову  $\varphi(x, y) = 0$  и ако је  $\nabla \varphi(M) \neq 0$ , тада постоји  $\lambda \in \mathbb{R}$  за које важи*

$$\begin{aligned}f'_x(a, b) + \lambda \varphi'_x(a, b) &= 0, \\f'_y(a, b) + \lambda \varphi'_y(a, b) &= 0, \\ \varphi(a, b) &= 0.\end{aligned}$$

**Доказ.** Из услова  $\nabla \varphi(M) \neq 0$  следи да је бар један од парцијалних извода функције  $\varphi$  у тачки  $M$  различит од нуле. Нека је  $\varphi'_y(a, b) \neq 0$ .

На основу теореме о имплицитној функцији једнакост  $\varphi(x, y) = 0$  у некој околини тачке  $x = a$  дефинише имплицитно дату функцију  $y = h(x)$  која је непрекидно диференцијабилна и за коју важи

$$h'(x) = -\frac{\varphi'_x(x, y)}{\varphi'_y(x, y)}.$$

Ако  $f$  у тачки  $M$  има локални екстремум при услову  $\varphi(x, y) = 0$ , тада функција  $g(x) = f(x, h(x))$  има локални екстремум у тачки  $x = a$ . Како је  $g$  и диференцијабилна (композиција диференцијабилних), то је  $g'(a) = 0$  (неопходан услов за локални екстремум диференцијабилне функције једне променљиве).

Диференцирањем функције  $g$  добијамо

$$\begin{aligned}g'(a) &= f'_x(a, b) + f'_y(a, b)h'(a) \\&= f'_x(a, b) - f'_y(a, b)\frac{\varphi'_x(a, b)}{\varphi'_y(a, b)} \\&= f'_x(a, b) - \frac{f'_y(a, b)}{\varphi'_y(a, b)}\varphi'_x(a, b).\end{aligned}$$

Увођењем

$$\lambda = -\frac{f'_y(a, b)}{\varphi'_y(a, b)}$$

добијамо

$$f'_y(a, b) + \lambda \varphi'_y(a, b) = 0,$$

а из једнакости  $g'(a) = 0$  добијамо

$$f'_x(a, b) + \lambda \varphi'_x(a, b) = 0.$$

Слично се доказује и у случају  $\varphi'_x(a, b) \neq 0$ . ■

### 3.2 Геометријска интерпретација

Закључак претходне теореме може и овако да се формулише:

*Координате  $a$  и  $b$  и број  $\lambda$  представљају решења система*

$$\begin{aligned}f'_x(x, y) + \lambda \varphi'_x(x, y) &= 0, \\f'_y(x, y) + \lambda \varphi'_y(x, y) &= 0, \\ \varphi(x, y) &= 0.\end{aligned}$$

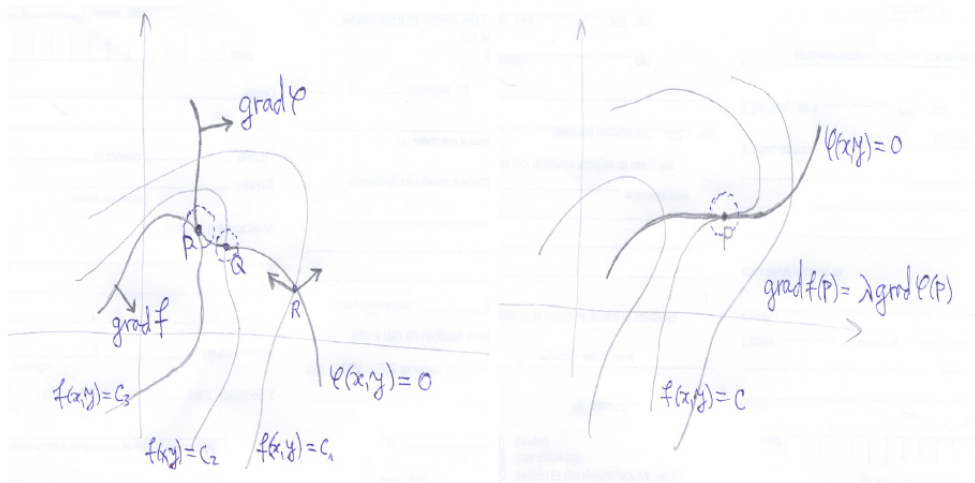
Овај систем може да се запише и у облику

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) &= -\lambda \cdot \nabla \varphi(x, y), \\ \varphi(x, y) &= 0.\end{aligned}$$

Ако су у тачки условног екстремума испуњени услови претходне теореме, тада се ниво линија и крива одређена условом  $\varphi = 0$  у тој тачки додирују.

На слици лево су приказане три тачке  $P$ ,  $Q$  и  $R$  и три ниво линије уз претпоставку да је  $c_1 < c_2 < c_3$  (у складу са градијентом функције  $f$ ). У тачки  $P$  је условни локални екстремум (максимум), док у тачкама  $Q$  и  $R$  нема условног локалног екстремума обзиром да у свакој околини на кривој има тачака са мањом и тачака са већом вредношћу функције него у посматраној тачки.

На слици десно је дата тачка  $P$  у којој је испуњен неопходан услов за локални екстремум на кривој одређеној условом  $\varphi = 0$  (колинеарност градијената функција  $f$  и  $\varphi$ ), али у којој ипак није условни локални екстремум (при истим претпоставкама за ниво линије као на слици лево).



### 3.3 Лагранжова функција

Ако уведемо функцију

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y),$$

онда систем који представља неопходан услов условног екстремума гласи

$$L'_x(x, y, \lambda) = 0, \quad L'_y(x, y, \lambda) = 0, \quad L'_\lambda(x, y, \lambda) = 0.$$

Проблем одређивања условног екстремума

$$\begin{aligned} f(x, y) &\rightarrow \text{extr} \\ \varphi(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

своди се на одређивање стационарних тачака функције  $L$  и испитивање да ли у тим тачкама постоји локални екстремум.

Функција  $L$  се зове **Лагранжова функција**, а број  $\lambda$  је **Лагранжов мултипликатор**.

### 3.4 Довољан услов

Ако претпоставимо да  $f$  и  $\varphi$  на  $A$  имају непрекидне парцијалне изводе другог реда, тада из једнакости

$$h'' = -\frac{1}{\varphi'_y} (\varphi''_{x^2} + 2\varphi''_{xy}h' + \varphi''_{y^2}h'^2)$$

$$g'' = f''_{x^2} + f''_{xy}h' + (f''_{yx} + f''_{y^2}h')h' + f'_y h''$$

добивамо да је

$$g'' = f''_{x^2} + 2f''_{xy}h' + f''_{y^2}h'^2 - \frac{f'_y}{\varphi'_y} (\varphi''_{x^2} + 2\varphi''_{xy}h' + \varphi''_{y^2}h'^2).$$

Функција  $f$  у тачки  $(a, b)$  има локални екстремум при услову  $\varphi(x, y) = 0$  ако функција  $g$  у тачки  $a$  има локални екстремум. Из М1 знамо да  $g$  у тачки  $a$  има локални минимум ако је  $g''(a) > 0$ , а локални максимум ако је  $g''(a) < 0$ .

Израз за  $g''$  може да се запише и у форми

$$g'' = -\frac{1}{\varphi'^2_y} \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{x^2} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{xy} & L''_{y^2} \end{vmatrix}.$$

Ако је  $(a, b, \lambda)$  стационарна тачка Лагранжове функције  $L$  и ако је

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(a, b) & \varphi'_y(a, b) \\ \varphi'_x(a, b) & L''_{x^2}(a, b, \lambda) & L''_{xy}(a, b, \lambda) \\ \varphi'_y(a, b) & L''_{xy}(a, b, \lambda) & L''_{y^2}(a, b, \lambda) \end{vmatrix},$$

тада се довољан услов за локални условни екстремум може једноставно изразити преко детерминанте  $\Delta$ .

Функција  $f$  у тачки  $(a, b)$  има локални условни максимум ако је  $\Delta > 0$ , односно локални условни минимум ако је  $\Delta < 0$ .

## 4 Условни екстремум функције више променљивих

### 4.1 Потребан услов

Слично се изводе неопходни услови условног екстремума у општем случају.

На пример, за  $n = 3$  и  $A \subset R^3$  функција  $f : A \rightarrow R$  има локални екстремум у тачки  $M(a, b, c) \in A$  при услови  $\varphi(x, y, z) = 0$  (из којег налазимо  $z = h(x, y)$ ) ако функција

$$g(x, y) = f(x, y, h(x, y))$$

има у тачки  $M$  локални екстремум. Изједначавањем парцијалних извода функције  $g$  са нулом (неопходан услов локалног екстремума за  $g$ ), уз услов  $\varphi'_z(a, b, c) \neq 0$ , добијамо

$$f'_x + \lambda \varphi'_x = 0, \quad f'_y + \lambda \varphi'_y = 0, \quad f'_z + \lambda \varphi'_z = 0,$$

где је

$$\lambda = -\frac{f'_z(a, b, c)}{\varphi'_z(a, b, c)}.$$

Према томе, тачка  $M$  је стационарна тачка Лагранжове функције  $L = f + \lambda \varphi$  и важи

$$\nabla f(M) = -\lambda \nabla \varphi(M).$$

### 4.2 Довољан услов

Ако је  $d^2L(M) > 0$ , тада функција  $L$  у тачки  $M$  има локални минимум а функција  $f$  локални условни минимум. Ако је  $d^2L(M) < 0$ , тада функција  $L$  у тачки  $M$  има локални максимум а функција  $f$  локални условни максимум.

Међутим, ови услови су сувише јаки за условни екстремум. У многим случајевима у којима постоји условни локални екстремум они не морају бити испуњени. У том смислу ни Силвестеров критеријум који даје довољне услове за позитивну (негативну) дефинитност другог диференцијала најчешће није употребљив за проверу довољних услова локалног условног екстремума.

Уместо тога, проверу знака другог диференцијала у стационарној тачки  $a = (a_1, \dots, a_n)$  треба радити при условима

$$d\varphi_1(a) = 0, \quad d\varphi_2(a) = 0, \quad \dots, \quad d\varphi_m(a) = 0$$

који одређују тангентни простор  $T$  у тачки  $a$  површи дефинисане условима  $\varphi_1 = 0, \dots, \varphi_m = 0$ .

То значи да за прираштаје  $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$  узимамо у обзир везе дате једнакостима

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1(a)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_1(a)}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \varphi_1(a)}{\partial x_n} dx_n &= 0 \\ \frac{\partial \varphi_2(a)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_2(a)}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \varphi_2(a)}{\partial x_n} dx_n &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial \varphi_m(a)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_m(a)}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \varphi_m(a)}{\partial x_n} dx_n &= 0 \end{aligned}$$

Матрица овог система је Јакобијева матрица  $\varphi'(a)$  за коју се претпоставља да има ранг једнак  $m$ . То значи да из тог система може да се одреди  $m$  прираштаја преко преосталих  $n - m$ , на пример  $dx_1, \dots, dx_m$  преко  $dx_{m+1}, \dots, dx_n$ .

Када у  $d^2L(a)$  заменимо одговарајуће вредности  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  за стационарну тачку  $a$  и елиминишемо прираштаје  $dx_1, \dots, dx_m$ , добијамо

$$d^2L(a)_T = F(dx_{m+1}, \dots, dx_n).$$

Довољни услови за локални екстремум функције  $f$  у тачки  $a$  при условима  $\varphi_1 = 0, \dots, \varphi_m = 0$  могу да се искажу помоћу квадратне форме  $F$ .

1. Ако је  $F$  позитивно дефининисана, тада  $f$  у  $a$  има локални условни минимум.
2. Ако је  $F$  негативно дефининисана, тада  $f$  у  $a$  има локални условни максимум.
3. Ако  $F$  мења знак, тада  $f$  у  $a$  нема локални условни екстремум.
4. У осталим случајевима се не може ништа поуздано закључити, односно  $f$  у  $a$  може а и не мора имати локални условни екстремум.

### 4.3 Поступак за налажење локалног условног екстремума

1. За дату функцију  $f$  и услове  $\varphi_1 = 0, \dots, \varphi_m = 0$  формира се Лагранжова функција  $L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ .
2. Налажењем парцијалних извода функције  $L$  формира се систем од  $n+m$  једначина

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} &= 0 \\ \varphi_1(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ \varphi_m(x_1, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned}$$



3. Решавањем добијеног система добијамо стационарне тачке.
4. За сваку стационарну тачку проверавамо да ли је испуњен довољан услов.

## 5 Најмања и највећа вредност функције на компакту

Као што је познато, непрекидна функција на компактном скупу достиже и минимум и максимум (апсолутни).

*Како одредити те екстремне вредности и тачке у којима се оне достижу?*

Поступак се састоји у одређивању свих критичних тачака на датом скупу и упоређивања вредности функције у тим тачкама.

У критичне тачке спадају критичне тачке из унутрашњости дате области (стационарне тачке и тачке у којима функција није диференцијабилна) и критичне тачке са границе дате области (стационарне тачке при условима који одређују делове границе и граничне тачке делова границе).

У општем случају је поступак тешко описати, а у примерима се обично ослања на геометријску представу дате компактне области.

## M2 - 8. ПРЕДАВАЊЕ

Драган Ђорић

# ИНТЕГРАЛ

## ФУНКЦИЈЕ ЈЕДНЕ ПРОМЕНЉИВЕ

1. Одређени интеграл
2. Неодређени интеграл
3. Интеграција неких класа функција
4. Неке примене интеграла
5. Несвојствени интеграл

## ОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛ

- Дефиниција одређеног интеграла
- Класе интеграбилних функција
- Особине одређеног интеграла
- Средња вредност интеграла
- Веза интеграла и извода

## 1 Дефиниција одређеног интеграла

Нека је дата функција  $f : [a, b] \rightarrow R$ . За произвољну поделу  $\Pi[x_0, x_1, \dots, x_n]$  сегмента  $[a, b]$  ( $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ) величине  $\Delta x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) дефинисане са

$$\Delta x_i(\Pi) = x_i - x_{i-1}$$

зависе од  $\Pi$ .

Параметар (дијаметар) поделе  $\Pi$  је  $\lambda(\Pi)$  дефинисан са

$$\lambda(\Pi) = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i(\Pi).$$

Уместо  $\Delta x_i(\Pi)$  и  $\lambda(\Pi)$ , ради једноставности, писаћемо понекад и  $\Delta x_i$  и  $\lambda$ .

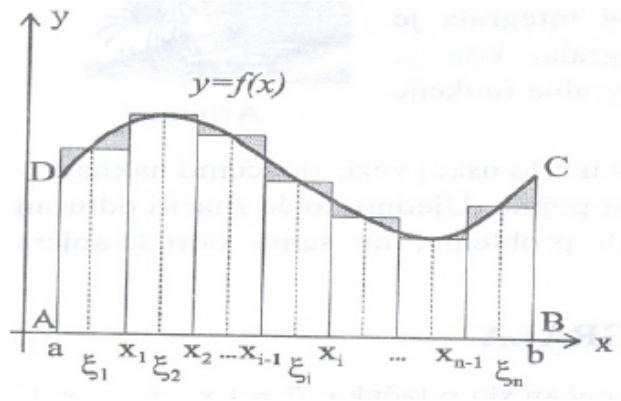
Ако на сваком сегменту  $[x_{i-1}, x_i]$  изаберемо по једну тачку  $\xi_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), добићемо скуп  $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ . На тај начин имамо поделу  $(\Pi, \xi)$  сегмента  $[a, b]$  са изабраним тачкама  $\xi_i$ .

