МАТЕМАТИКА 1 - Први део

И с п и т н а   п и т а њ а

2011/2012

Ф О Н

СПИСАК ПИТАЊА

1. Алгебарске структуре са једном бинарном операцијом
2. Алгебарске структуре са две бинарне операције
3. Матрице - појам и основне операције
4. Пермутације скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$
5. Појам детерминанте
6. Основна својства детерминанти
7. Разлагање детерминанте
8. Инверзна матрица
9. Ранг матрице
10. Векторски простори
11. Линеарна зависност и независност вектора у векторском простору
12. База и димензија векторског простора
13. Крамерове формуле
14. Кронекер-Капелијева теорема
15. Гаусов алгоритам
16. Скаларни производ вектора
17. Векторски производ вектора
18. Мешовити производ вектора
19. Раван у простору
20. Права у простору
21. Међусобни положај праве и равни
22. Нека својства скупа реалних бројева
23. Функције - основни појмови
24. Кардинални бројеви
25. Пребројиви и непребројиви скупови

МОГУЋИ САДРЖАЈ ПИТАЊА

Алгебарске структуре са једном бинарном операцијом

1. Дефинисати појмове: бинарна операција, групоид, полугрупа (семигрупа), неутрални елемент групоида, инверзни елемент за неки елемент групоида, група.
2. Доказати теорему о јединствености инверзног елемента.
3. Навести неколико примера група.

Алгебарске структуре са две бинарне операције

1. Дефинисати појмове: бинарна операција, полугрупа (семигрупа), Абелова група, дистрибутивност једне операције у односу на другу.
2. Дефинисати прстен, тело и поље.
3. Доказати да у прстену $(S, +, \cdot)$ важи $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$ за свако $x \in S$.

Матрице - појам и основне операције

1. Дефинисати појмове: матрица, подматрица, сабирање матрица, множење матрице скаларом, множење матрица, транспоновање матрице.
2. Доказати да је $(S, +)$ Абелова група ако је S скуп свих матрица истог типа.
3. Доказати да је $(S, +, \cdot)$ прстен са јединицом ако је S скуп свих квадратних матрица истог типа.

Матрице - појам и основне операције

1. Дефинисати појмове: матрица, подматрица, сабирање матрица, множење матрице скаларом, множење матрица, транспоновање матрице.
2. Навести својства операције транспоновања матрице.
3. Доказати да је $(S, +, \cdot)$ прстен са јединицом ако је S скуп свих квадратних матрица истог типа.

Пермутације скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$

1. Дефинисати појмове: пермутација скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$, иверзија пермутације из скупа P_n, парна пермуатција из скупа P_n, непарна пермутација из скупа P_n, инверзна пермутација.
2. Формулисати теорему о инверзијама međусобно инверзних пермутација.
3. Доказати да пермутација мења парност ако два елемента замене места.

Појам детерминанте

1. Дефинисати детерминанту квадратне матрице реда n.
2. Написати према дефиницији из 1. све сабирке за случај $n = 3$ и навести Сарусово правило.

3. Доказати да је $|A| = \sum_{\tau \in P_n} (-1)^{Inv(\tau)} a_{\tau_1 1} a_{\tau_2 2} \cdots a_{\tau_n n}$.

Основна својства детерминанти

1. Дефинисати детерминанту квадратне матрице реда n.
2. Доказати да детерминанта мења знак ако две врсте замене места.
3. Доказати да је $|A^T| = |A|$.

Основна својства детерминанти

1. Дефинисати детерминанту квадратне матрице реда n.
2. Доказати да детерминанта мења знак ако две врсте замене места.
3. Доказати да је $|B| = \lambda|A|$ ако је B матрица добијена множењем једне врсте матрице A са λ.

Основна својства детерминанти

1. Дефинисати детерминанту квадратне матрице реда n.
2. Навести бар три својства детерминанти.
3. Доказати да је $|A| = |B| + |C|$ ако је $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ и $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$.

Разлагање детерминанте

1. Дефинисати детерминанту квадратне матрице реда n, као и појмове: минор, кофактор.
2. Формулисати теорему о развоју детерминанте.
3. Доказати да је $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = 0$ за $k \neq i$.

Инверзна матрица

1. Дефинисати појмове: матрица, множење матрица, кофактор матрица, адјунгована матрица, инверзна матрица.
2. Доказати да је $A^{-1} = adjA/|A|$.
3. Навести и доказати нека својства инверзне матрице.

Ранг матрице

1. Дефинисати појмове: матрица, минор реда r, ранг матрице, елементарне трансформације.
2. Навести теорему о томе како елементарне трансформације утичу на ранг матрице.
3. Доказати да транспоновање матрице не мења њен ранг.

Векторски простори

1. Дефинисати појмове: поље, векторски простор, линеарна комбинација вектора $x_1, x_2, \dots, x_n$, линеал.
2. Дефинисати операције $+$ и $\cdot$ у скуповима $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{P}_{\leq n}$ и $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ тако да се добију векторски простори.
3. Доказати да је $(M_{m \times n}, +, \cdot)$ векторски простор ако је $+$ операција сабирање матрица, а $\cdot$ операција множења матрице реалним бројем.

