

# **МАТЕМАТИКА 1 - Други део**

*Испитна питања*

*2011/2012*

**Ф О Н**

## СПИСАК ПИТАЊА

1. Гранична вредност низа
2. Конвергенција монотоног и ограниченог низа
3. Операције у скупу конвергентних низова
4. Тачке нагомилавања низа
5. Кошијев критеријум
6. Гранична вредност функције
7. Основне теореме о граничним вредностима функција
8. Упоредивање бесконачно малих
9. Непрекидност функција
10. Вајерштрасове теореме за непрекидне функције
11. Прва Коши-Болцанова теорема о међувредностима непрекидне функције
12. Друга Коши-Болцанова теорема о међувредностима непрекидне функције
13. Извод функције
14. Изводи елементарних функција
15. Извод сложене и инверзне функције
16. Изводи и диференцијали вишег реда
17. Ролова теорема
18. Лагранжова теорема
19. Кошијева теорема
20. Лопиталова теорема
21. Апроксимација функције Тејлоровим полиномом
22. Апроксимација функције Маклореновим полиномом
23. Локални екстремум функције
24. Довољан услов за локални екстремум (помоћу првог извода)
25. Довољан услов за локални екстремум (помоћу другог извода)
26. Конвексност функције

# МОГУЋИ САДРЖАЈ ПИТАЊА

## Гранична вредност низа

1. Дефинисати појмове: низ реалних бројева, ограничен низ, монотон низ, гранична вредност низа, нула низ.
2. Доказати да конвергентан низ има само једну граничну вредност.
3. Формулисати и доказати теорему о три низа.

## Гранична вредност низа

1. Дефинисати појмове: низ реалних бројева, ограничен низ, монотон низ, гранична вредност низа, нула низ.
2. Доказати да је конвергентан низ ограничен.
3. Формулисати и доказати теорему о три низа.

## Конвергенција монотоног и ограниченог низа

1. Дефинисати појмове: низ реалних бројева, ограничен низ, монотон низ, гранична вредност низа.
2. Каква је веза између ограничености и конвергентности низа? Каква је веза између монотоности и конвергентности низа?
3. Доказати да је монотон и ограничен низ конвергентан.

## Конвергенција монотоног и ограниченог низа

1. Дефинисати појмове: низ реалних бројева, ограничен низ, монотон низ, гранична вредност низа.
2. Формулисати теорему о конвергенцији монотоног низа.
3. Формулисати и доказати Канторов принцип уметнутих одсечака

## Операције у скупу конвергентних низова

1. Дефинисати појмове: низ реалних бројева, гранична вредност низа, нула низ.
2. Доказати да је производ нула низа и ограниченог низа нула низ.
3. Формулисати и доказати теорему о граничној вредности збира и производа два конвергентна низа.

## Операције у скупу конвергентних низова

1. Дефинисати појмове: низ реалних бројева, гранична вредност низа, нула низ.
2. Доказати да је производ нула низа и ограниченог низа нула низ.
3. Формулисати и доказати теорему о граничној вредности количника два конвергентна низа.

## Тачке нагомилавања низа

1. Дефинисати појмове: низ реалних бројева, гранична вредност низа, тачка нагомилавања низа.
2. Доказати да конвергентан низ има само једну тачку нагомилавања.
3. Формулисати и доказати Болцано-Вајерштрасову теорему за низове.

## Тачке нагомилавања низа

1. Дефинисати појмове: низ реалних бројева, гранична вредност низа, тачка нагомилавања низа.
2. Формулисати Болцано-Вајерштрасову теорему за низове.
3. Доказати да низ реалних бројева конвергира ако и само ако има тачно једну тачку нагомилавања и она је у скупу  $\mathbb{R}$ .

## Кошијев критеријум

1. Дефинисати појмове: низ реалних бројева, гранична вредност низа, Кошијев низ.
2. Доказати да је Кошијев низ ограничен.
3. Формулисати Кошијев критеријум и помоћу њега доказати да низ  $(a_n)$  дефинисан са  $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$  није конвергентан.

## Гранична вредност функције

1. Дефинисати појмове: околина тачке  $a$ , пробушена околина тачке  $a$ , гранична вредност функције  $f$  у тачки  $a$ , бесконачно мала функција када  $x \rightarrow a$ .
2. Доказати да је гранична вредност функције јединствена.
3. Формулисати и доказати теорему о својствима бесконачно мале функције када  $x \rightarrow a$ .

## Гранична вредност функције

1. Дефинисати појмове: гранична вредност функције  $f$  у тачки  $a$ , једностране граничне вредности функције  $f$  у тачки  $a$ , гранична вредност функције у бесконачности.
2. Доказати да је гранична вредност функције јединствена.
3. Формулисати и доказати теорему о својствима бесконачно мале функције када  $x \rightarrow a$ .

## Гранична вредност функције

1. Дефинисати појмове: гранична вредност функције у бесконачности, бесконачна гранична вредност функције.
2. Доказати да је гранична вредност функције јединствена.
3. Доказати да  $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$  када  $x \rightarrow 0$ .