**Дефиниција 1** За дату функцију  $f : [a, b] \rightarrow R$  и дату поделу  $(\Pi, \xi)$  збир  $S_n$  дефинисан са

$$S_n(f, \Pi, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

зове се интегрална или Риманова сума функције  $f$ .

Мотивација и геометријска интерпретација за овакав збир се могу видети на примеру позитивне функције чији график са правама  $x = a$ ,  $x = b$  и  $y = 0$  ограничава криволинијски трапез.



**Дефиниција 2** Ако за свако  $\varepsilon > 0$  постоји  $\delta(\varepsilon) > 0$  такво да за сваку поделу  $(\Pi, \xi)$  за коју је  $\lambda(\Pi) < \delta$  важи

$$|S_n(f, \Pi, \xi) - I| < \varepsilon,$$

тада кажемо да је  $f$  интеграбилна у Римановом смислу или  $\mathcal{R}$ -интеграбилна на  $[a, b]$ . Број  $I$  се назива Риманов или одређени интеграл функције  $f$  на  $[a, b]$  и означава са  $\int_a^b f(x)dx$ .

Риманов интеграл је, дакле, гранична вредност интегралних сума која се добија при  $\lambda(\Pi) \rightarrow 0$  (у смислу дате дефиниције), што се симболички записује у облику једнакости

$$I = \lim_{\lambda(\Pi) \rightarrow 0} S_n(f, \Pi, \xi).$$

Како је претходном дефиницијом интеграл дефинисан за  $a < b$ , у случају  $a = b$  и  $a > b$  он се дефинише са

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \quad \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx.$$

Скуп свих интеграбилних функција на  $[a, b]$  се означава са  $\mathcal{R}[a, b]$ . Бројеви  $a$  и  $b$  су доња и горња граница интеграла, функција  $f$  је подинтегрална функција или интегранд, израз  $f(x)dx$  је подинтегрални израз, а променљива  $x$  је интеграциона променљива и она се може заменити било којом другом.

Дакле, за неке функције одређени интеграл постоји, а за неке не постоји. Може се показати да важи следеће тврђење.

**Теорема 1** *Потребан услов да функција  $f$  буде  $\mathcal{R}$ -интеграбилна на  $[a, b]$  јесте да је она ограничена на  $[a, b]$ .*

Да услов ограничености није довољан показује пример Дирихлеове функције.

## 2 Класе интеграбилних функција

*За које све функције постоји Риманов интеграл?*

Нека је  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ограничена функција и нека су за произвољну поделу  $\Pi$  величине  $m_i$  и  $M_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) дефинисане са

$$m_i(\Pi) = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad M_i(\Pi) = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

**Дефиниција 3** *Збир*

1.  $\underline{S}_n$  дефинисан са  $\underline{S}_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$  зове се доња интегрална сума,

2.  $\overline{S}_n$  дефинисан са  $\overline{S}_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$  зове се горња интегрална сума

за функцију  $f$  на  $[a, b]$ .

Како је  $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$  за  $i = 1, \dots, n$ , из дефиниције следи да је

$$\underline{S}_n \leq S_n \leq \overline{S}_n$$

за сваки природан број  $n$ . Низ доњих интегралних сума је ограничен одозго, а низ горњих интегралних сума је ограничен одоздо, па можемо дефинисати супремум  $I_*$  првих, односно инфимум  $I^*$  других, при чему је

$$\underline{S}_n \leq I_* \leq I^* \leq \overline{S}_n.$$

Услов  $\mathcal{R}$ -интеграбилности може се изразити помоћу услова за горњу и доњу интегралну суму.

**Теорема 2** *Довољан услов за  $\mathcal{R}$ -интеграбилност функције  $f$  на  $[a, b]$  јесте да за свако  $\varepsilon > 0$  постоји  $\delta > 0$  такво да за сваку поделу  $\Pi$  за коју је  $\lambda(\Pi) < \delta$  важи*

$$\overline{S}_n(f, \Pi) - \underline{S}_n(f, \Pi) < \varepsilon.$$

**Доказ.** Из услова следи да је

$$0 \leq I^* - I_* \leq \overline{S}_n - \underline{S}_n < \varepsilon$$

за свако  $\varepsilon > 0$ , што значи да је  $I_* = I^*$ . Ако ову вредност означимо са  $I$ , тада из  $\underline{S}_n \leq I \leq \overline{S}_n$  и  $\underline{S}_n \leq S_n \leq \overline{S}_n$  следи да је  $|S_n - I| < \varepsilon$ , што значи да је  $f$  интеграбилна. ■

Може се доказати да је услов у теорему и потребан, односно да следи из претпоставке  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ .

Помоћу овог услова се лако доказује интеграбилност једне класе функција.

**Теорема 3** *Ако је функција  $f$  непрекидна на  $[a, b]$ , онда је она и  $\mathcal{R}$ -интеграбилна на  $[a, b]$ .*

**Доказ.** Према Канторовој теорему функција  $f$  је равномерно непрекидна на  $[a, b]$ , па за сваки број  $\varepsilon > 0$  постоји број  $\delta > 0$  такав да за сваку поделу  $\Pi$  за коју је  $\lambda(\Pi) < \delta$  важи

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

за све  $x', x''$  из истог подинтервала  $[x_{k-1}, x_k]$ . Поред тога, за сваки подинтервал  $[x_{k-1}, x_k]$  постоје  $\xi_k, \eta_k \in [x_{k-1}, x_k]$  за које је  $f(\xi_k) = M_k$ ,  $f(\eta_k) = m_k$ . Дакле за  $\xi_k$  и  $\eta_k$  важи

$$M_k - m_k = f(\xi_k) - f(\eta_k) < \frac{\varepsilon}{b - a},$$

па је

$$\overline{S}_n - \underline{S}_n = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b - a} \cdot (b - a) = \varepsilon.$$

Према претходној теорему то значи да је  $f$  интеграбилна. ■

Постоје и ограничене функције које нису непрекидне, а јесу  $\mathcal{R}$ -интеграбилне. На пример, монотоне функције су интеграбилне на  $[a, b]$ .

### 3 Својства одређеног интеграла

**Теорема 4** (Линеарност) *Ако  $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$  и  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , тада  $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}[a, b]$  и важи једнакост*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

**Доказ.** Тврђење следи из једнакости

$$\begin{aligned} S_n(\alpha f + \beta g) &= \sum_{i=1}^n (\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)) \Delta x_i \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i + \beta \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i \\ &= \alpha S_n(f) + \beta S_n(g). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Слично важи и за линеарну комбинацију функција  $f_1, \dots, f_n$ . Међутим, из интеграбилности збира  $f + g$  не следи интеграбилност сабирака. На пример, ако је  $f$  Дирихлеова функција и  $g = -f + 1$ , тада је  $(f + g)(x) = 1$ , а ни  $f$  ни  $g$  нису интеграбилне.

**Теорема 5** (Подела интервала интеграције) *Ако  $f \in \mathcal{R}[a, c]$  и  $b \in (a, c)$ , тада  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  и  $f \in \mathcal{R}[b, c]$  и важи једнакост*

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx.$$

**Доказ.** Из интеграбилности функције  $f$  на  $[a, c]$  следи интеграбилност на  $[a, b]$  зато што је разлика горње и доње интегралне суме на  $[a, b]$  мања него одговарајућа разлика на  $[a, c]$ . Исто важи и за интеграбилност на  $[b, c]$ . Наведену једнакост добијамо тако што посматрамо интегралне суме за поделе које садрже тачку  $b$ .  $\blacksquare$

Из ове теореме добијамо следеће тврђење.

**Теорема 6** *Ако су  $a, b, c \in \mathbb{R}$  крајеви три одсечка и ако је  $f$  интеграбилна на највећем од њих, онда је интеграбилна и на остала два и важи*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx.$$

**Доказ.** Нека је  $a < b < c$ . Из претходне теореме и дефиниције интеграла у случају кад је доња граница већа од горње следи да је

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Слично се доказује и за било који други распоред  $a, b$  и  $c$ .

### Теорема 7 (Монотоност)

1. Ако  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  и  $f(x) \geq 0$  за  $x \in [a, b]$ , тада је

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

2. Ако  $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$  и  $f(x) \leq g(x)$  на  $[a, b]$ , тада

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

3. Ако  $f \in C[a, b]$  и ако је  $m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ ,  $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$ , тада

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Доказ. 1. Како је  $f(x) \geq 0$ , то је  $I \geq \underline{S}_n \geq 0$ .

2. Ако је  $h = g - f$ , тада из 1. следи да је  $\int_a^b h(x)dx \geq 0$ , односно

$$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

3. Како је  $m \leq f(x) \leq M$  из 2. следи да је

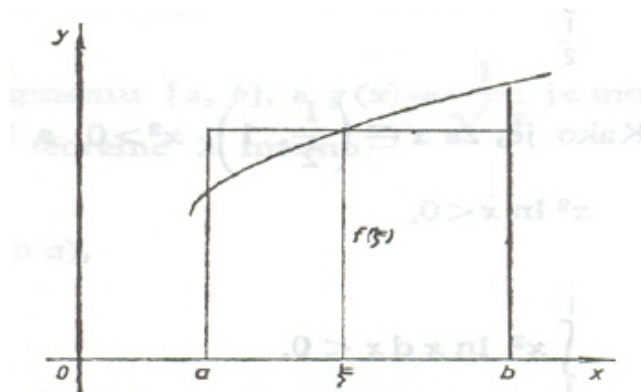
$$m \int_a^b dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq M \int_a^b dx,$$

одакле добијамо наведене неједнакости. ■

## 4 Средња вредност интеграла

Теорема 8 Ако  $f \in C[a, b]$ , тада постоји  $\xi \in (a, b)$  таква да је

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$





**Доказ.** Из тачке 3. претходне теореме следи да је

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M.$$

Према томе, постоји  $\mu \in [m, M]$  тако да је

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = \mu.$$

Како је  $f$  непрекидна, према Коши Болцановој теореме постоји  $\xi \in (a, b)$  тако да је  $f(\xi) = \mu$ . Из ове једнакости следи једнакост из теореме. ■

Ако уместо  $f \in C[a, b]$  претпоставимо само  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ , тада постоји вредност  $\mu \in [\inf_{x \in [a, b]} f(x), \sup_{x \in [a, b]} f(x)]$  таква да је

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a).$$

Важи и општије тврђење.

**Теорема 9** Ако  $f \in C[a, b]$  и  $g \in \mathcal{R}[a, b]$  и ако је  $g(x) \geq 0$  за  $x \in [a, b]$ , тада постоји  $\xi \in (a, b)$  тако да је

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

**Доказ.** Из непрекидности функције  $f$  следи да постоје бројеви  $m$  и  $M$  за које је  $m \leq f(x) \leq M$  за  $x \in [a, b]$ . Како је  $g(x) \geq 0$ , то је

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x), \quad x \in [a, b],$$

односно

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx,$$

Ако је  $\int_a^b g(x)dx = 0$ , тада је и  $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ , па тврђење важи. У супротном је  $\int_a^b g(x)dx > 0$ , па је

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M.$$

Из Коши-Болцанове теореме имамо да постоји  $\xi \in (a, b)$  такво да је

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx},$$

односно

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx. \quad \blacksquare$$

Теорема важи и у случају  $g(x) \leq 0$ .

## 5 Веза интеграла и извода

Ако је функција  $f$  интеграбилна на  $[a, b]$ , тада је она интеграбилна и на  $[a, x]$  за  $x \in (a, b)$ , а  $\int_a^x f(t)dt$  се зове одређени интеграл са променљивом горњом границом. Овај интеграл је заправо функција од  $x$ , означимо је са  $\Phi$ . Дакле,

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in (a, b).$$

Може се показати да је  $\Phi$  непрекидна функција на  $[a, b]$ . У случају кад је функција  $f$  непрекидна у некој тачки имамо јаче тврђење за  $\Phi$  и оно представља везу између извода и интеграла.

**Теорема 10** *Ако  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  и ако је  $f$  непрекидна у тачки  $x \in (a, b)$ , тада је  $\Phi$  диференцијабилна у тачки  $x$  и важи*

$$\Phi'(x) = f(x).$$

**Доказ.** Према дефиницији извода је  $\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi(x)}{\Delta x}$ . Како је

$$\Delta \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt,$$

применом теореме о средњој вредности за интеграле добија се  $\Delta \Phi(x) = f(\xi)\Delta x$  за неко  $\xi \in [x, x + \Delta x]$ . Према томе

$$\frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = \frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = f(\xi),$$

па је

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = f(x). \quad \blacksquare$$

Ова теорема је позната као *основна теорема диференцијалног и интегралног рачуна*.

## M2 - 9. ПРЕДАВАЊЕ

Драган Ђорић

22.5.2009.

### ИНТЕГРАЛ ФУНКЦИЈЕ ЈЕДНЕ ПРОМЕНЉИВЕ

1. Одређени интеграл
2. Неодређени интеграл
3. Интеграција неких класа функција
4. Неке примене интеграла
5. Несвојствени интеграл

## НЕОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛ

- Примитивна функција и неодређени интеграл
- Таблица интеграла
- Својства неодређеног интеграла
- Метода смене
- Метода парцијалне интеграције
- Рекурентне формуле
- Њутн Лајбницова формула
- Смена променљиве у одређеном интегралу

# 1 Примитивна функција и неодређени интеграл

**Дефиниција 1** Диференцијабилна функција  $F$  је примитивна за функцију  $f : (a, b) \rightarrow R$  ако је  $F'(x) = f(x)$  за  $x \in (a, b)$ .

## ПРИМЕРИ

1.  $F(x) = \sin x$  за  $f(x) = \cos x$  на  $R$ .
2.  $F(x) = \arctan x$  за  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  на  $R$ .
3.  $F(x) = \operatorname{arccot} \frac{1}{x}$  за  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  на  $(0, +\infty)$ .
4.  $F(x) = \operatorname{arccot} \frac{1}{x}$  за  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  на  $(-\infty, 0)$ .
5.  $F(x) = x|x|$  за  $f(x) = 2|x|$  на  $R$ .

Ако је  $F$  примитивна функција за  $f$ , очигледно да је и  $F + C$  ( $C \in R$ ) такође примитивна за  $f$ . Штавише, све примитивне функције се међусобно разликују само за константе.

**Теорема 1** Ако су  $F_1$  и  $F_2$  примитивне функције за  $f$  на  $(a, b)$ , тада је њихова разлика на том интервалу константна.

**Доказ.** Ако је  $F = F_1 - F_2$ , тада је  $F'(x) = 0$  за  $x \in (a, b)$ , па је  $F(x) = C$  на  $(a, b)$ . ■

На пример, примитивне функције из примера 4. и 2. се разликују за  $\pi$  на  $(-\infty, 0)$ , а из примера 2. и 3. су једнаке на  $(0, +\infty)$ .

Из основне теореме диференцијалног и интегралног рачуна непосредно следи да је функција  $\Phi$  дефинисана са

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

једна примитивна функција за  $f$  ако је  $f$  непрекидна на  $[a, b]$ . Према томе, свака непрекидна функција има примитивну.

Скуп свих примитивних функција за дату функцију (укључујући и  $\Phi$ ) се посебно издваја.

**Дефиниција 2** Скуп свих примитивних функција функције  $f$  назива се неодређени интеграл функције  $f$  и означава се са  $\int f(x)dx$ . Функција  $f$  је подинтегрална функција или интегранд, а  $f(x)dx$  је подинтегрални израз.