Линеарна зависност и независност вектора у векторском простору

1. Дефинисати појмове: векторски простор, линеана комбинација вектора, линеарни омотач, линеарна зависност вектора, линеарна независност вектора.
2. Навести један потребан и довољан услов за линеарну зависност вектора $x_1, \dots, x_n$.
3. Доказати наведено тврђење из 2.

База и димензија векторског простора

1. Дефинисати појмове: Абелова група, векторски простор, линеарна комбинација вектора, линеал над скупом $\{x_1, \dots, x_n\}$, линеарно зависни вектори, линеарно независни вектори.
2. Дефинисати базу и димензију векторског простора и навести пример базе у простору $\mathbb{R}^n$.
3. Доказати да сваки скуп од n линеарно независних вектора чини базу n-димензионалног векторског простора.

База и димензија векторског простора

1. Дефинисати појмове: векторски простор, линеарна комбинација вектора, линеал над скупом $\{x_1, \dots, x_n\}$, линеарно зависни вектори, линеарно независни вектори.
2. Дефинисати базу и димензију векторског простора и навести пример векторског простора полинома и једну базу тог простора.
3. Дефинисати координате вектора у некој бази и доказати да су координате коначнодимензионалног векторског простора у датој бази јединствене.

Крамерова теорема

1. Дефинисати појмове: систем од m линеарних једначина са n непознатих, решење система, еквивалентни системи. Навести матрични и векторски запис система.
2. Формулисати Крамерову теорему.
3. Доказати Крамерову теорему.

Кронекер-Капелијева теорема

1. Дефинисати појмове: систем од m линеарних једначина са n непознатих, решење система, еквивалентни системи. Навести матрични и векторски запис система.
2. Формулисати теорему о базисном минору.

3. Формулисати и доказати Кронекер-Капелијеву теорему.

Гаусов алгоритам

1. Дефинисати појмове: систем од m линеарних једначина са n непознатих, решење система, еквивалентни системи. Навести матрични и векторски запис система.
2. Навести еквивалентне трансформације система.
3. Описати Гаусов алгоритам.

Скаларни производ вектора

1. Дефинисати појмове: вектор, збир два вектора, множење вектора скаларом, координате вектора, скаларни производ вектора.
2. Навести бар четири својства скаларног производа.
3. Доказати да је $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$ ако је $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$.

Векторски производ вектора

1. Дефинисати појмове: вектор, збир два вектора, множење вектора скаларом, координате вектора, оријентација вектора.
2. Дефинисати векторски производ и навести његова основна својства.
3. Доказати да је
$$\vec{a} \times \vec{b} = (y_2 z_2 - z_1 y_2, -x_1 z_2 + z_1 x_2, x_1 y_2 - y_1 x_2)$$
ако је $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$.

Мешовити производ вектора

1. Дефинисати појмове: скаларни производ вектора, векторски производ вектора, мешовити производ вектора.
2. Мешовити производ изразити помоћу координата.
3. Формулисати и доказати теорему о геометријској интерпретацији мешовитог производа.

Раван у простору

1. Написати векторски, општи, сегментни и нормалан облике једначине равни.
2. Навести све случајеве међусобног положаја двеју равни.
3. Извести формулу за одстојање тачке од равни.

Права у простору

1. Написати векторски, параметарски и канонски облик једначине праве.
2. Навести све случајеве међусобног положаја двеју правих.
3. Извести општи облик праве из канонског облика и обратно.

Међусобни положај праве и равни

1. Написати бар три облика једначине равни и бар три облика једначине праве.
2. Дефинисати угао између праве и равни и објаснити како се он може одредити.
3. Навести све случајеве међусобног положаја праве и равни и извести формулу за координате продорне тачке праве кроз раван.

Нека својства скупа реалних бројева

1. Дефинисати појмове: ограничен скуп (у $\mathbb{R}$), супремум скупа, инфимум скупа.
2. Формулисати *Аксиому супремума.*
3. Доказати да сваки непразан скуп у $\mathbb{R}$ који је ограничен одоздо има инфимум.

Функције - основни појмови

1. Дефинисати појмове: функција, сирјекција, ињекција, бијекција, композиција функција, инверзна функција.
2. Формуласти теорему о једнакостима које карактеришу инверзно пресликавање.
3. Доказати да за композицију функција важи асоцијативни закон.

Кардинални бројеви

1. Дефинисати појмове: партитивни скуп, бијекција, еквивалентни скупови, моћ скупа, бесконачан скуп.
2. Формулисати Кантор-Бернштајнову теорему.
3. Доказати да скупови A и $\mathcal{P}(A)$ нису еквивалентни ако је A непразан скуп.

Пребројиви и непребројиви скупови

1. Дефинисати појмове: еквивалентни скупови, пребројив скуп, непребројив скуп.
2. Образложити пребројивост скупа рационалних бројева из $(0,1]$.
3. Доказати да је унија пребројиво много пребројивих скупова такође пребројив скуп.

Пребројиви и непребројиви скупови

1. Дефинисати појмове: еквивалентни скупови, пребројив скуп, непребројив скуп.
2. Образложити пребројивост скупа рационалних бројева из $(0,1]$.
3. Доказати да је скуп $(0,1)$ непребројив.