## Основне теореме о граничним вредностима функција

1. Дефинисати појмове: гранична вредност функције у тачки, бесконачно мала функција, бесконачно велика функција.
2. Формулисати теореме о граничним вредностима збира, производа и количника двеју функција.
3. Доказати теорему о граничној вредности производа двеју функција.

## Упоредивање бесконачно малих

1. Дефинисати појмове: бесконачно мала функција када  $x \rightarrow a$ , еквивалентне бесконачно мале функција када  $x \rightarrow a$ , неупоредиве бесконачно мале функције када  $x \rightarrow a$ .
2. Формулисати теореме о замени бесконачно малих функција при рачунању граничне вредности количника.
3. Формулисати и доказати потребан и довољан услов за еквивалентност бесконачно малих функција.

## Непрекидност функција

1. Дефинисати појмове: непрекидност функције у тачки, непрекидност функције на скупу, равномерно непрекидност функције, елементарне функције.
2. Формулисати теорему о непрекидности елементарних функција.
3. Формулисати и доказати теорему о непрекидности композиције функција.

## Непрекидност функција

1. Дефинисати појмове: непрекидност функције у тачки, прекид прве врсте, прекид друге врсте.
2. Формулисати Канторову теорему за непрекидне функције.
3. Формулисати и доказати теорему о непрекидности композиције функција.

## Вајерштрасове теореме за непрекидне функције

1. Дефинисати појмове: непрекидност функције у тачки, прекид прве врсте, прекид друге врсте, непрекидност функције на скупу.

2. Формулисати Прву и Другу Вајерштрасову теорему за непрекидне функције.
3. Доказати Прву Вајерштрасову теорему.

## Вајерштрасове теореме за непрекидне функције

1. Дефинисати појмове: непрекидност функције у тачки, прекид прве врсте, прекид друге врсте, непрекидност функције на скупу.
2. Формулисати Прву и Другу Вајерштрасову теорему за непрекидне функције.
3. Доказати Другу Вајерштрасову теорему.

## Прва Коши-Болцанова теорема о међувредностима непрекидне функције

1. Дефинисати појмове: непрекидност функције у тачки, прекид прве врсте, прекид друге врсте, непрекидност функције на скупу.
2. Формулисати Прву и Другу Коши-Болцанову теорему.
3. Доказати Прву Коши-Болцанову теорему.

## Друга Коши-Болцанова теорема о међувредностима непрекидне функције

1. Дефинисати појмове: непрекидност функције у тачки, прекид прве врсте, прекид друге врсте, непрекидност функције на скупу.
2. Формулисати Прву Коши-Болцанову теорему.
3. Формулисати и доказати Другу Коши-Болцанову теорему.

## Извод функције

1. Дефинисати појмове: извод функције, диференцијабилност функције, диференцијал функције.
2. Дати геометријско тумачење извода и диференцијала и извести једначину тангенте и нормале криве.
3. Формулисати и доказати теорему о вези диференцијабилности и извода функције.

## Извод функције

1. Дефинисати појмове: извод функције, диференцијабилност функције, диференцијал функције.
2. Дати геометријско тумачење извода и диференцијала и извести једначину тангенте и нормале криве.
3. Формулисати и доказати теорему о вези диференцијабилности и непрекидности функције.

## Извод функције

1. Дефинисати појмове: извод функције, диференцијабилност функције, диференцијал функције.
2. Дати геометријско тумачење извода и диференцијала и извести једначину тангенте и нормале криве.
3. Формулисати и доказати теорему о правилима диференцирања.

## Изводи елементарних функција

1. Дефинишите појмове: основне елементарне функције, елементарне функције, извод функције у тачки.
2. Доказати да је  $(x^n)' = nx^{n-1}$  и да је  $(\sin x)' = \cos x$ .
3. Доказати да је  $(a^x)' = a^x \ln a$  и да је  $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$ .

## Извод сложене и инверзне функције

1. Дефинишите појмове: композиција две функције, инверзна функција, гранична вредност функције, извод функције.
2. Формулисати теорему о изводу сложене функције и теорему о изводу инверзне функције.
3. Доказати теорему о изводу сложене функције.

## Извод сложене и инверзне функције

1. Дефинишите појмове: композиција две функције, инверзна функција, гранична вредност функције, извод функције.
2. Формулисати теорему о изводу сложене функције и теорему о изводу инверзне функције.
3. Доказати теорему о изводу инверзне функције и дати бар један пример примене те теореме.

## Изводи и диференцијали вишег реда

1. Дефинишите појмове: диференцијабилна функција, диференцијал првог реда, извод вишег реда, диференцијал вишег реда.
2. Формулисати и доказати теорему о својствима диференцијала.
3. Формулисати теорему о Лајбницовој формули за извод вишег реда производа двеју функција.

## Ролова теорема

1. Дефинисати појмове: гранична вредност функције, непрекидност функције у тачки, извод функције у тачки.
2. Формулисати Ролову теорему и примерима аргументовати да су сви наведени услови битни.

3. Доказати Ролову теорему.