Дакле,

$$\int f(x)dx = \{F(x) + C | C \in R\},$$

где је  $F$  нека примитивна за  $f$ . Уместо овог, користи се краћи запис

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Сам поступак одређивања примитивне функције, односно интеграла, назива се интеграција. График сваке примитивне функције је интегрална крива функције  $f$ .

Из саме дефиниције интеграла следи да је

$$\int df(x) = f(x) + C, \quad \frac{d}{dx} \int f(x)dx = f(x), \quad d \int f(x)dx = f(x)dx.$$

## 2 Таблица интеграла

Избором примитивне функције  $F$  добијамо интеграл функције  $F'$ . На тај начин можемо формирати произвољно дуг списак интеграла. На пример, један мали списак (таблица) интеграла је:

1.  $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1.$

2.  $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad x < 0 \text{ или } x > 0.$

3.  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$

4.  $\int e^x dx = e^x + C.$

5.  $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

6.  $\int \cos x dx = \sin x + C.$

7.  $\int \sinh x dx = \cosh x + C.$

8.  $\int \cosh x dx = \sinh x + C.$

9.  $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C.$

10.  $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C.$

11.  $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C.$

$$12. \int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C.$$

$$13. \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C.$$

$$14. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \quad |x| < 1.$$

$$15. \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C.$$

$$16. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C, \quad |x| > 1.$$

$$17. \int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C, \quad |x| \neq 1.$$

Постоје и елементарне функције чији се интеграл не могу изразити у коначном облику помоћу елементарних функција. На пример,

$$\int e^{x^2} dx, \int \frac{e^x}{x} dx, \int \frac{dx}{\ln x}, \int \frac{\sin x}{x} dx, \int \frac{\cos x}{x} dx, \int \sin x^2 dx, \int \cos x^2 dx.$$

*Примери интеграла који се свводе на табличне*

$$1. \int \sqrt{x} \sqrt{x} dx = \int x^{7/8} = \frac{8}{15} x^{15/8} + C.$$

$$2. \int e^{5x} dx = \int (e^5)^x dx = \frac{(e^5)^x}{\ln e^5} + C = \frac{e^{5x}}{5} + C.$$

### 3 Својства неодређеног интеграла

**Теорема 2** Ако  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  и ако  $f$  има примитивну функцију, тада важи

$$\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx$$

**Доказ.** Нека је  $F(x)$  примитивна функција функције  $f(x)$ . Тада је

$$[c \cdot F(x)]' = c \cdot f(x),$$

па је

$$\int c \cdot f(x) dx = cF(x) + D, \quad c \cdot \int f(x) dx = c(F(x) + C).$$

За  $D = c \cdot C$  добијамо тврђење теореме. ■

Слободнија формулација овог својства је: *константа излази испред интеграла.*



**Теорема 3** *Ако функције  $f$  и  $g$  имају примитивне, тада је*

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

**Доказ.** Нека је  $F$  примитивна за  $f$  и  $G$  примитивна за  $g$ . Тада је  $F + G$  примитивна за  $f + g$ , па је

$$\int (f(x) + g(x))dx = F(x) + G(x) + C.$$

Како је

$$\int f(x)dx = F(x) + C_1, \quad \int g(x)dx = G(x) + C_2,$$

за  $C = C_1 + C_2$  добијамо тврђење теореме. ■

Тврђење важи и за више од две функције. Слободнија формулација овог својства је: *интеграл пролази кроз збир.*

Из претходна два својства следи *линеарност неодређеног интеграла.*

**Теорема 4** *Ако функције  $f$  и  $g$  имају примитивне на неком интервалу и ако су  $\alpha$  и  $\beta$  реални бројеви, такви да је  $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ , тада на том интервалу и функција  $\alpha f + \beta g$  има примитивну и важи*

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx.$$

Тврђење важи и за више од две функције. Слободнија формулација овог својства је: *интеграл линеарне комбинације функција је линеарна комбинација интеграла тих функција.*

*Примери у којима се користе линеарност и таблица (разлагање интегранда)*

1. 
$$\int \frac{x^2 + x}{\sqrt{x}}dx = \int x^{3/2}dx + \int x^{1/2}dx = \frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{2}{3}x^{3/2} + C.$$

2. 
$$\int \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \arctan x + C.$$

3. Како је

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1,$$

то је

$$\int \tan^2 x dx = \tan x - x + C.$$

4. Како је

$$\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x},$$

то је

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \tan x - \cot x + C.$$

**Теорема 5** *Ако је  $F$  примитивна функција за  $f$  и  $a, b \in \mathbb{R}$ , тада је*

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C.$$

**Доказ.** Тврђење следи из једнакости

$$\frac{d}{dx}F(ax + b) = F'(ax + b) \cdot a = af(ax + b). \quad \blacksquare$$

Дакле, из једнакости

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

следи једнакост

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C.$$

**Теорема 6** *Ако је  $\int f(x)dx = F(x) + C$  на интервалу  $A$  и ако је  $u : A \rightarrow B$  диференцијабилна функција на интервалу  $A$ , тада је*

$$\int f(u)du = F(u) + C.$$

**Доказ.** Нека је  $F$  примитивна функција функције  $f$ . Тада је због инваријантности диференцијала

$$dF(u) = F'(u)du = f(u)du,$$

па је

$$\int f(u)du = \int dF(u) = F(u) + C. \quad \blacksquare$$

Последња једнакост може да се напише и у облику

$$\int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + C.$$

## 5 Метода парцијалне интеграције

**Теорема 8** *Нека су  $u$  и  $v$  диференцијабилне функције. Ако функција  $uv'$  има примитивну функцију, тада и функција  $u'v$  има примитивну функцију и важи једнакост*

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

**Доказ.** Тврђење следи из једнакости  $d(uv) = u dv + v du$ .  $\blacksquare$

## 4 Метода смене

**Теорема 7** *Ако је функција  $f$  непрекидна на интервалу  $A$  и ако је  $\varphi : B \rightarrow A$  функција која има непрекидан извод различит од нуле на  $B$ , тада је*

$$\int f(x)dx = G(\varphi^{-1}(x)) + C,$$

где је  $G$  примитивна функција за функцију  $g : t \mapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$ .

**Доказ.** Због сталног знака функције  $\varphi'$ , функција  $\varphi$  је строго монотона, па има инверзну. Како је

$$\frac{d}{dx}G(\varphi^{-1}(x)) = G'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{g(t)}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x),$$

функција  $G(\varphi^{-1}(x))$  је примитивна за функцију  $f$ . ■

Ова теорема даје могућност да уместо примитивне за  $f$ , уколико не можемо лако да дођемо до ње, тражимо примитивну за функцију  $g$  коју добијамо тако што у функцији  $f$  уведемо смену  $x = \varphi(t)$ .

## 6 Рекурентне формуле

Ако интегранд зависи од природног броја  $n$ , тада и интеграл зависи од  $n$ , па га можемо означити са  $I_n$ . Применом парцијалне интеграције често се може одредити веза између, на пример  $I_n$  и  $I_{n-1}$  или  $I_n$  и  $I_{n-2}$  или  $I_n, I_{n-1}$  и  $I_{n-2}$ . То су рекурентне формуле.

## 7 Њутн Лајбницева формула

Следеће тврђење су независно један од другог доказали Њутн и Лајбниц.

**Теорема 9** *Нека је функција  $f$  непрекидна на  $[a, b]$  и нека је  $F$  њена примитивна функција. Тада је*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

**Доказ.** Како је  $\Phi(x)$  такође примитивна функција за функцију  $f$ , то је

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C.$$

Из ове једнакости за  $x = a$  добија се

$$0 = \int_a^a f(t)dt = F(a) + C,$$

одакле је  $C = -F(a)$ . Према томе,

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a),$$

одакле се за  $x = b$  добија тврђење теореме. ■

## 8 Смена променљиве у одређеном интегралу

**Теорема 10** *Нека је функција  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрекидна и нека функција  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  има непрекидан извод, при чему је  $\varphi(\alpha) = a$  и  $\varphi(\beta) = b$ . Тада је*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

**Доказ.** Ако је  $F(x)$  примитивна за  $f(x)$  на  $[a, b]$ , тада је  $F(\varphi(t))$  примитивна за  $f(\varphi(t))\varphi'(t)$  на  $[\alpha, \beta]$ , па је

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a). \quad \blacksquare$$

**Напомена** Ако је  $\varphi$  строго монотона тврђење важи и за функцију  $f$  која не мора бити непрекидна, већ само  $\mathcal{R}$ -интеграбилна.

### М2 - 10. ПРЕДАВАЊЕ

Драган Ђорић

29.5.2009.

## ИНТЕГРАЦИЈА НЕКИХ КЛАСА ФУНКЦИЈА

1. Интеграција рационалних функција
2. Интеграција неких тригонометријских функција
3. Интеграција неких ирационалних функција

# 1 Интеграција рационалних функција

## 1.1 Нека својства полинома

**Теорема 1** (Основна теорема алгебре) *Сваки полином степена  $n$  са реалним коефицијентима има тачно  $n$  нула (реалних или комплексних).*

**Теорема 2** (Факторисање полинома) *Нека су  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  нуле полинома  $P$ , где је*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

*Тада је*

$$P(x) = a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n).$$

**Доказ.** Тврђење следи из претходне теореме и чињенице да је  $P(x)$  дељив са  $x - \alpha$  ако и само ако је  $P(\alpha) = 0$ . ◀

Међу нулама полинома може бити и једнаких. Ако су  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  све различите нуле полинома  $P$ , тада је

$$P(x) = a_n (x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_m)^{k_m},$$

где је  $k_1 + \dots + k_m = n$ . Број  $k_i$  је ред нуле  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ).

**Теорема 3** *Ако је број  $\alpha + \beta i$  нула полинома  $P$  са реалним коефицијентима, онда је и број  $\alpha - \beta i$  нула тог полинома.*

**Доказ.** Нека је  $z = \alpha + \beta i$ . Тада је  $P(\bar{z}) = \overline{P(z)} = 0$ . ◀

Претпоставимо да су  $z_1 = \alpha + \beta i$  и  $z_2 = \alpha - \beta i$  нуле полинома  $P$ . Како је

$$(x - z_1)(x - z_2) = (x - \alpha)^2 + \beta^2 = x^2 + bx + c, \quad b^2 - 4c < 0,$$

из претходне две теореме следи да је полином  $P$  дељив са  $x^2 + bx + c$ . Према томе, полином  $P$  може да се представи у облику

$$P(x) = a_n (x - \alpha_1)^{k_1} \dots (x - \alpha_p)^{k_p} (x^2 + b_1 x + c_1)^{l_1} \dots (x^2 + b_q x + c_q)^{l_q},$$

где је  $k_1 + \dots + k_p + 2l_1 + \dots + 2l_q = n$  и  $b_i^2 - 4c_i < 0$  за  $i = 1, \dots, q$ .

## 1.2 Нека својства рационалних функција

**Дефиниција 1** *Нека су  $P$  и  $Q$  полиноми.*

*1. Рационална функција реалне променљиве је функција  $R$  дефинисана са*

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

*где  $P$  и  $Q$  немају заједничких нула.*

2. Ако је  $st(P) < st(Q)$  функција  $R$  је права рационална функција.

**Теорема 4** (Разлагање рационалне функције) *Свака рационална функција је збир полинома и праве рационалне функције.*

**Доказ.** Нека је  $st(P) > st(Q)$ . Дељењем полинома  $P$  полиномом  $Q$  добијамо

$$P(x) = S(x)Q(x) + P_1(x),$$

где је  $st(P_1) < st(Q)$ . Према томе,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}. \quad \blacktriangleleft$$

Једноставни примери рационалних функција су функције дефинисане простим разломцима.

**Дефиниција 2** *Разломци облика  $\frac{A}{(x-a)^k}$  и  $\frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^k}$ , где је  $b^2 - 4c < 0$  називају се прости или парцијални разломци*

**Теорема 5** (Разлагање праве рационалне функције) *Свака права рационална функција је збир парцијалних разломака.*

**Доказ.** (*Идеја*)

За реалну нулу  $a$  реда  $k$  полинома  $Q$  треба показати да важи

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-s}Q_1(x)},$$

где је  $A$  константа,  $Q_1$  количник при дељењу  $Q$  са  $(x-a)^k$  и  $1 \leq s \leq k$ .

Слично важи и ако је  $(x^2+bx+c)^k$ , где је  $b^2 - 4c < 0$ , фактор полинома  $Q$ .  $\blacktriangleleft$

Полином  $Q$  може да има факторе облика  $(x-a)^k$  или  $(x^2+bx+c)^k$ , где је  $x^2+bx+c$  несводљив трином, односно  $b^2 - 4c < 0$ . Приликом растављања праве рационалне функције на просте разломке важи следеће:

1. Фактору облика  $(x-a)^k$  одговара збир простих разломака

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k},$$

где су  $A_1, \dots, A_k$  реални бројеви.

2. Фактору облика  $(x^2+bx+c)^k$  одговара збир простих разломака

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{B_kx+C_k}{(x^2+bx+c)^k},$$

где су  $B_1, \dots, B_k, C_1, \dots, C_k$  реални бројеви.



Бројеви  $A_i, B_i, C_i$  се добијају методом неодређених коефицијената или на неки други начин.

### 1.3 Интеграција простих разломака

1.  $\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C.$

2. За  $k > 1$  је

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \int (x-a)^{-k} dx = -\frac{1}{k-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C.$$

3. За  $k > 1$  и  $a \neq 0$  је

$$\int \frac{xdx}{(x^2+a^2)^k} = -\frac{1}{2(k-1)(x^2+a^2)^{k-1}} + C.$$

4. Нека је  $I = \int \frac{dx}{x^2+bx+c}$  и  $J = \int \frac{xdx}{x^2+bx+c}$ , где је  $b^2-4c < 0$ . Како је

$$x^2+bx+c = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4}, \quad c - \frac{b^2}{4} > 0,$$

то је

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\sqrt{c-b^2/4}} \arctan \frac{x+b/2}{\sqrt{c-b^2/4}} + C \\ &= \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}} \arctan \frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}} + C, \end{aligned}$$

а из једнакости

$$\frac{xdx}{x^2+bx+c} = \frac{1}{2} \frac{d(x^2+bx+c)}{x^2+bx+c} - \frac{b}{2} \frac{dx}{x^2+bx+c}$$

слиди да је

$$J = \frac{1}{2} \ln(x^2+bx+c) - \frac{b}{2} I.$$

5. Нека је  $I_k = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^k}$  за  $k > 1$  и  $a \neq 0$ . Како је

$$\frac{1}{(x^2+a^2)^k} = \frac{1}{a^2} \frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^k},$$

то је

$$I_k = \frac{1}{a^2} I_{k-1} - \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^k}.$$

Парцијалном интеграцијом, са  $u = x$  и  $dv = \frac{xdx}{(x^2 + a^2)^k}$  добијамо да је

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^k} = -\frac{x}{2(k-1)(x^2 + a^2)^{k-1}} + \frac{1}{2(k-1)} I_{k-1}.$$

Према томе,

$$I_k = \frac{x}{2a^2(k-1)(x^2 + a^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2a^2(k-1)} I_{k-1}.$$

Специјално,

$$I_2 = \frac{x}{2a^2(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^2} I_1,$$

где је

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$$

На пример,

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2} = \frac{x}{4(x^2 + 2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

6. Интеграли  $\int \frac{xdx}{(x^2 + bx + c)^k}$  и  $\int \frac{dx}{(x^2 + bx + c)^k}$ , за  $k > 1$  и  $b^2 - 4c < 0$ , сменом  $x + b/2 = t$  свODE се на интеграле из 3. и 5.

## 1.4 Интеграција рационалних функција

На основу претходног следи да се интеграција рационалне функције своди на интеграцију полинома и простих разломака.

## 2.2 Рационалне функције синуса и косинуса

Ако је  $f(x) = R(\sin x, \cos x)$ , где је  $R(u, v)$  рационална функција аргумената  $u$  и  $v$ , тада се сменом  $\tan \frac{x}{2} = t$  интеграција функције  $f$  своди на интеграцију рационалних функција. Из једнакости

$$x = 2 \arctan t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

следи да је

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Поред ове, универзалне смене, у специјалним случајевима рационалне функције синуса и косинуса могу се користити и друге смене.

1. Ако је  $R(u, -v) = -R(u, v)$ , тада је функција  $\frac{R(u, v)}{v}$  парна по  $v$ , што значи да садржи само парне степене аргумента  $v$ . Како  $\cos^2 x, \cos^4 x, \dots$  могу да се изразе помоћу степена од  $\sin x$ , то је

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{R}{\cos x} \cos x = R_1(\sin x) \cos x.$$

Сменом  $\sin x = t$  добија се

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R_1(\sin x) \cos x dx = \int R_1(t) dt.$$

2. Слично, у случају  $R(-u, v) = -R(u, v)$  имамо да је

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R_2(\cos x) \sin x dx = -R_2(t) dt,$$

где је  $t = \cos x$ .

3. Ако је  $R(-u, -v) = R(u, v)$ , тада сменом  $\tan x = t$  имамо да је

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R_3(\tan x) dx = \int \frac{R_3(t)}{1+t^2} dt.$$

### 3 Интеграција неких ирационалних функција

#### 3.1 Функције облика $R(x, \sqrt{ax+b})$

Сменом  $\sqrt{ax+b} = t$  имамо да је  $x = \frac{1}{a}(t^2 - b)$  и  $dx = \frac{2}{a}t dt$ , па је

$$\int R(x, \sqrt{ax+b}) dx = \int R_1(t) dt.$$

#### 3.2 Функције облика $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$

Сменом  $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$  имамо да је  $x = \frac{b - dt^n}{ct^n - a}$ , па је

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int R_2(t) dt.$$

### 3.3 Функције облика $R(x, x^{m/n}, \dots, x^{r/s})$

Сменом  $x = t^k$ , где је  $k$  најмањи заједнички садржалац бројева  $n, \dots, s$  добијамо

$$x^{m/n} = (t^k)^{m/n} = (t^{k/n})^m = t^{pm}, \dots, x^{r/s} = t^{qr},$$

па је

$$\int R(x, x^{m/n}, \dots, x^{r/s}) dx = \int R_3(t) dt.$$

### 3.4 Функције облика $R(x, \sqrt[n_1]{ax+b}, \sqrt[n_2]{ax+b}, \dots, \sqrt[n_k]{ax+b})$

Сменом  $ax+b = t^n$ , где је  $n$  најмањи заједнички садржалац бројева  $n_1, n_2, \dots, n_k$ , своди се на интеграл рационалне функције.

### 3.5 Функције облика $R\left(x, \sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$

Сменом  $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$ , где је  $n$  најмањи заједнички садржалац бројева  $n_1, n_2, \dots, n_k$ , своди се на интеграл рационалне функције.

### 3.6 Функције облика $R(x, \sqrt{1-x^2})$

Сменом  $x = \sin t$  имамо да је

$$\int R(x, \sqrt{1-x^2}) dx = \int R(\sin t, \cos t) \cos t dt.$$

Може такође и смена  $x = \cos t$  или  $x = \tanh t$ .

### 3.7 Функције облика $R(x, \sqrt{x^2-1})$

Сменом  $x = \cosh t$ , при чему је  $\sqrt{x^2-1} = \sinh t$  и  $dx = \sinh t dt$  имамо да је

$$\int R(x, \sqrt{x^2-1}) dx = \int R(\cosh t, \sinh t) \sinh t dt.$$

Могу се користити и смене  $x = \frac{1}{\sin t}$  и  $x = \frac{1}{\cos t}$ .

### 3.8 Функције облика $R(x, \sqrt{1+x^2})$

Сменом  $x = \sinh t$ , при чему је  $\sqrt{1+x^2} = \cosh t$  и  $dx = \cosh t dt$ , имамо да је

$$\int R(x, \sqrt{1+x^2}) dx = \int R(\sinh t, \cosh t) \sinh t dt.$$

Може и смена  $x = \tan t$ , при чему је

$$\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\cos t}, \quad dx = \frac{dt}{\cos^2 t}.$$

### 3.9 Функције облика $\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ и $\frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Нека је

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad J = \int \frac{xdx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Свођењем квадратног тринома  $ax^2+bx+c$  на канонски облик интеграл  $I$  се своди на таблични интеграл. За  $a > 0$  и  $b^2 - 4ac \neq 0$  интеграл  $I$  се своди на један од интеграла  $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+\alpha^2}}$  и  $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\alpha^2}}$ , а за  $a < 0$  и  $b^2 - 4ac > 0$  интеграл  $I$  се своди на интеграл  $\int \frac{dt}{\sqrt{\alpha^2-t^2}}$ .

Како је

$$\frac{xdx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{2a} \frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} - \frac{b}{2a} \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

то је

$$J = \frac{1}{a} \sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{b}{2a} I.$$

### 3.10 Функције облика $R(\sqrt{ax^2+bx+c})$

Свођењем квадратног тринома  $ax^2+bx+c$  на канонски облик интеграл се своди на интеграл једне од функција  $R(\sqrt{t^2+\alpha^2})$ ,  $R(\sqrt{t^2-\alpha^2})$  и  $R(\sqrt{\alpha^2-t^2})$ . На пример,  $\int \sqrt{ax^2+bx+c} dx$  се своди на један од интеграла  $\int \sqrt{t^2+\alpha^2} dt$ ,  $\int \sqrt{t^2-\alpha^2} dt$  и  $\int \sqrt{\alpha^2-t^2} dt$ .

### 3.11 Функције облика $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$

Поред наведених специјалних случајева и свођења, као у претходном случају, на интеграле функција  $R(t, \sqrt{t^2+\alpha^2})$ ,  $R(t, \sqrt{t^2-\alpha^2})$  и  $R(t, \sqrt{\alpha^2-t^2})$ , постоје и Ојлерове смене које могу да се користе у општем случају.

#### *Прва Ојлерова смена*

За  $a > 0$  сменом

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t + x\sqrt{a}$$

добија се

$$x = \frac{t^2 - c}{b - 2t\sqrt{a}}.$$

#### *Друга Ојлерова смена*

За  $c > 0$  сменом

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}$$

добија се

$$x = \frac{2t\sqrt{c} - b}{a - t^2}.$$

### Трећа Ојлерова смена

Ако трином  $ax^2 + bx + c$  има реалне и различите нуле  $\alpha$  и  $\beta$ , тада сменом

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)t$$

добијамо

$$x = \frac{a\beta - \alpha t^2}{a - t^2}.$$

## M2 - 11. ПРЕДАВАЊЕ

Драган Ђорић

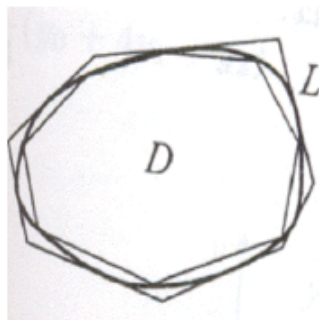
6.5.2009.

### НЕКЕ ПРИМЕНЕ ИНТЕГРАЛА

1. Израчунавање површине равних фигура (квадратура)
2. Израчунавање дужине лука криве (ректификација)
3. Израчунавање запремине тела (кубатура)
4. Израчунавање површине ротационе површи (компланација)

## 1 Квадратура

### Површина равне фигуре



Равна фигура  $F$  је део равни ограничен затвореном простом кривом.

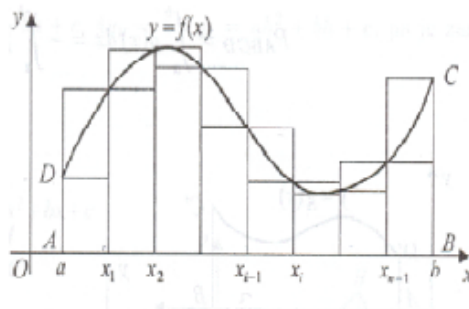
Нека је  $p$  супремум површина свих уписаних, а  $P$  инфимум површина свих описаних многоуглова фигуре  $F$ . Јасно је да  $p$  и  $P$  постоје и да је  $p \leq P$ . Ако је  $p = P$  кажемо да је фигура  $F$  мерљива и да је њена површина једнака  $P$ .



### Површина криволинијског трапеза

Ако је  $F$  криволинијски траpez ограничен кривом  $y = f(x)$  ( $x \in [a, b]$ ) и правама  $x = a$ ,  $x = b$  и  $y = 0$ , тада је

$$p = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i, \quad P = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i.$$



Уз претпоставку да је  $f$  непрекидна на  $[a, b]$  (или само  $R$ -интеграбилна) имамо да је

$$p = P = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx.$$

### Фигура између кривих

Површина фигуре ограничене правама  $x = a$ ,  $x = b$ , кривом  $y = f(x)$  и кривом  $y = g(x)$ , при чему је  $g(x) \leq f(x)$  за  $x \in [a, b]$ , је

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

## 2 Ректификација

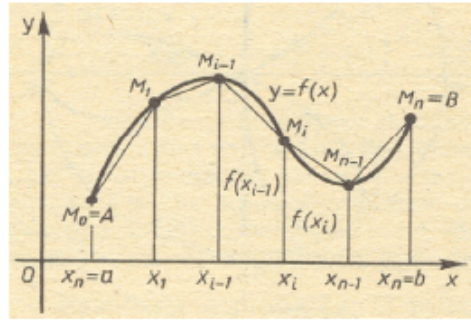
Нека је  $AB$  лук прости криве одређене функцијом  $f$  на сегменту  $[a, b]$ . Да ли постоји и ако постоји колика је дужина лука  $AB$ ?

Тачке  $A_i(x_i, f(x_i))$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) одређују изломљену линију чија дужина  $l$  зависи од поделе  $\Pi$ . При томе је

$$l_i = \overline{A_{i-1}A_i} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta f(x_i))^2} = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i,$$

за  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $A_0 = A$ ,  $A_n = B$  и

$$l(\Pi) = \sum_{i=1}^n l_i.$$



**Дефиниција 1** Ако постоји  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} l(\Pi) = l$ , тада  $l$  зовемо дужина лука  $AB$ .

За  $l$  се каже и да је **дужина лука криве**  $y = f(x)$  на сегменту  $[a, b]$ .

**Теорема 1** За  $f \in C^{(1)}[a, b]$  постоји дужина лука (крива је ректификабилна), при чему је

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

**Доказ.** Из претпоставке за  $f$  следи да је функција  $g = \sqrt{1 + f'^2}$  непрекида, а то значи и интеграбилна. Како је  $l(\Pi) = \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i$ , то је

$$l = \lim_{\lambda \rightarrow 0} l(\Pi) = \int_a^b g(x) dx = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \blacksquare$$

### Диференцијал дужине лука

Ако је  $y = f(x)$  и  $l(x) = \int_a^x \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$ , тада је

$$\frac{dl(x)}{dx} = l'(x) = \sqrt{1 + f'^2(x)} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx},$$

па је  $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ . Према томе,  $dl$  је одсечак тангенте који одговара прираштају  $\Delta x$ , односно  $dx$ .

Формула за дужину лука може да се напише и у облику

$$l = \int_a^b dl.$$

### Крива је дата параметарски

Нека је лук дат са  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  за  $t \in [t_1, t_2]$ .

**Теорема 2** Ако су  $\varphi'$  и  $\psi'$  непрекидне функција на  $[t_1, t_2]$  и ако је  $\varphi$  растућа (или опадајућа) на истом сегменту, тада је

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$

**Доказ.** Тврђење следи из претходне теореме, једнакости

$$\sqrt{1 + f'^2(x)} \, dx = \sqrt{1 + \frac{\psi'^2(t)}{\varphi'^2(t)}} \, \varphi'(t) dt = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} \, dt$$

и теореме о смени променљиве у одређеном интегралу. ■

*Крива је дата у поларним координатама*

Нека је лук дат са  $\rho = \rho(\theta)$  за  $\theta \in [\alpha, \beta]$ .

**Теорема 3** *Ако је  $\rho'$  непрекидна функција, онда је*

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \, d\theta.$$

**Доказ.** Како је  $x = \rho(\theta) \cos \theta$  и  $y = \rho(\theta) \sin \theta$ , то је

$$x'(\theta) = \rho'(\theta) \cos \theta - \rho(\theta) \sin \theta,$$

$$y'(\theta) = \rho'(\theta) \sin \theta + \rho(\theta) \cos \theta.$$

Из ових једнакости добијамо да је

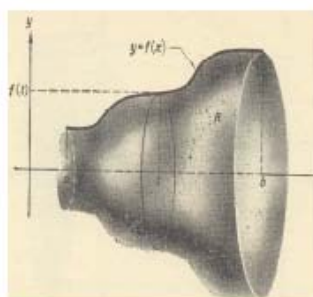
$$x'^2(\theta) + y'^2(\theta) = \rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta),$$

па тврђење следи из претходне теореме. ■

## 3 Кубатура

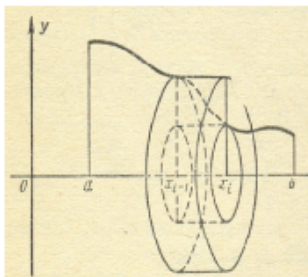
### 3.1 Ротационо тело

Нека је  $T$  тело образовано ротацијом око  $x$  осе криволинијског трапеза ограниченог кривом  $y = f(x)$  ( $x \in [a, b]$ ) и правама  $x = a$ ,  $x = b$  и  $y = 0$ .



Ако је  $v(\Pi)$  запремина уније ваљака са висинама  $[x_{i-1}, x_i]$  и полупречницима дужине  $m_i$ , а  $V(\Pi)$  запремина ваљака са висинама  $[x_{i-1}, x_i]$  и полупречницима дужине  $M_i$ , тада је

$$v(\Pi) = \sum_{i=1}^n m_i^2 \pi \Delta x_i, \quad V(\Pi) = \sum_{i=1}^n M_i^2 \pi \Delta x_i.$$



**Дефиниција 2** *Ако је*

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} v(\Pi) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} V(\Pi) = V,$$

*тада за  $V$  кажемо да је запремина тела  $T$ .*

За тело  $T$  кажемо и да је *ротационо тело*.