## Лагранжова теорема

1. Формулисати бар две теореме о средњим вредностима диференцијабилне функције.
2. Доказати Лагранжову теорему и дати њено геометријско тумачење.
3. Доказати да је функција  $f$  константа на  $(a, b)$  ако је  $f'(x) = 0$  за свако  $x \in (a, b)$ .

## Кошијева теорема

1. Формулисати Лагранжову и Кошијеву теорему диференцијалног рачуна. Да ли је Лагранжова теорема специјални случај Кошијеве?
2. Доказати Кошијеву теорему.
3. Формулисати последицу Кошијеве теореме у којој фигуришу изводи вишег реда.

## Лопиталова теорема

1. Дефинисати граничну вредност и извод функције у тачки и навести разне врсте неодређености при налажењу граничне вредности.
2. Формулисати Лопиталова правила за неодређености типа  $0/0$  и  $\infty/\infty$ .
3. Доказати Лопиталово правило за неодређеност типа  $0/0$ .

## Апроксимација функције Тејлоровим полиномом

1. Дефинисати Тејлоров полином и Тејлорову формулу за функцију  $f$  у околини тачке  $a$ .
2. Формулисати теорему о Лагранжовом облику остатка у Тејлоровој формули.
3. Доказати теорему о Лагранжовом облику остатка у Тејлоровој формули.

## Апроксимација функције Тејлоровим полиномом

1. Дефинисати Тејлоров полином и Тејлорову формулу за функцију  $f$  у околини тачке  $a$ .
2. Формулисати теорему о Пеановом облику остатка у Тејлоровој формули.
3. Доказати теорему о Пеановом облику остатка у Тејлоровој формули.

## Апроксимација функције Маклореновим полиномом

1. Дефинисати Тејлоров полином и Тејлорову формулу за функцију  $f$  у околини тачке  $a$ .
2. Дефинисати Маклоренов полином и Маклоренову формулу за функцију  $f$  са Лагранжовим остатком.



3. Извести Маклоренов полином степена  $n$  и Лагранжов остатак за функцију  $f : x \mapsto e^x$ .

## Апроксимација функције Маклореновим полиномом

1. Дефинисати Тејлоров полином и Тејлорову формулу за функцију  $f$  у околини тачке  $a$ .
2. Дефинисати Маклоренов полином и Маклоренову формулу за функцију  $f$  са Лагранжовим остатком.
3. Извести Маклоренов полином степена  $n$  за функцију  $f : x \mapsto \sin x$ .

## Апроксимација функције Маклореновим полиномом

1. Дефинисати Тејлоров полином и Тејлорову формулу за функцију  $f$  у околини тачке  $a$ .
2. Дефинисати Маклоренов полином и Маклоренову формулу за функцију  $f$  са Лагранжовим остатком.
3. Извести Маклоренов полином степена  $n$  за функцију  $f : x \mapsto \cos x$ .

## Апроксимација функције Маклореновим полиномом

1. Дефинисати Тејлоров полином и Тејлорову формулу за функцију  $f$  у околини тачке  $a$ .
2. Дефинисати Маклоренов полином и Маклоренову формулу за функцију  $f$  са Лагранжовим остатком.
3. Извести Маклоренов полином степена  $n$  и Лагранжов остатак за функцију  $f : x \mapsto \ln(1 + x)$ .

## Апроксимација функције Маклореновим полиномом

1. Дефинисати Тејлоров полином и Тејлорову формулу за функцију  $f$  у околини тачке  $a$ .
2. Дефинисати Маклоренов полином и Маклоренову формулу за функцију  $f$  са Лагранжовим остатком.
3. Извести Маклоренов полином степена  $n$  за функцију  $f : x \mapsto (1 + x)^\alpha$ .

## Локални екстремум функције

1. Дефинисати појмове: растућа функција, опадајућа функција, монотона функција.
2. Формулисати теорему о довољним условима за монотоност функције.
3. Доказати теорему о довољним условима за монотоност функције.

## Локални екстремум функције

1. Дефинисати појмове: растућа функција, опадајућа функција, монотона функција.

2. Формулисати теорему о потребним условима за монотоност функције.
3. Доказати теорему о потребним условима за монотоност функције.

## Неопходан и довољан услов за локални екстремум (помоћу првог извода)

1. Дефинисати појмове: локални екстремум, монотона функција, диференцијабилна функција.
2. Формулисати и доказати Фермаову теорему (неопходан услов за локални екстремум).
3. Формулисати и доказати теорему о довољном услову (израженом помоћу првог извода) за локални екстремум функције.

## Довољан услов за локални екстремум (помоћу другог извода)

1. Дефинисати појмове: локални екстремум, монотона функција, диференцијабилна функција.
2. Формулисати теорему о довољном услову (израженом помоћу првог извода) за локални екстремум функције.
3. Формулисати и доказати теорему о довољном услову (израженом помоћу другог извода) за локални екстремум функције.

## Конвексност функције

1. Дефинисати појмове: извод вишег реда, диференцијабилна функција, диференцијал вишег реда, конвексна функција, конкавна функција, тачка превоја.
2. Формулисати теореме о довољним условима за конвексност, односно конкавност функције.
3. Доказати теорему о довољним условима за конвексност функције.