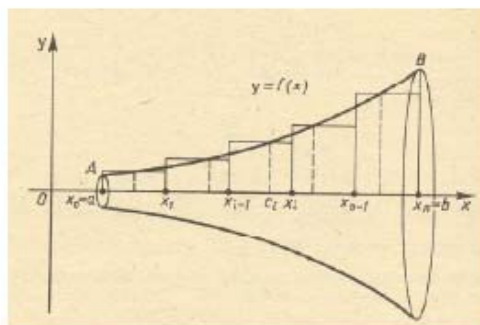
**Теорема 4** *Ако је  $f : [a, b] \rightarrow R$  непрекидна функција, тада запремина тела  $T$  постоји и дата је са*

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

**Доказ.** Како је функција  $g = \pi f^2$  непрекидна то је  $g \in R[a, b]$  и

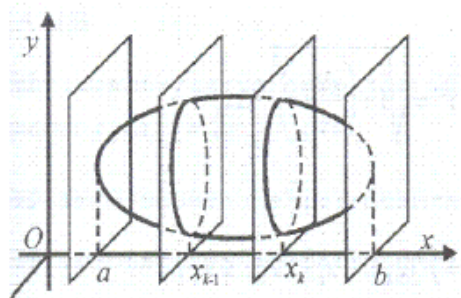
$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f^2(\xi_i) \pi \Delta x_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b g(x) dx. \blacksquare$$

Ако на почетку претпоставимо да је  $f : [a, b] \rightarrow R$  непрекидна функција, запремину можемо да дефинишемо као граничну запремину (при  $\lambda \rightarrow 0$ ) уније ваљака са основама  $[x_{i-1}, x_i]$  и полупречницима дужине  $f(\xi_i)$ .



### 3.2 Произвољно тело

Нека је дато тело  $T$  које се налази између равни  $x = a$  и  $x = b$  и нека је  $P(x)$  површина пресека тог тела и равни која садржи  $x$  и која је нормална на осу  $x$ .



Ако је  $P : [a, b] \rightarrow R$  непрекидна (или  $R$ -интеграбилна) функција, тада постоји

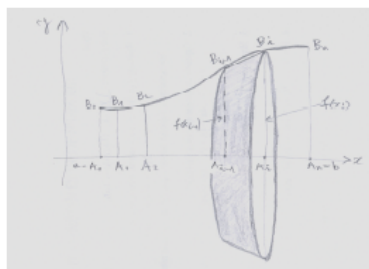
$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i) \Delta x_i = V.$$

Како је  $P(\xi_i) \Delta x_i$  запремина ваљка чија је висина  $[x_{i-1}, x_i]$  а површина основе  $P(\xi_i)$ , можемо за запремину тела  $T$  узети управо  $V$ , при чему је

$$V = \int_a^b P(x) dx.$$

### 4 Компланација

Претпоставимо да треба одредити површину омотача тела  $T$  насталог ротацијом око  $x$  осе криволонијског трапеза одређеног функцијом  $f$  на одсечку  $[a, b]$ . Тачке  $A_i(x_i, 0)$ ,  $B_i(x_i, f(x_i))$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) одређују  $n$  трапеза.



Ротацијом трапеза  $A_{i-1}A_iB_iB_{i-1}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) настаје зарубљена купа чији омотач има површину  $P_i$  дату са (познато из елементарне математике!)

$$P_i = (f(x_{i-1}) + f(x_i))\pi l_i, \quad l_i = \overline{B_{i-1}B_i}.$$

Нека је  $P(\Pi) = \sum_{i=1}^n P_i$ .

**Дефиниција 3** Ако постоји  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} P(\Pi) = P$ , тада за  $P$  кажемо да је површина омотача ротационог тела  $T$ .

За  $P$  се каже и да је *површина ротационе површи*.

**Теорема 5** За  $f \in C^{(1)}[a, b]$  површина омотача тела  $T$  постоји, при чему је

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

**Доказ.** Како је

$$l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta f(x_i))^2} = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i$$

за неко  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  и како постоји  $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$  за које је  $f(x_{i-1}) + f(x_i) = 2f(\eta_i)$ , то је

$$P_i = 2\pi f(\eta_i) \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}.$$

Ако је  $g = 2\pi f \sqrt{1 + f'^2}$ , онда је

$$P(\Pi) = 2\pi \sum_{i=1}^n f(\eta_i) \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i = \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i + Q(\Pi).$$

Из претпоставке  $f \in C^{(1)}[a, b]$  следи  $g \in C[a, b]$ , па први сабирак у изразу за  $P(\Pi)$  има граничну вредност кад  $\lambda \rightarrow 0$  (интегрална сума за  $g$ ). Може се показати да је  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} Q(\Pi) = 0$ . Према томе,

$$P = \lim_{\lambda \rightarrow 0} P(\Pi) = \int_a^b g(x) dx = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \blacksquare$$

Ако је  $dl$  диференцијал дужине лука, онда је

$$P = 2\pi \int_a^b f dl.$$

## НЕСВОЈСТВЕНИ ИНТЕГРАЛ

1. Интеграл на бесконачном интервалу
2. Интеграл неограничене функције

## 5 Несвојствени интеграл

За неке функције може да се дефинише и интеграл у којем једна или обе границе нису коначне. Исто тако постоје неограничене функције на коначном интервалу за које може да се дефинише интеграл. И у једном и у другом случају такве интеграле заведемо уопштеним или несвојственим интегралима.



## 5.1 Интеграл на бесконачном интервалу

**Дефиниција 4** Нека је функција  $f$  дефинисана на  $[a, +\infty)$  и интеграбилна на  $[a, A]$  за сваки број  $A > a$ . Ако постоји  $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x)dx$ , он се назива несвојственим интегралом функције  $f$  на  $[a, \infty)$  и означава се са  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ .

Ако је  $F$  примитивна функција за  $f$  и ако са  $F(+\infty)$  означимо  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ , тада је

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a) = F(x) \Big|_a^{+\infty},$$

што се може назвати уопштеном Њути-Лајбницовом формулом.

Каже се још да тај несвојствени интеграл конвергира. Ако горњи лимес не постоји, не постоји ни несвојствени интеграл.

Слично се дефинише и несвојствени интеграл  $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ , а несвојствени интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  постоји ако постоје претходна два, при чему је

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

### Критеријуми конвергенције

**Теорема 6** Нека је  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  за  $x \geq a$ . Тада важи:

1. Ако  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  конвергира, тада и  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  конвергира.
2. Ако  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  дивергира тада и  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  дивергира.

**Доказ.** Тврђење следи из неједнакости

$$\int_a^A f(x)dx \leq \int_a^A g(x)dx$$

и дефиниције несвојственог интеграла. ■

**Теорема 7** Ако  $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$  конвергира, тада и  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  конвергира.

**Доказ.** Тврђење следи из неједнакости

$$0 \leq f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)|$$

и претходне теореме. ■

**Теорема 8** Ако је  $f(x) \sim g(x)$  када  $x \rightarrow +\infty$ , тада су  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  и  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  еквивалентни (оба конвергирају или оба дивергирају)

## 5.2 Интеграл неограничене функције

Претпоставимо да је функција  $f$  неограничена када  $x \rightarrow b_-$ .

**Дефиниција 5** Нека је  $f$  дефинисана на  $[a, b)$  и интеграбилна на  $[a, \beta] \subset [a, b)$ .

Ако постоји  $\lim_{\beta \rightarrow b_-} \int_a^\beta f(x)dx$ , он се назива несвојственим интегралом функције  $f$  на  $[a, b)$  и означава са  $\int_a^b f(x)dx$ .

Ако је  $F$  примитивна функција за  $f$  и ако са  $F(b_-)$  означимо  $\lim_{x \rightarrow b_-} F(x)$ , тада је

$$\int_a^b f(x)dx = F(b_-) - F(a),$$

што је такође уопштена Њутн Лајбницова формула.

Каже се још да несвојствени интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  конвергира. Ако лимес не постоји, не постоји ни несвојствени интеграл.

Слично се дефинише и несвојствени интеграл у случају да је  $f$  неограничена када  $x \rightarrow a_+$  или кад је неограничена у оба краја.

Ако постоје несвојствени интеграл  $\int_a^c f(x)dx$  и  $\int_c^b f(x)dx$ , постоји и несвојствени интеграл  $\int_a^b f(x)dx$ , при чему је

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

### Критеријуми конвергенције

Важе аналогна тврђења као за несвојствени интеграл на неограниченом интервалу.

## М2 - 12. ПРЕДАВАЊЕ

Драган Ђорић

### ДВОЈНИ И ТРОЈНИ ИНТЕГРАЛИ

- Двојни интеграл
- Тројни интеграл
- Смене променљивих у двојном интегралу
- Смене променљивих у тројном интегралу
- Неке примене двојног интеграла
- Неке примене тројног интеграла

### ДВОЈНИ ИНТЕГРАЛ

- Дефиниција двојног интеграла
- Особине двојног интеграла
- Свођење двојног интеграла на двоструки

# 1 Дефиниција двојног интеграла

## 1.1 Мотив и ознаке

Нека је:

$D \subset R^2$  – област (отворена или затворена) која има површину (мерљива)

$d = \text{diam}(D)$  – дијаметар области  $D$  дефинисан као супремум свих растојања између двеју тачака у  $D$

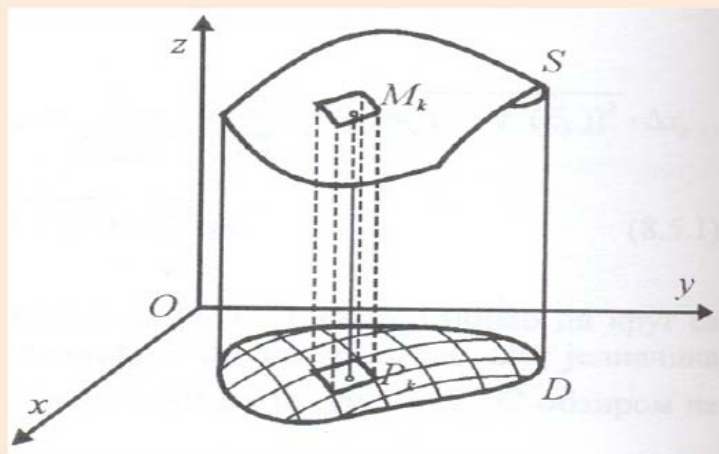
$\Pi = [D_1, D_2, \dots, D_n]$  – подела области  $D$ , при чему је  $D = \cup_{i=1}^n D_i$ , а  $D_i$  и  $D_j$  немају заједничких унутрашњих тачака за  $i \neq j$  и  $D_1, \dots, D_n$  су такође мерљиви делови (имају површину).

$\sigma_k$  – површина од  $D_k$  ( $k = 1, \dots, n$ )

$f : D \rightarrow R^+$  (слика)

$m_i, M_i$  такви да  $m_i \leq f(x, y) \leq M_i$  за  $(x, y) \in D_i$

$$\underline{S}_n(\Pi) = \sum_{i=1}^n m_i \sigma_i, \quad \overline{S}_n(\Pi) = \sum_{i=1}^n M_i \sigma_i$$



Ако је  $V$  запремина цилиндричног тела ограниченог с доње стране облашћу  $D$ , с горње стране графиком функције  $f$ , очигледно је

$$\underline{S}_n \leq V \leq \overline{S}_n.$$

## 1.2 Дефиниција

Нека  $f : D \rightarrow R$  и нека је:

$\lambda(\Pi)$  – параметар поделе области  $D$  дат са

$\lambda = \max\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ , где је  $d_i = \text{diam}(D_i)$  за  $i = 1, 2, \dots, n$

$S_n(f, \Pi, A_i)$  – интегрална сума функције  $f$  дата са

$$S_n(f, \Pi, A_i) = \sum_{i=1}^n f(A_i)\sigma_i, \quad A_i \in D_i$$

Ако избор тачака није битан или је фиксиран, интегралну суму можемо записати краће са  $S_n(f, \Pi)$ . Понекад, ради краћег записа, користимо и ознаку  $S_n$ .

**Дефиниција 1** Број  $I$  је *двојни интеграл* функције  $f$  на области  $D$  ако за свако  $\varepsilon > 0$  постоји  $\delta(\varepsilon) > 0$  тако да за сваку поделу  $\Pi$  за коју је  $\lambda(\Pi) < \delta$  и сваки избор тачака  $M_i \in D_i$  важи

$$|S_n(f, \Pi) - I| < \varepsilon.$$

Функција  $f$  је *интегранд*, а  $D$  *област интеграције*.

Каже се још и да је  $I$  гранична вредност интегралне суме  $S_n$  кад  $\lambda(\Pi) \rightarrow 0$  и означава са

$$I = \lim_{\lambda(\Pi) \rightarrow 0} S_n(f, \Pi) = \iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_D f(M) d\sigma.$$

За функцију  $f$  за коју постоји двојни интеграл над  $D$  кажемо да је  $\mathcal{R}$  (Риман) интеграбилна на  $D$ . Скуп свих таквих функција означавамо са  $\mathcal{R}(D)$ .

## 1.3 Класе интеграбилних функција

Потребан услов за интеграбилност функције је њена ограниченост.

**Теорема 1** Ако  $f \in \mathcal{R}(D)$ , онда је  $f$  ограничена на  $D$ .

Нека је  $f$  ограничена функција на  $D$  и нека је

$$m_i = \inf_{P \in D_i} f(P), \quad M_i = \sup_{P \in D_i} f(P), \quad i = 1, \dots, n.$$

**Теорема 2** (Веза са почетним мотивом) Ограничена функција  $f$  је интеграбилна на  $D$  ако и само ако за свако  $\varepsilon > 0$  постоји подела  $\Pi$  таква да је

$$\overline{S}_n - \underline{S}_n < \varepsilon.$$

Ако је  $D$  затворена област, довољан услов за интеграбилност функције  $f$  је њена непрекидност.

**Теорема 3** Ако је функција  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  непрекидна на затвореној области  $D$ , онда  $f \in \mathcal{R}(D)$ .

Као и код одређеног интеграла постоје и прекидне функције које су  $\mathcal{R}$  интеграбилне.

## 2 Особине двојног интеграла

За двојни интеграл важе тврђења слична тврђењима за одређени интеграл.

**Теорема 4** (Линеарност) Ако  $f, g \in \mathcal{R}(D)$  и  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , тада  $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(D)$ , при чему је

$$\iint_D (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) d\sigma = \alpha \iint_D f(x, y) d\sigma + \beta \iint_D g(x, y) d\sigma.$$

**Теорема 5** (Адитивност) Ако  $f \in \mathcal{R}(D)$  и ако је  $D = A \cup B$ , при чему  $A$  и  $B$  немају заједничких унутрашњих тачака, тада је

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_A f(x, y) d\sigma + \iint_B f(x, y) d\sigma.$$

**Теорема 6** 1. Ако  $f \in \mathcal{R}(D)$  и  $f(P) \geq 0$ , тада  $\iint_D f(P) d\sigma \geq 0$ .

2. Ако  $f, g \in \mathcal{R}(D)$  и  $f(P) \leq g(P)$  за  $P \in D$ , тада је

$$\iint_D f(P) d\sigma \leq \iint_D g(P) d\sigma.$$



Доказ. 1. Из  $f(P) \geq 0$  следи да је  $S_n(f, \Pi) \geq 0$  за сваку поделу  $\Pi$ , па и у случају када  $\lambda(\Pi) \rightarrow 0$ .

2. Како је  $g(P) - f(P) \geq 0$ , из 1. следи

$$\iint_D g(P) d\sigma - \iint_D f(P) d\sigma = \iint_D (g(P) - f(P)) d\sigma \geq 0. \quad \blacksquare$$

**Теорема 7** (Процена вредности двојног интеграла) *Ако  $f \in \mathcal{R}(D)$  и ако је  $m \leq f(P) \leq M$  за  $P \in D$ , тада*

$$m\sigma(D) \leq \iint_D f(P) d\sigma \leq M\sigma(D),$$

где је  $\sigma(D)$  површина области  $D$ .

Доказ. Како је  $f(P) \geq m$ , применом претходне теореме следи да је

$$\iint_D f(P) d\sigma \geq \iint_D m d\sigma = m \iint_D d\sigma = m\sigma(D).$$

Слично, из  $M \geq f(P)$  добијамо

$$\iint_D f(P) d\sigma \leq \iint_D M d\sigma = M \iint_D d\sigma = M\sigma(D). \quad \blacksquare$$

**Теорема 8** (Средња вредност двојног интеграла) *Ако је  $f$  непрекидна функција на затвореној области  $D$ , тада постоји унутрашња тачка  $Q$  области  $D$ , таква да је*

$$\iint_D f(P) d\sigma = f(Q) \cdot \sigma(D).$$

Доказ. Ако су  $m$  и  $M$  најмања и највећа вредност функције  $f$  на  $D$ , онда из претходне теореме следи да је

$$m \leq \frac{1}{\sigma(D)} \iint_D f(P) d\sigma \leq M.$$

Како постоји тачка  $Q$  унутрашњости области  $D$  (зашто?) таква да је

$$f(Q) = \frac{1}{\sigma(D)} \iint_D f(P) d\sigma,$$

то је

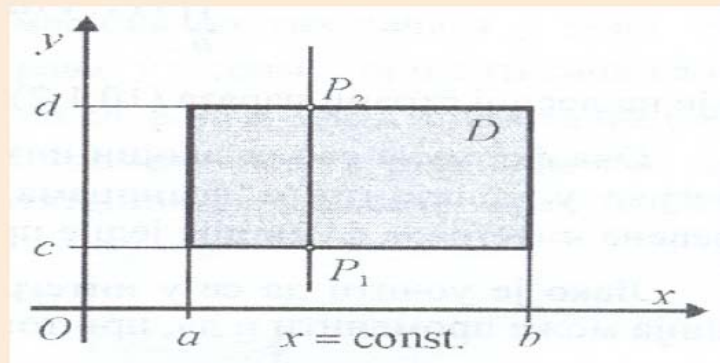
$$\iint_D f(P) d\sigma = f(Q) \cdot \sigma(D). \quad \blacksquare$$

## 3 Свођење двојног интеграла на двоструки

### 3.1 Правоугаона област

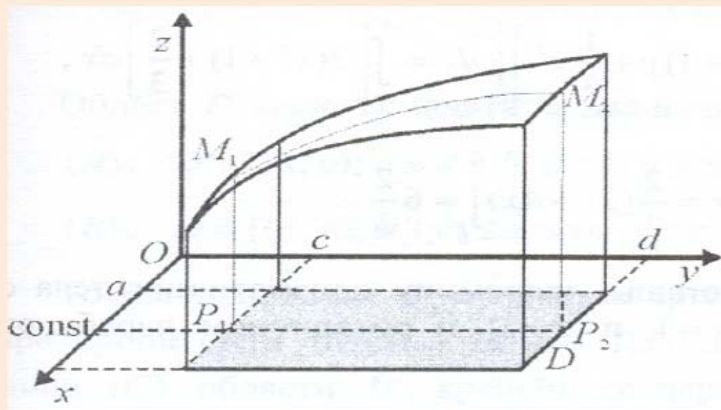
Нека је област интеграције правоугаоник,

$$D = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$



Имајући у виду геометријско тумачење двојног интеграла (запремина), видимо да би један начин интеграције могао бити дат са

$$I = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$



То се може и строго доказати полазећи од дефиниције двојног интеграла. Нека је

$$I(x) = \int_c^d f(x, y) dy, \quad J(y) = \int_a^b f(x, y) dx.$$

**Теорема 9** (Свођење двојног на двоструки интеграл) Ако  $f \in \mathcal{R}([a, b] \times [c, d])$ ,  $I \in \mathcal{R}[a, b]$  и  $J \in \mathcal{R}[c, d]$ , тада важи

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Поновљени једноструки интеграли у претходном тврђењу се пишу и у облику

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy, \quad \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

и зову *двоструки интеграли*. Ако је  $f(x, y) = g(x)h(y)$ , тада је

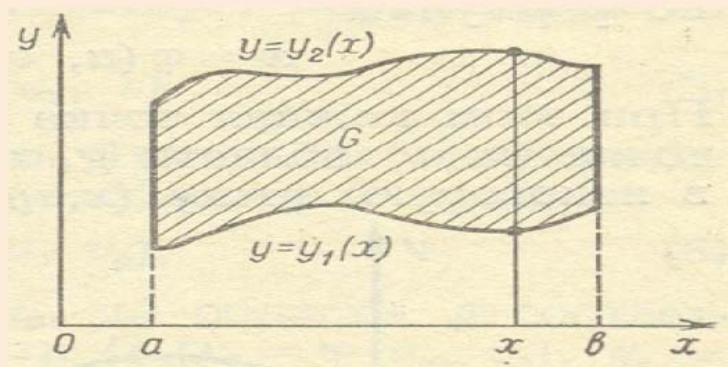
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b g(x) dx \cdot \int_c^d h(y) dy.$$

### 3.2 Трапезоидна област

Нека је област интеграције  $y$ -трапезоидна,

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y(x) \leq y_2(x)\},$$

где су  $y_1$  и  $y_2$  непрекидне функције на  $[a, b]$ .



**Теорема 10** Ако  $f \in \mathcal{R}(D)$  и ако за свако  $x \in [a, b]$  постоји интеграл

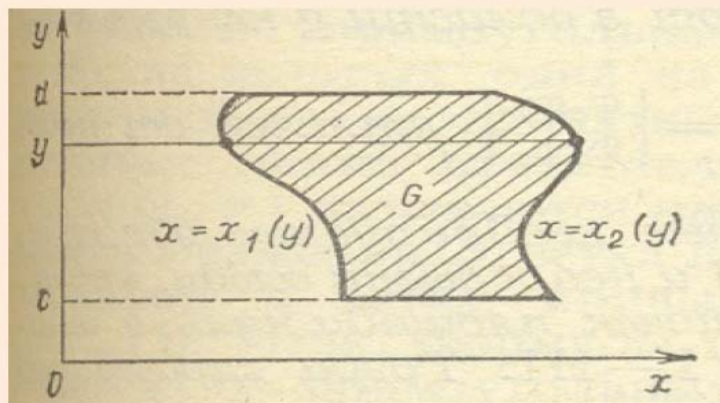
$$I(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy,$$

тада је

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b I(x) dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

Слично, за  $x$ -трапезоидну област  $D$  важи

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx.$$



### 3.3 Произвольна област

Ако област  $D$  може да се разложи на трапезоидне области, онда за израчунавање двојног интеграла дате функције на области  $D$  могу да се примене претходне формуле. На свакој трапезоидној области двојни интеграл се рачуна свођењем на двоструки, а затим се применом теореме о адитивности налази двојни интеграл на области  $D$ .

## ТРОЈНИ ИНТЕГРАЛ

- Дефиниција тројног интеграла
- Особине тројног интеграла
- Свођење тројног интеграла на троструки

## 4 Дефиниција тројног интеграла

Нека је:

$T \subset R^3$  – област (отворена или затворена) која има запремину (мерљива)

$d = \text{diam}(T)$  – дијаметар области  $T$  дефинисан као супремум свих растојања (у простору) између двеју тачака у  $T$

$\Pi = [T_1, T_2, \dots, T_n]$  – подела области  $T$ , при чему је  $T = \cup_{i=1}^n T_i$ , а  $T_i$  и  $T_j$  немају заједничких унутрашњих тачака за  $i \neq j$  и  $T_1, \dots, T_n$  су такође мерљиви делови (имају запремину).

$V_k$  – запремина од  $T_k$  ( $k = 1, \dots, n$ )

$\lambda(\Pi)$  – параметар поделе области  $T$  дат са

$\lambda = \max\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ , где је  $d_i = \text{diam}(T_i)$  за  $i = 1, 2, \dots, n$

$S_n(f, \Pi, M_i)$  – интегрална сума функције  $f$  дата са

$$S_n(f, \Pi, M_i) = \sum_{i=1}^n f(M_i)V_i, \quad M_i \in T_i$$

Када је јасно које су тачке  $M_i$  и која је подела  $\Pi$ , користе се и ознаке  $S_n(f, \Pi)$  и  $S_n$ .

**Дефиниција 2** Број  $I$  је **тројни интеграл** функције  $f$  на области  $T$  ако за свако  $\varepsilon > 0$  постоји  $\delta(\varepsilon) > 0$  тако да за сваку поделу  $\Pi$  за коју је  $\lambda(\Pi) < \delta$  и сваки избор тачака  $M_i \in T_i$  важи

$$|S_n(f, \Pi) - I| < \varepsilon.$$

**Функција  $f$  је интегранд, а  $T$  област интеграције.**

Каже се још и да је  $I$  гранична вредност интегралне суме  $S_n$  кад  $\lambda(\Pi) \rightarrow 0$  и означава са

$$I = \lim_{\lambda(\Pi) \rightarrow 0} S_n(f, \Pi) = \iiint_T f(P)dV = \iiint_T f(x, y, z)dx dy dz.$$

За функцију  $f$  за коју постоји тројни интеграл над  $T$  кажемо да је  $\mathcal{R}$  (Риман) интеграбилна на  $T$ . Скуп свих таквих функција означавамо са  $\mathcal{R}(T)$ .



Као и код двојног интеграла, могу се издвојити класе функција које имају тројни интеграл. На пример, важи следеће тврђење.

**Теорема 11** *Ако је функција  $f : T \rightarrow R$  непрекидна на затвореној области  $T \subset R^3$ , онда  $f \in \mathcal{R}(T)$ .*

## 5 Особине тројног интеграла

За тројни интеграл важе тврђења аналогна тврђењима за двојни интеграл.

**Теорема 12 (Линеарност)** *Ако  $f, g \in \mathcal{R}(T)$  и  $\alpha, \beta \in R$ , тада  $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(T)$ , при чему је*

$$\iiint_T (\alpha f(P) + \beta g(P)) dV = \alpha \iiint_T f(P) dV + \beta \iiint_T g(P) dV.$$

**Теорема 13 (Адитивност)** *Ако  $f \in \mathcal{R}(T)$  и ако је  $T = A \cup B$ , при чему  $A$  и  $B$  немају заједничких унутрашњих тачака, тада је*

$$\iiint_T f(P) dV = \iiint_A f(P) dV + \iiint_B f(P) dV.$$

**Теорема 14** 1. *Ако  $f \in \mathcal{R}(T)$  и  $f(P) \geq 0$ , тада  $\iiint_T f(P) dV \geq 0$ .*

2. *Ако  $f, g \in \mathcal{R}(T)$  и  $f(P) \leq g(P)$  за  $P \in T$ , тада је*

$$\iiint_T f(P) dV \leq \iiint_T g(P) dV.$$

Доказ. 1. Из  $f(P) \geq 0$  следи да је  $S_n(f, \Pi) \geq 0$  за сваку поделу  $\Pi$ , па и у случају када  $\lambda(\Pi) \rightarrow 0$ .

2. Како је  $g(P) - f(P) \geq 0$ , из 1. следи

$$\iiint_T g(P) dV - \iiint_T f(P) dV = \iiint_T (g(P) - f(P)) dV \geq 0. \quad \blacksquare$$



**Теорема 15** (Процена вредности тројног интеграла) Ако  $f \in \mathcal{R}(T)$  и ако је  $m \leq f(P) \leq M$  за  $P \in T$ , тада

$$m \cdot V(T) \leq \iiint_T f(P) dV \leq M \cdot V(T),$$

где је  $V(T)$  запремина области  $T$ .

Доказ. Како је  $f(P) \geq m$ , применом претходне теореме следи да је

$$\iiint_T f(P) dV \geq \iiint_T m dV = m \iiint_T dV = m \cdot V(T).$$

Слично, из  $M \geq f(P)$  добијамо

$$\iiint_T f(P) dV \leq \iiint_T M dV = M \iiint_T dV = M \cdot V(T). \quad \blacksquare$$

**Теорема 16** (Средња вредност тројног интеграла) Ако је  $f$  непрекидна функција на затвореној области  $T$ , тада постоји унутрашња тачка  $Q$  области  $T$ , таква да је

$$\iiint_T f(P) dV = f(Q) \cdot V(T).$$

Доказ. Ако су  $m$  и  $M$  најмања и највећа вредност функције  $f$  на  $T$ , онда из претходне теореме следи да је

$$m \leq \frac{1}{V(T)} \iiint_T f(P) dV \leq M.$$

Како постоји тачка  $Q$  унутрашњости области  $T$  (зашто?) таква да је

$$f(Q) = \frac{1}{V(T)} \iiint_T f(P) dV,$$

то је

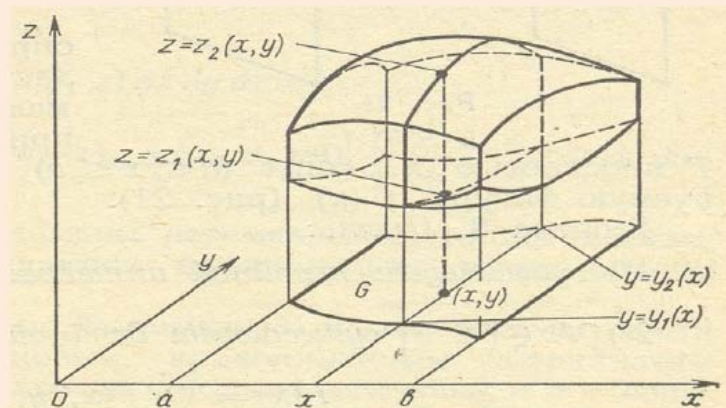
$$\iiint_T f(P) dV = f(Q) \cdot V(T). \quad \blacksquare$$

## 6 Свођење тројног интеграла на троструки

Нека је област интеграције  $T$  одређена са

$$T = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, z_1(x, y) \leq z(x, y) \leq z_2(x, y)\},$$

где су  $z_1$  и  $z_2$  непрекидне функције на  $D \subset \mathbb{R}^2$ .



**Теорема 17** Ако  $f \in \mathcal{R}(T)$  и ако за свако  $(x, y) \in D$  постоји интеграл

$$I(x, y) = \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz,$$

тада је

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D I(x, y) dx dy,$$

односно

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Ако је  $D$  трапезоидна област, на пример,

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, y_1 \leq y \leq y_2\},$$

тада је

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Према томе, ако се двојни интеграл своди на двоструки, тада се тројни интеграл за претпостављено тело  $T$  своди на троструки интеграл. Исто важи и ако област  $D$  може да се разложи на трапезоидне области, као и ако област интеграције тројног интеграла може да се разложи на области типа претпостављене области  $T$ .

## M2 - 13. ПРЕДАВАЊЕ

Драган Ђорић

### ДВОЈНИ И ТРОЈНИ ИНТЕГРАЛИ

- Смене променљивих у двојном интегралу
- Смене променљивих у тројном интегралу
- Примене двојног и тројног интеграла

### СМЕНЕ ПРОМЕНЉИВИХ У ДВОЈНОМ ИНТЕГРАЛУ

- Општи случај
- Поларне координате

#### 1 Општи случај смене у двојном интегралу

Дат је интеграл  $\iint_D f(x, y) dx dy$  и дата је област  $G \subset \mathbb{R}^2$  која се функцијама  $\varphi$  и  $\psi$  пресликава у област  $D$  на следећи начин:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v),$$

при чему  $(u, v) \in G$ .

Претпоставимо

1. да је пресликавање  $G \rightarrow D$  бијекција,
2. да функције  $\varphi, \psi$  имају у  $G$  непрекидне парцијалне изводе првог реда,
3. да је Јакобијан пресликавања

$$J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \psi'_u & \psi'_v \end{vmatrix}$$

различит од нуле у  $G$ .

Тада важи следеће тврђење које даје формулу за *смене променљивих* у двојном интегралу.

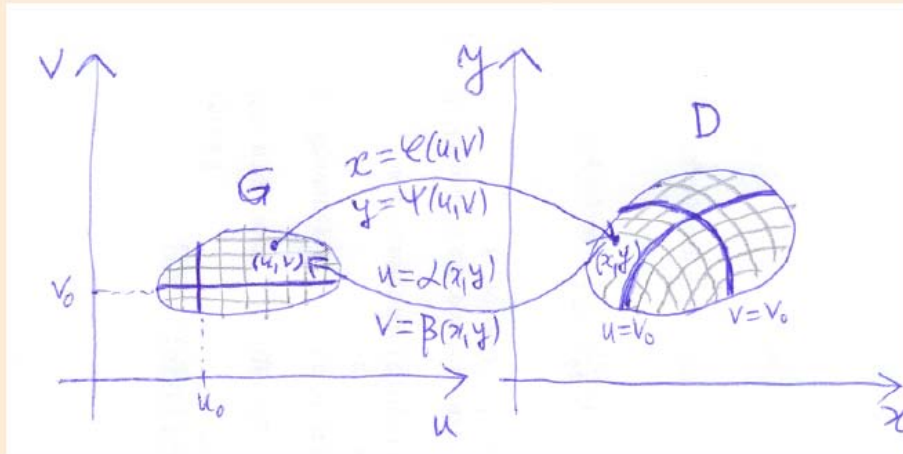
**Теорема 1** Ако  $f \in \mathcal{R}(D)$  и ако пресликавање  $G \rightarrow D$  испуњава услове 1.-3., тада је

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_G g(u, v) |J| du dv,$$

при чему је

$$g(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v)).$$

Оваквом сменом се са декартових координата  $(x, y)$  прелази на нове координате  $(u, v)$  (у општем случају, криволинијске).



При томе је

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}$$

и

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}.$$

Коефицијент деформације је  $|J|$ , а елемент површине је дат са

$$d\sigma = dx dy = |J| du dv.$$

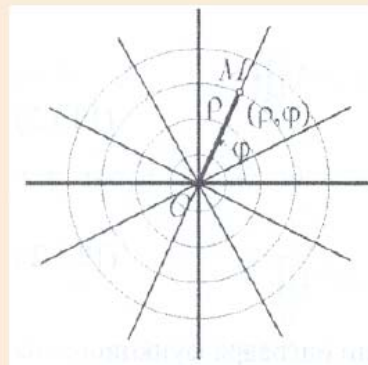
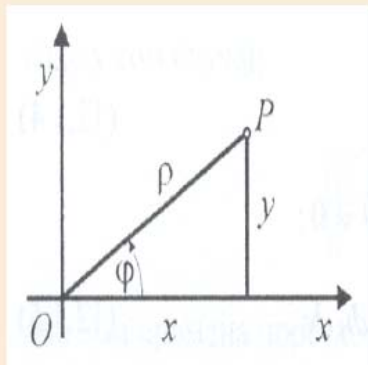
Некада је природније увести најпре смене  $u = \alpha(x, y)$ ,  $v = \beta(x, y)$ , а затим из њих одредити функције  $\varphi$  и  $\psi$  за смене  $x = \varphi(u, v)$ ,  $y = \psi(u, v)$ . При томе, Јакобијан може да се добије и из релације

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \cdot \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 1.$$

## 2 Поларне координате

Поларне координате су  $(\rho, \varphi)$ , при чему

$$\rho \in [0, \infty), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$



Везе декартових  $(x, y)$  и поларних координата су

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi.$$

Јакобијан је дат са

$$J = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho,$$

а коефицијент деформације је  $|J|$ .

Елемент површине је

$$d\sigma = \rho d\rho d\varphi.$$

Према томе,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_G g(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi,$$

при чему је

$$g(\rho, \varphi) = f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi).$$

Некада је згодно померити координатни почетак у тачку  $M(x_0, y_0)$ , односно увести смену

$$x = x_0 + \rho \cos \varphi, \quad y = y_0 + \rho \sin \varphi,$$

при чему се јакобијан не мења.

У случају елиптичких области погодне су *уопштене поларне координате*

$$x = a\rho \cos \varphi, \quad y = b\rho \sin \varphi,$$

при чему је  $J = ab\rho$ .

# СМЕНЕ ПРОМЕНЉИВИХ У ТРОЈНОМ ИНТЕГРАЛУ

- Општи случај
- Цилиндричне координате
- Сферне координате

## 3 Општи случај смене у тројном интегралу

Дат је интеграл  $\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$  и дата је област  $G \subset \mathbb{R}^3$  која се функцијама  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  пресликава у област  $D$  на следећи начин:

$$x = \alpha(u, v, w), \quad y = \beta(u, v, w), \quad z = \gamma(u, v, w),$$

при чему  $(u, v, w) \in G$ .

*Може ли дати интеграл да се израчуна преко области  $G$  и променљивих  $u, v, w$ ?*

Претпоставимо

1. да је пресликавање  $G \rightarrow D$  бијекција,
2. да функције  $\alpha, \beta, \gamma$  имају у  $G$  непрекидне парцијалне изводе првог реда,
3. да је Јакобијан пресликавања

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \alpha'_u & \alpha'_v & \alpha'_w \\ \beta'_u & \beta'_v & \beta'_w \\ \gamma'_u & \gamma'_v & \gamma'_w \end{vmatrix}$$

различит од нуле у  $G$ .

Тада важи следеће тврђење које даје формулу за *смене променљивих* у тројном интегралу.



**Теорема 2** Ако  $f \in \mathcal{R}(D)$  и ако пресликавање  $G \rightarrow D$  испуњава услове 1.-3., тада је

$$\iiint_D f(x, y, z) = \iiint_G g(u, v, w) |J| du dv dw,$$

при чему је

$$g(u, v, w) = f(\alpha(u, v, w), \beta(u, v, w), \gamma(u, v, w)).$$

Оваквом сменом се са декартових координата  $(x, y, z)$  прелази на нове координате  $(u, v, w)$  (у општем случају, криволинијске).

При томе је

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{bmatrix}$$

и

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}.$$

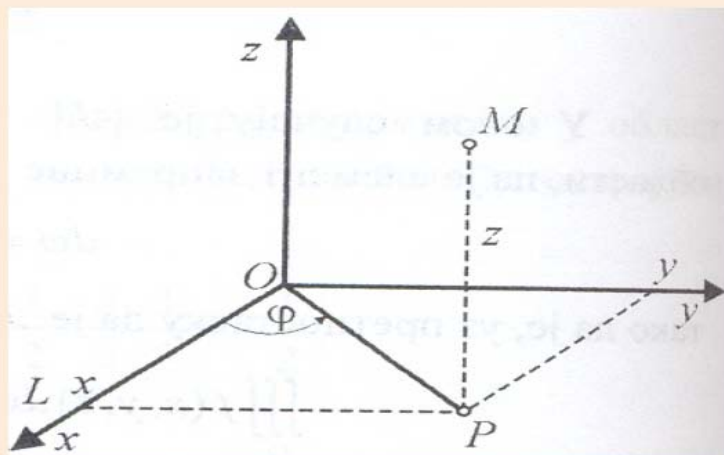
Коефицијент деформације је  $|J|$ , а елемент запремине је дат са

$$dV = dx dy dz = |J| du dv dw.$$

## 4 Цилиндричне координате

Цилиндричне координате су  $(\rho, \varphi, z)$ , при чему

$$\rho \in [0, \infty), \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad z \in \mathbb{R}.$$



Везе декартових  $(x, y, z)$  и цилиндричних координата су

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z.$$

Јакобијан је дат са

$$J = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho,$$

а коефицијент деформације је  $|J|$ .

Елемент запремине је

$$dV = \rho d\rho d\varphi dz.$$

Према томе,

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_G g(\rho, \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz,$$

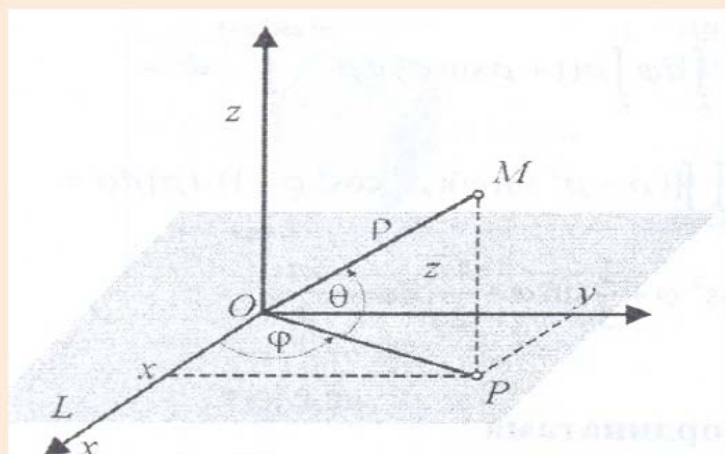
при чему је

$$g(\rho, \varphi, z) = f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z).$$

## 5 Сферне координате

Сферне координате су  $(\rho, \varphi, \theta)$ , при чему

$$\rho \in [0, \infty), \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \theta \in [-\pi/2, \pi/2].$$



Везе декартових  $(x, y, z)$  и сферних координата су

$$x = \rho \cos \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \cos \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \sin \theta.$$

Јакобијан је дат са

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -\rho \cos \theta \sin \varphi & -\rho \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & \rho \cos \theta \cos \varphi & -\rho \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta & 0 & \rho \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= \rho^2 \cos \theta (\cos^2 \varphi \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \cos^2 \theta \sin^2 \varphi) \\ &= \rho^2 \cos \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \\ &= \rho^2 \cos \theta, \end{aligned}$$

а коефицијент деформације је  $|J|$ .

Елемент запремине је

$$dV = dx dy dz = |J| d\rho d\varphi d\theta = \rho^2 \cos \theta d\rho d\varphi d\theta.$$

Према томе,

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_G g(\rho, \varphi, \theta) \rho^2 \cos \theta d\rho d\varphi d\theta,$$

при чему је

$$g(\rho, \varphi, \theta) = f(\rho \cos \theta \cos \varphi, \rho \cos \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta).$$

## ПРИМЕНЕ ДВОЈНОГ И ТРОЈНОГ ИНТЕГРАЛА

- Неке примене двојног интеграла
- Примена тројног интеграла

## 6 Неке примене двојног интеграла

### Запремина цилиндричног тела

Запремина цилиндричног тела чија је једна основа фигура  $D$  у равни  $Oxy$ , а друга основа површ  $z = f(x, y)$  дата је са

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

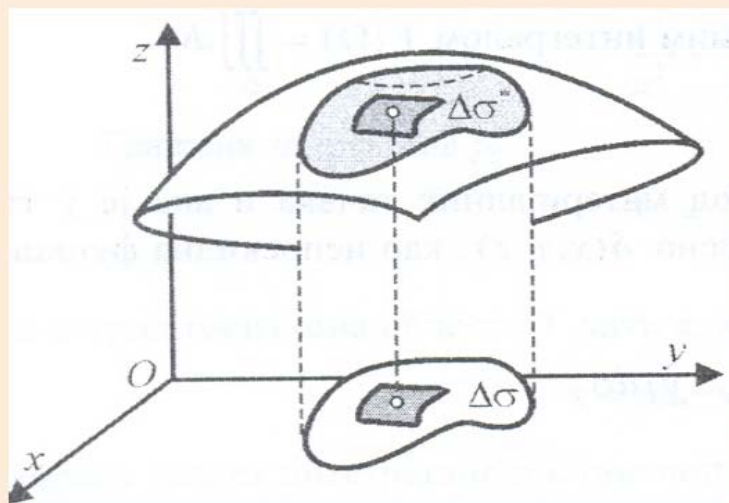
### Површина раванске фигуре

Површину  $\sigma(D)$  фигуре  $D$  можемо добити ако у двојном интегралу на  $D$  узмемо функцију  $f(x, y) = 1$ . Дакле,

$$\sigma(D) = \iint_D dx dy.$$

### Површина дела површи

Нека је површ дата са  $z = f(x, y)$ .



Подели  $\Pi$  области  $D$  одговара подела  $\Pi^*$  дате површи над облашћу  $D$ . Ако су  $\sigma_k^*$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) површине делова поделе  $\Pi^*$ , тражена површина  $P$  је дата са

$$P = \sum_{k=1}^n \sigma_k^*,$$

под условом да све наведене површине постоје. Међутим, површине  $\sigma_k^*$  није могуће у општем случају одредити, нити утврдити да ли постоје. Уместо њих можемо узети површине  $P_k$  одговарајућих делова тангентних равни у изабраним тачкама делова површи.

Претпоставимо да је дата подела  $(\Pi, M_i)$  области  $D$  и да је  $P_i$  површина дела тангентне равни у тачки  $M_i$  над делом  $D_i$ . Нека је

$$P(\Pi) = \sum_{i=1}^n P_i.$$

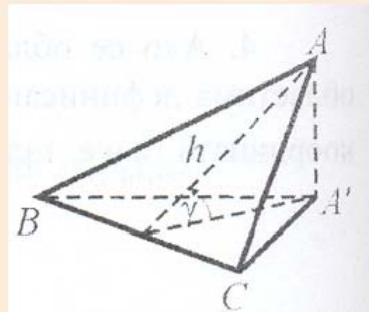
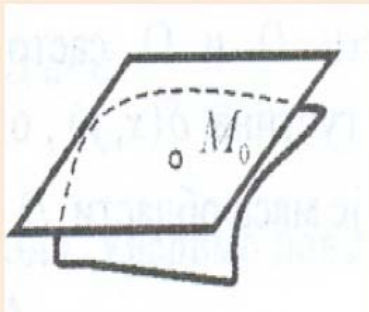
**Дефиниција 1** *Ако постоји  $\lim_{\lambda(\Pi) \rightarrow 0} P(\Pi) = P$ , тада је  $P$  површина посматраног дела дате површи.*

**Теорема 3** *Ако  $z'_x, z'_y \in C(D)$ , тада површина дела површи над  $D$  постоји и дата је са*

$$P = \iint_D \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} dx dy.$$

**Доказ.** Једначина тангенте у  $M_i(x_i, y_i, z_i)$  је

$$z - z_i = z'_x(M_i)(x - x_i) + z'_y(M_i)(y - y_i).$$



Како је угао  $\gamma$  између тангентне равни и равни  $xOy$  једнак углу између нормале тангентне равни и  $z$  осе и како је

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + z'_x{}^2(M_i) + z'_y{}^2(M_i)}},$$

то је

$$P_i = \frac{\sigma_i}{\cos \gamma} = \sqrt{1 + z'_x{}^2(M_i) + z'_y{}^2(M_i)} \sigma_i.$$

Збир  $P(\Pi)$  је интегрална сума двојног интеграла за функцију

$$g = \sqrt{1 + z'_x{}^2 + z'_y{}^2}$$

на области  $D$ . Из претпоставке теореме следи да је  $g$  непрекидна на  $D$ , па интегрална сума конвергира интегралу. Према томе,

$$P = \lim_{\lambda(\Pi) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(M_i) \sigma_i = \iint_D g(x, y) dx dy = \iint_D \sqrt{1 + z'_x{}^2 + z'_y{}^2} dx dy. \quad \blacksquare$$

## 7 Примена тројног интеграла

Ако је  $f(x, y, z) = 1$  на телу  $T$ , тада је  $S_n(f, \Pi) = \sigma(T)$  за сваку поделу  $\Pi$ . Према томе, запремина  $V$  мерљивог тела  $T$  је дата са

$$V = \iiint_T dx dy dz.$$

## M2 - 14. ПРЕДАВАЊЕ

Драган Ђорић

27.5.2009.

## РЕДОВИ

- Бројни редови
- Редови са позитивним члановима
- Алтернативни редови
- Степени редови



# БРОЈНИ РЕДОВИ

- Основни појмови
- Нека својства редова
- Кошијев критеријум конвергенције

## 1 Основни појмови

Да ли '*бесконачна сума*' реалних бројева

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

има смисла? Очигледно да у случају

$$1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots$$

таква сума није коначна, а у случају

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots$$

она не постоји. Међутим, у случају

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

таква сума постоји и једнака је 2 (*бесконачни геометријски ред*).

Дакле, у неким случајевима '*бесконачна сума*' има, а у неким случајевима нема смисла.

Нека је  $(a_n)$  низ реалних бројева и нека је  $(s_n)$  низ дефинисан са

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Дефиниција 1** *Израз*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

*је бесконачни ред или краће ред са општим чланом  $a_n$  и парцијалном сумом  $s_n$ .*

У зависности од тога да ли низ  $(s_n)$  конвергира или не дефинишу се одговарајући појмови за ред.

**Дефиниција 2** Дати ред конвергира ако је низ његових парцијалних сума конвергентан, а дивергира ако низ парцијалних сума није конвергентан.

Каже се такође и да је дати ред **конвергентан**, односно **дивергентан**. Ако ред конвергира и ако  $s_n \rightarrow s$  ( $n \rightarrow \infty$ ), пише се

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s,$$

укључујући и случај  $s = \pm\infty$ .

## 2 Нека својства редова

### 2.1 Неопходан услов конвергенције

**Теорема 1** Ако ред  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  конвергира, тада  $a_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

**Доказ.** Тврђење следи из једнакости

$$a_n = s_n - s_{n-1}$$

и претпоставке о конвергенцији реда. ■

Обрнуто тврђење не важи, односно услов  $a_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) није довољан, већ само неопходан услов конвергенције. На пример, ако је  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ , тада  $a_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ), а

$$s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Из теореме следи (на основу закона контрапозиције) да ред дивергира ако општи члан не тежи нули кад  $n$  тежи  $\infty$ . На пример, ред са општим чланом  $a_n = \frac{n}{n+1}$  дивергира.

### 2.2 Операције са редовима

Следећа теорема даје могућност да се уведу и неке операције са редовима.

**Теорема 2** 1. Ако ред  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  конвергира, онда конвергира и ред  $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$  за  $c \in \mathbb{R}$ , при чему је

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

2. Ако редови  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  конвергирају, онда конвергира и ред  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ , при чему је

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Доказ. Нека је  $s_n$  парцијална сума реда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $t_n$  парцијална сума реда  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .

1. Како је парцијална сума реда  $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$  једнака  $cs_n$ , ред је конвергентан и важи дата једнакост.
2. Како је

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) = s_n + t_n,$$

ред  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  конвергира и важи дата једнакост. ■

За ред  $\sum_{n=1}^n (a_n + b_n)$  кажемо да је *збир* редова  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .

### 3 Кошијев критеријум конвергенције

Следеће тврђење даје општи критеријум, односно потребан и довољан услов за конвергенцију произвољног реда.

**Теорема 3** *Ред  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  конвергира ако и само ако за свако  $\varepsilon > 0$  постоји  $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  тако да из  $n > m > n_0$  следи*

$$|a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n| < \varepsilon.$$

Доказ. Како је

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n = s_n - s_m,$$

из претпоставке теореме следи да за низ  $(s_n)$  важи одговарајући Кошијев критеријум за низове, па тај низ конвергира, што значи да и ред конвергира. ■

## РЕДОВИ СА НЕНЕГАТИВНИМ ЧЛАНОВИМА

- Критеријуми упоређивања
- Даламберов критеријум
- Кошијев критеријум
- Интегрални критеријум

## 4 Критеријуми упоређивања

Ако је  $a_n \geq 0$  за  $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ , низ парцијалних сума  $(s_n)$  реда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  је неоппадајући за  $n \geq n_0$ . Према томе, ако је низ  $(s_n)$  ограничен, ред конвергира, а у противном дивергира ка  $+\infty$ .

**Теорема 4** Нека су  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  редови са ненегативним члановима и нека је  $a_n \leq b_n$  за  $n \geq n_0$ .

1. Ако ред  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  конвергира, тада и ред  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  конвергира.
2. Ако ред  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  дивергира, тада и ред  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  дивергира.

**Доказ.** Из конвергенције реда  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  следи ограниченост низа његових парцијалних сума, а из претпоставке  $a_n \leq b_n$  следи да је и низ парцијалних сума реда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  такође ограничен. Према томе, важи 1., а 2. следи из 1. на основу закона контрапозиције. ■

**Теорема 5** Нека су  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  редови са ненегативним члановима и нека је

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

за  $n \geq n_0$ .

1. Ако ред  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  конвергира, тада и ред  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  конвергира.
2. Ако ред  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  дивергира, тада и ред  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  дивергира.

**Доказ.** Претпоставимо ради једноставности да је  $n_0 = 1$ . Из претпоставке теореме следи да важе неједнакости

$$\frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2}{b_1}, \quad \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3}{b_2}, \quad \dots, \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{b_n}{b_{n-1}}$$

из којих следи да је

$$a_n \leq \frac{a_1}{b_1} b_n, \quad \frac{b_1}{a_1} a_n \leq b_n.$$

Из ових неједнакости тврђење следи на основу претходне теореме. ■

## 5 Даламберов критеријум

Следећа теорема даје довољан услов за конвергенцију, односно дивергенцију реда са ненегативним члановима.

**Теорема 6** (Даламберов критеријум) *Нека је  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ред са ненегативним члановима.*

1. Ако за  $n \geq n_0$  важи

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1,$$

*дати ред конвергира.*

2. Ако за  $n \geq n_0$  важи

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1,$$

*дати ред дивергира.*

**Доказ.** Како геометријски ред  $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$  конвергира за  $0 < q < 1$ , из неједнакости

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q = \frac{q^{n+1}}{q^n}$$

и претходне теореме следи 1. Ако  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ , општи члан  $a_n$  не тежи нули, што значи да важи 2. ■

Претпоставимо да за ред  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  са ненегативним члановима постоји

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l.$$

Из теореме следи да дати ред конвергира ако је  $l < 1$  и дивергира ако је  $l > 1$ . У случају  $l = 1$  нема закључка, јер ред тада може бити конвергентан, а може бити и дивергентан. На пример, и за хармонијски ред и за ред са  $a_n = 1/n^2$  је  $l = 1$ .

## 6 Кошијев критеријум

Још један довољан услов за конвергенцију, односно дивергенцију је дат следећом теоремом.

**Теорема 7** (Кошијев критеријум) *Нека је  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ред са ненегативним члановима.*

1. Ако за  $n \geq n_0$  важи

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1,$$

*дати ред конвергира.*

2. Ако за  $n \geq n_0$  важи

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1,$$

*дати ред дивергира.*

**Доказ.** Тврђење 1. следи из прве теореме о поредбеним критеријумима за  $b_n = q^n$ , а тврђење 2. следи из чињенице да је  $a_n \geq 1$  за  $n \geq n_0$ . ■

Као и код Даламберовог критеријума, у случају да постоји

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l,$$

из теореме следи да дати ред конвергира ако је  $l < 1$  и дивергира ако је  $l > 1$ . У случају  $l = 1$  нема закључка, јер ред тада може бити конвергентан, а може бити дивергентан. На пример, и за хармонијски ред и за ред са  $a_n = 1/n^2$  је  $l = 1$ . Исто важи и ако је

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l.$$

## 7 Интегрални критеријум

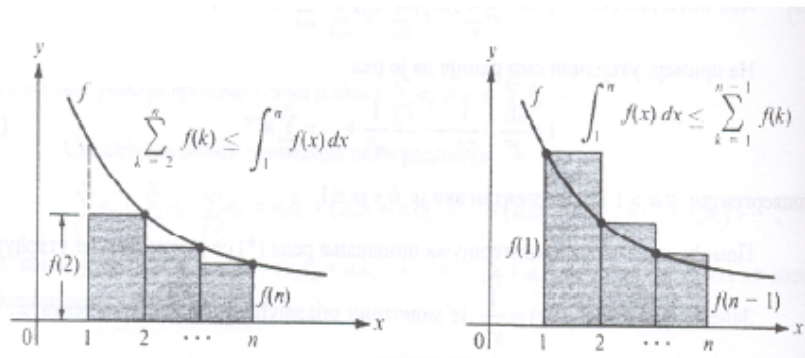
**Теорема 8** Нека  $f : [1, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  и нека је:

1.  $f$  непрекидна и опадајућа функција,
2.  $a_n = f(n)$ .

Тада  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  конвергира ако и само ако  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  конвергира.

**Доказ.** Из 1. следи

$$f(2) + f(3) + \cdots + f(n) \leq \int_1^n f(x) dx \leq f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1).$$



Ако интеграл конвергира, тада из прве неједнакости и 2. следи да је низ парцијалних сума реда ограничен, па и ред конвергира. Ако интеграл дивергира (ка  $+\infty$ ), тада из 2. и друге неједнакости следи да и ред дивергира. На основу закона контрапозиције закључујемо да интеграл конвергира ако ред конвергира.

Тврђење важи и ако су услови за  $f$  испуњени за  $x \geq n_0 \in \mathbb{N}$  (уместо  $x \geq 1$ ).

## АЛТЕРНАТИВНИ РЕДОВИ

- Лајбницов критеријум
- Апсолутна конвергенција



## 8 Лајбницов критеријум

Дефиниција 3 *Ред облика*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots,$$

где је  $a_n > 0$  за  $n \in N$  је алтернативни ред.

За неке алтернативне редове постоје посебни критеријуми који дају довољне услове конвергенције.

**Теорема 9** (Лабницов критеријум) *Алтернативни ред конвергира ако је  $a_{n+1} \leq a_n$  и  $a_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ).*

Доказ. Како је  $a_{n+1} \leq a_n$ , то је

$$s_{2n+2} = s_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq s_{2n}$$

и

$$s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1,$$

па је низ  $(s_{2n})$  конвергентан (растући и ограничен одозго).

Из једнакости  $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$  и претпоставке  $a_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) следи да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n}.$$

Према томе, низ  $(s_n)$  конвергира, па и дати ред конвергира. ■

## 9 Апсолутна конвергенција

Ако алтернативни ред  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$  конвергира, ред  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  не мора да конвергира. То је случај, на пример, за  $a_n = \frac{1}{n}$ . Међутим, у супротном смеру важи следеће тврђење.

**Теорема 10** *Нека је  $a_n > 0$  за  $n \in N$ . Ако ред  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  конвергира, тада конвергира и алтернативни ред  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ .*

Доказ. Тврђење следи на основу Кошијевог критеријума конвергенције јер је

$$|s_n - s_m| \leq a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n,$$

где је  $(s_n)$  низ парцијалних сума алтернативног реда. ■

**Дефиниција 4** *Алтернативни ред  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$  је апсолутно конвергентан ако ред  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  конвергира, а условно конвергентан ако конвергира, а ред  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  не конвергира.*

Појам апсолутне и условне конвергенције дефинише се слично и за произвољне редове. У случају апсолутне конвергенције разна својства коначних збирова се преносе и на редове, док у случају условне конвергенције то не мора да важи. На пример, ако ред условно конвергира, онда се премештањем чланова реда може добити збир који је једнак произвољном реалном броју (*Риманова теорема*).

## СТЕПЕНИ РЕДОВИ

- Основни појмови
- Одређивање радијуса конвергенције
- Диференцирање и интеграције реда

### 10 Основни појмови

За сваки реалан број  $x$  такав да је  $0 < x < 1$  ред  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  конвергира (геометријски ред). Наравно, у овом случају  $x^n$  можемо посматрати и као степену функцију на  $(0, 1)$ , што значи да имамо ред степених функција. Поменути ред 'конвергира'. Међутим, исти ред на  $(0, 2)$  'не конвергира' (на пример, за  $x = 1$ ).

**Дефиниција 5** *Ред облика  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ , где су  $x_0, a_1, a_2 \dots$  дати реални бројеви а  $x$  реална променљива, је степени или потенцијални ред. Бројеви  $a_n$  су коефицијенти, а  $x_0$  је тачка развоја степеног реда.*

**Теорема 11 (Абелов став)**

1. Ако  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  конвергира за  $x = r$  ( $r \neq 0$ ), тада је он апсолутно конвергентан за свако  $x$  за које је  $|x| < |r|$ .
2. Ако је  $\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n$  дивергентан за  $x = r$ , тада је он дивергентан за свако  $x$  за које је  $|x| > |r|$ .

**Доказ.** 1. Из претпоставке следи  $a_n r^n \rightarrow 0$  када  $n \rightarrow \infty$ , па постоји број  $M$  такав да је  $|a_n r^n| \leq M$  за  $n \in N$ . Тада је

$$|a_n x^n| = \left| a_n r^n \frac{x^n}{r^n} \right| = |a_n r^n| \left| \frac{x}{r} \right|^n \leq M \left| \frac{x}{r} \right|^n.$$

Како геометријски ред  $\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{x}{r} \right|^k$  конвергира за  $|x| < |r|$ , конвергира и дати ред.

2. Ако би ред био конвергентан за неко  $x$  за које је  $|x| > |r|$ , на основу 1. био би конвергентан и за  $x = r$ . ■

Из теореме следи да за сваки степени ред постоји реалан број  $r$  ( $0 \leq r \leq +\infty$ ) такав да важи:

1. ако је  $|x| < r$ , ред је конвергентан,
2. ако је  $|x| > r$ , ред је дивергентан.

Такав број  $r$  је **полупречник конвергенције** реда  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ . Ако је  $r > 0$ , интервал  $(-r, r)$  назива се **интервал конвергенције** тог реда. За  $r = 0$  ред конвергира само за  $x = 0$ , а ако је  $r = +\infty$  ред конвергира на  $R$ . На пример, за  $a_n = n!$  је  $r = 0$ , а за  $a_n = \frac{1}{n!}$  је  $r = +\infty$ .

## 11 Одређивање радијуса конвергенције

Полупречник конвергенције степеног реда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  може да се одреди помоћу Даламберовог критеријума ако постоји  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ , односно помоћу Кошијевог критеријума ако постоји  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ .

Из једнакости

$$\left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x|$$

следи да је ред конвергентан за

$$|x| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}$$

и дивергентан за

$$|x| > \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}.$$

Према томе,

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Слично је и у случају Кошијевог критеријума,

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

а ако поменуте граничне вредности не постоје, важи следеће тврђење.

**Теорема 12** (*Коши-Хадамарова теорема*)

За степени ред  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  је

$$r = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Исто важи и за степени ред  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ .