

4. Аналитичка геометрија у простору

Овде је дат кратак преглед VI и VII двочаса вежби. Потребно је да обновите одговарајућу теоријску материју која је обрађена на предавањима и у уџбенику.

Како се највећим делом на вежбама раде задаци из збирке, након броја задатка плавом бојом је означен број задатка у збирци "Методичка збирка решених задатака из Математике 1" аутора Владимира Балтића и Оливере Мухић у форми $x.z.$, где је x број главе, а z број задатка у тој глави. Ови задаци са оним са писмених и колоквијума од претходних година чине целину довољну за припрему ове области.

1. сличан са 4.3. Написати једначину равни која садржи тачке $A(1, 1, 1)$, $B(0, -1, 2)$ и $C(2, 3, -1)$.

Решење 1. Једначина непознате равни је $\pi: ax + by + cz + d = 0$. Како равни π припада тачка A , координате тачке A задовољавају једначину равни $\pi: a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1 + d = 0$. Од тачке B добијамо једначину $a \cdot 0 + b \cdot (-1) + c \cdot 2 + d = 0$. Од тачке C добијамо једначину $a \cdot 2 + b \cdot 3 + c \cdot (-1) + d = 0$. Дакле, добили смо следећи хомоген систем:

$$\begin{array}{rrrrrrcl} a & + & b & + & c & + & d & = & 0 \\ & - & b & + & 2c & + & d & = & 0 \\ 2a & + & 3b & - & c & + & d & = & 0 & \text{III} - 2 \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrcl} a & + & b & + & c & + & d & = & 0 \\ & - & b & + & 2c & + & d & = & 0 \\ & & b & - & 3c & - & d & = & 0 & \text{III} + \text{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrcl} a & + & b & + & c & + & d & = & 0 \\ & - & b & + & 2c & + & d & = & 0 \\ & & & - & c & & & = & 0. \end{array}$$

Овде су a , b и c везане променљиве, док је d слободна променљива, па ћемо узети да је $d = t$, $t \in \mathbb{R}$. Враћањем уназад добијамо $c = 0$, $b = t$ и $a = -2t$, тј. $(a, b, c, d) = (-2t, t, 0, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Како нама није потребно да одредимо сва решења (него само једно), можемо узети неку конкретну вредност за параметар t , нпр. $t = -1$, па добијамо да је $(a, b, c, d) = (2, -1, 0, -1)$, одакле добијамо да је раван π која садржи тачке A , B и C дата са $\pi: 2x - y - 1 = 0$. ■

Решење 2. Искористимо формулу за једначину равни π кроз три тачке $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ и $C(x_C, y_C, z_C)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0,$$

где су x , y и z координате тачака равни. $\pi: \begin{vmatrix} x - 1 & y - 1 & z - 1 \\ 0 - 1 & -1 - 1 & 2 - 1 \\ 2 - 1 & 3 - 1 & -1 - 1 \end{vmatrix} = 0$, тј. $\pi: \begin{vmatrix} x - 1 & y - 1 & z - 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$.

Када развијемо детерминанту по првој врсти добијамо $+(x - 1) \cdot (4 - 2) - (y - 1) \cdot (2 - 1) + (z - 1) \cdot (-2 - (-2)) = 0$. $2x - 2 - (y - 1) = 0$, тј. раван која садржи тачке A , B и C је $\pi: 2x - y - 1 = 0$. ■

Решење 3. Ако су вектори $\vec{a} = \overrightarrow{AC} = (x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A) = (1, 2, -2)$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BC} = (2, 4, -3)$ дати преко својих координата онда је вектор нормале на раван одређену тачкама A , B и C дат са

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \vec{i} - 1 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} = (2, -1, 0).$$

Једначина равни која има вектор нормале $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ и пролази кроз тачку $A(x_A, y_A, z_A)$ је

$$\pi: n_x \cdot (x - x_A) + n_y \cdot (y - y_A) + n_z \cdot (z - z_A) = 0.$$

$2 \cdot (x - 1) - 1 \cdot (y - 1) + 0 \cdot (z - 1) = 0$. Тражена раван је $\pi: 2x - y - 1 = 0$. ■

2. 4.5. Наћи једначину равни која садржи тачку $A(2, -1, 1)$ и нормална је на равнима $\alpha: 3x + 2y - z + 4 = 0$ и $\beta: x + y + z - 3 = 0$.

Решење 1. Раван $\alpha: 3x + 2y - z + 4 = 0$ има вектор нормале $\vec{n}_\alpha = (3, 2, -1)$, док раван $\beta: x + y + z - 3 = 0$ има вектор нормале $\vec{n}_\beta = (1, 1, 1)$. Како је тражена раван π нормална и на раван α и на раван β , то и њен вектор нормале \vec{n}_π мора бити нормалан на векторе нормала $\vec{n}_\alpha = (3, 2, -1)$ и $\vec{n}_\beta = (1, 1, 1)$, тј. $\vec{n}_\pi \perp \vec{n}_\alpha$ и $\vec{n}_\pi \perp \vec{n}_\beta$. Стога је најпогодније да узмемо да је $\vec{n}_\pi = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta$, односно

$$\vec{n}_\pi = (3, 2, -1) \times (1, 1, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3, -4, 1).$$

Даље, исто као у Решењу 3 претходног задатка добијамо раван π ако знамо њен вектор нормале \vec{n}_π и једну тачку A : $3 \cdot (x - 2) - 4 \cdot (y - (-1)) + 1 \cdot (z - 1) = 0$. Тражена раван је $\pi: 3x - 4y + z - 11 = 0$. ■

Решење 2. Како је тражена раван π нормална и на раван α и на раван β , то она мора бити нормална и на праву p која је пресек равни α и β , тј. $\pi \perp p$. Права p припада и равни α и β , па је она решење система

$$\begin{array}{rclcl} \alpha: & 3x & + & 2y & - & z & = & -4 \\ \beta: & x & + & y & + & z & = & 3. \end{array}$$

Решење овог система је $(x, y, z) = (3t - 10, 13 - 4t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, што је права p задата у параметарском облику. Пребацимо је на канонски облик: $p: \frac{x + 10}{3} = \frac{y - 13}{-4} = \frac{z}{1} = t$, те је вектор правца праве p једнак $\vec{v}_p = (3, -4, 1)$. Како је $\pi \perp p$ то за вектор нормале на раван π баш можемо узети вектор правца праве p , тј. $\vec{n}_\pi = \vec{v}_p = (3, -4, 1)$. Даље, исто као и у претходном решењу добијамо да је $\pi: 3x - 4y + z - 11 = 0$. ■

3. сличан са 4.9. Испитати узајамни положај равни α и β (ако су α и β паралелне израчунати растојање између њих, $d(\alpha, \beta)$, а ако се секу израчунати угао који заклапају, $\angle(\alpha, \beta)$) ако је:

а) $\alpha: x - y + 1 = 0$ и $\beta: y - z + 1 = 0$;

б) $\alpha: x - 2y + z - 1 = 0$ и $\beta: 2x - 4y + 2z - 1 = 0$.

Упутства. а) Како су вектори нормала $\vec{n}_\alpha = (1, -1, 0)$ и $\vec{n}_\beta = (0, 1, -1)$ линеарно независни (јер не важи $\vec{n}_\alpha = k \cdot \vec{n}_\beta$) имамо да ове 2 равни нису паралелне. Угао φ који образују дат је са

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|} = \frac{|-1|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

б) У овом случају су равни паралелне јер је $\vec{n}_\alpha = (1, -2, 1) = \frac{1}{2}\vec{n}_\beta = \frac{1}{2}(2, -4, 2)$. Растојање између равни α и равни β једнако је растојању произвољне тачке A равни α до равни β . Произвољну тачку A равни $\alpha: x - 2y + z - 1 = 0$ можемо добити тако што фиксирамо 2 координате, нпр. $y = z = 0$, и онда из једначине равни одредимо трећу: $x = 1$. Растојање тачке $A(1, 0, 0)$ од равни $\beta: 2x - 4y + 2z - 1 = 0$ дато је обрасцем

$$d(A, \beta) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|2 \cdot 1 - 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{24}}.$$

Коначно имамо да је $d(\alpha, \beta) = d(A, \beta) = \frac{1}{\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{6}}{12}$. ■

4. 4.11. Одредити једначину равни π која садржи пресек равни $\alpha: x + 2y + 3z - 4 = 0$ и $\beta: 3x + z - 5 = 0$ и која на координатним осама Oy и Oz одсеца подударне одсечке.

Решење. Једначина равни (тачније снопа равни) која пролази кроз пресечну праву двеју равни $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ и $\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ је

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + \lambda(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0.$$

Стога је тражена раван $\pi: x + 2y + 3z - 4 + \lambda(3x + z - 5) = 0$, односно

$$\pi: (1 + 3\lambda)x + 2y + (3 + \lambda)z + (-4 - 5\lambda) = 0.$$

Одсечак на оси Oy добијамо кад заменимо $x = z = 0$ и нађемо колико је y : $y = \frac{4 + 5\lambda}{2}$.

Одсечак на оси Oz добијамо кад заменимо $x = y = 0$ и нађемо колико је z : $z = \frac{4 + 5\lambda}{3 + \lambda}$.

Како су ови одсечци једнаке дужине имамо 2 могућа случаја:

$$1^\circ \frac{4+5\lambda}{2} = \frac{4+5\lambda}{3+\lambda}, \text{ за } 4+5\lambda \neq 0 \text{ имамо } 2 = 3+\lambda \Rightarrow \lambda = -1, \text{ па је } \pi_1: -2x+2y+2z+1=0.$$

$$2^\circ \frac{4+5\lambda}{2} = -\frac{4+5\lambda}{3+\lambda}, \text{ за } 4+5\lambda \neq 0 \text{ имамо } 2 = -3-\lambda \Rightarrow \lambda = -5, \text{ па је } \pi_2: -14x+2y-2z+21=0.$$

Уколико је $4+5\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{4}{5}$, па је $\pi_3: -\frac{7}{5}x+2y+\frac{11}{5}z=0$, односно када све помножимо са 5 добијамо $\pi_3: -7x+10y+11z=0$.

Услове задатка задовољавају 3 равни: $\pi_1: -2x+2y+2z+1=0$, $\pi_2: -14x+2y-2z+21=0$ и $\pi_3: -7x+10y+11z=0$. ■

Напомена. Права p која се налази у пресеку равни $\alpha: x+2y+3z-4=0$ и $\beta: 3x+z-5=0$ је дата у параметарском облику са $x=t$, $y=-\frac{11}{2}+4t$, $z=5-3t$, $t \in \mathbb{R}$.

5. 4.15. Одредити праву q која садржи тачку $A(-1, 3, -2)$ и паралелна је правој $p: \begin{cases} 3x-y+2z-7=0 \\ x+3y-2z-3=0 \end{cases}$.

Решење. Паралелне праве имају пропорционалне векторе правца, тј. важи $\vec{v}_q = k \cdot \vec{v}_p$. Када решимо систем

$$\begin{cases} 3x-y+2z-7=0 \\ x+3y-2z-3=0 \end{cases}$$

добијамо да је права p у параметарском облику дата са $x=-\frac{2}{5}t+\frac{18}{5}$, $y=\frac{4}{5}t-\frac{1}{5}$, $z=t$, $t \in \mathbb{R}$, а у канонском са

$$p: \frac{x-\frac{18}{5}}{-\frac{2}{5}} = \frac{y+\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{z}{1},$$

одакле добијамо да је вектор правца $\vec{v}_p = (-\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1)$. Како су вектори \vec{v}_p и \vec{v}_q пропорционални можемо узети да је $k=5$ (да не би имали разломке) и онда је $\vec{v}_q = (-2, 4, 5)$. Једначина праве q која има вектор правца $\vec{v}_q = (-2, 4, 5)$ и садржи тачку $A(-1, 3, -2)$ је $q: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+2}{5}$. ■

6. Одредити праву r која садржи тачку $A(3, 2, -5)$ и вектор правца јој је нормалан на праве $p: \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-1}{1}$ и $q: \frac{x+2}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z+1}{-3}$.

Упутства. Вектори правца су $\vec{v}_p = (3, -2, 1)$ и $\vec{v}_q = (2, 3, -3)$. Због $\vec{v}_r \perp \vec{v}_p$ и $\vec{v}_r \perp \vec{v}_q$ можемо узети

$$\vec{v}_r = \vec{v}_p \times \vec{v}_q = (3, 11, 13).$$

Како права r садржи тачку A добијамо да је $r: \frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{11} = \frac{z+5}{13}$. ■

7. сличан са 4.27. Дате су праве $p: \frac{x+2}{1} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z+4}{1}$ и $q: \frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z+3}{\lambda}$, ($\lambda \in \mathbb{R}$).

а) Одредити вредност реалног параметра λ тако да се праве p и q секу.

б) За вредност λ одређену у делу под а) одредити меру оштрог угла који граде праве p и q , као и једначину равни коју одређују ове праве.

Решење. **а)** Потребан услов да се непаралелне праве $\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$ и $\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$ секу јесте

$$\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

За праве p и q добијамо $\begin{vmatrix} (-2)-2 & 5-(-5) & (-4)-(-3) \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = 6\lambda+6=0$, одакле је $\lambda = -1$.

б) Угао φ између правих p и q које се секу је дат са $\cos \varphi = \frac{|\vec{v}_p \cdot \vec{v}_q|}{|\vec{v}_p| \cdot |\vec{v}_q|}$. Како су вектори правца ових правих $\vec{v}_p = (1, -4, 1)$ и $\vec{v}_q = (2, -2, -1)$ добијамо да је

$$\vec{v}_p \cdot \vec{v}_q = (1, -4, 1) \cdot (2, -2, -1) = 2 + 8 - 1 = 9, \quad |\vec{v}_p| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 1^2} = 3\sqrt{2}, \quad |\vec{v}_q| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 3,$$

па је $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, што повлачи да је угао између правих $\varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$.

Раван π која садржи праве p и q има вектор нормале \vec{n}_π који је нормалан и на праве p и q , па је $\vec{n}_\pi \perp \vec{v}_p$ и $\vec{n}_\pi \perp \vec{v}_q$, те можемо узети да је $\vec{n}_\pi = \frac{1}{3}\vec{v}_p \times \vec{v}_q$, тј.

$$\vec{n}_\pi = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(6\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}) = (2, 1, 2).$$

Раван π садржи $P(-2, 5, -4)$ са p , па је $\alpha: 2 \cdot (x - (-2)) + 1 \cdot (y - 5) + 2 \cdot (z - (-4)) = 0$, тј. $2x + y + 2z + 7 = 0$. ■

Напомена. Део под а) смо могли да решимо тако што бисмо тражили пресечну тачку правих p и q . Како је права p у канонском облику $p: \frac{x+2}{1} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z+4}{1} = t$, она је у параметарском облику

$$x = -2 + t, \quad y = 5 - 4t, \quad z = -4 + t,$$

док је $q: \frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z+3}{\lambda} = s$ у параметарском облику

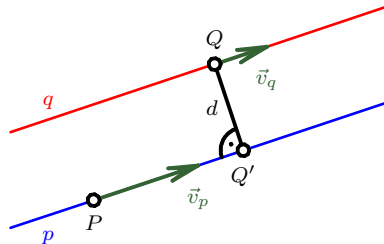
$$x = 2 + 2s, \quad y = -5 - 2s, \quad z = -3 + \lambda s.$$

Пресечна тачка T припада обема правима па за њу важи

$$x = -2 + t = 2 + 2s, \quad y = 5 - 4t = -5 - 2s, \quad z = -4 + t = -3 + \lambda s.$$

Из I и II једначине добијамо да је $t = 2$ и $s = -1$, што кад заменимо у III даје $-4 + 2 = -3 + \lambda \cdot (-1)$, тј. $\lambda = -1$. Приметимо да смо овако добили и координате пресечне тачке $T(0, -3, -2)$, док смо првим начином само утврдили да се ове праве секу.

8. сличан са 4.30. Израчунати растојање између правих $p: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{2}$ и $q: \begin{cases} 2x + y - 2z - 1 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases}$.



Слика уз задатак 8.

Упутства. Из канонског облика праве p налазимо вектор правца $\vec{v}_p = (1, 2, 2)$ и једну њену тачку $P(3, -1, 2)$.

Правна q у параметарском облику је $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t$, $y = t$, $z = t$ ($t \in \mathbb{R}$), па је вектор правца $\vec{v}_q = (\frac{1}{2}, 1, 1)$. Како је $\vec{v}_q = \frac{1}{2}\vec{v}_p$ добијамо да су праве p и q паралелне. За неку конкретну вредност параметра t , нпр. $t = -1$, добијамо тачку $Q(0, -1, -1)$ са праве q . Растојање од праве q до праве p је једнако растојању од тачке Q до праве p , тј.

$d(q, p) = d(Q, p) = \frac{|\vec{v}_p \times \overrightarrow{PQ}|}{|\vec{v}_p|}$. $\overrightarrow{PQ} = (-3, 0, -3)$ па је $\vec{v}_p \times \overrightarrow{PQ} = (-6, -3, 6) \Rightarrow |\vec{v}_p \times \overrightarrow{PQ}| = 9$. Још је $|\vec{v}_p| = 3$, па је тражено растојање $d(q, p) = d(Q, p) = \frac{9}{3} = 3$. ■

Напомена. Задатак смо могли решити и тако што би одредили пројекцију P' тачке P на праву q . Исто као у претходном начину би добили $\vec{v}_p = (1, 2, 2)$ и $P(3, -1, 2)$, као и $q: x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t$, $y = t$, $z = t$ ($t \in \mathbb{R}$). Како $P' \in q$ имамо да је $P'(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t, t, t)$, одакле је $\overrightarrow{PP'} = (\frac{1}{2}t - \frac{5}{2}, t + 1, t - 2)$. Из услова $\overrightarrow{PP'} \perp \vec{v}_p$, тј. $\overrightarrow{PP'} \cdot \vec{v}_p = 0$ имамо

$$\overrightarrow{PP'} \cdot \vec{v}_p = \frac{1}{2}t - \frac{5}{2} + 2t + 2 + 2t - 4 = 0.$$

Добијамо $t = 1$, па је $P'(1, 1, 1)$. Коначно је $d(p, q) = |\overrightarrow{PP'}| = |(-2, 2, -1)| = \sqrt{9} = 3$.

9. сличан са 4.47. Израчунати растојање између правих p : $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ и q : $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$.

Решење 1. Праве p и q нису паралелне јер им вектори правца $\vec{v}_p = (1, 1, 2)$ и $\vec{v}_q = (1, 3, 4)$ нису пропорционални.

Слично као и у Задатку 7 из детерминанте $\begin{vmatrix} (-1) - 0 & 0 - (-1) & 1 - 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ добијамо да се праве p и q не секу. Како оне нису паралелне и не секу се оне су мимоилазне.

Растојање између две мимоилазне праве p и q (p је дата тачком $P(-1, 0, 1)$ и вектором правца $\vec{v}_p = (1, 1, 2)$, а q са $Q(0, -1, 2)$ и $\vec{v}_q = (1, 3, 4)$) дато је обрасцем $d(p, q) = \frac{|(\vec{v}_p \times \vec{v}_q) \cdot \overrightarrow{PQ}|}{|\vec{v}_p \times \vec{v}_q|}$. Како је $\vec{v}_p \times \vec{v}_q = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-2, -2, 2)$ имамо да је $(\vec{v}_p \times \vec{v}_q) \cdot \overrightarrow{PQ} = (-2, -2, 2) \cdot (1, -1, 1) = 2$ и $|\vec{v}_p \times \vec{v}_q| = 2\sqrt{3}$, па је растојање $d(p, q) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. ■

Решење 2. Произвољна тачка T са праве p дата је са $x = t - 1$, $y = t$, $z = 2t + 1$ ($t \in \mathbb{R}$), односно $T(t - 1, t, 2t + 1)$ и слично је $S(s, 3s - 1, 4s + 2)$ произвољна тачка са праве q , па је $\overrightarrow{TS} = (s - t + 1, 3s - t - 1, 4s - 2t + 1)$. Растојање између правих p и q је

$$\begin{aligned} d(p, q) &= \min d(T, S) = \min |\overrightarrow{TS}| = \min \sqrt{(s - t + 1)^2 + (3s - t - 1)^2 + (4s - 2t + 1)^2} \\ &= \min \sqrt{26s^2 - 24st + 4s + 6t^2 - 4t + 3} = \sqrt{\min(26s^2 - 24st + 4s + 6t^2 - 4t + 3)}. \end{aligned}$$

Квадратни тринوم $26s^2 + (4 - 24t)s + (6t^2 - 4t + 3)$ има коефицијент $a = 26 > 0$ ($b = 4 - 24t$ и $c = 6t^2 - 4t + 3$) па се минимум достиже за $s = -\frac{b}{2a} = -\frac{4 - 24t}{52} = \frac{6t - 1}{13}$ и тај минимум је

$$26 \left(\frac{6t-1}{13}\right)^2 + (4 - 24t) \cdot \frac{6t-1}{13} + (6t^2 - 4t + 3) = \frac{6}{13}t^2 - \frac{28}{13}t + \frac{37}{13}.$$

Минимум израза $\frac{6}{13}t^2 - \frac{28}{13}t + \frac{37}{13}$ се достиже за $t = -\frac{b}{2a} = -\frac{-\frac{28}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{7}{3}$ и он је једнак $\frac{6}{13} \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^2 - \frac{28}{13} \cdot \frac{7}{3} + \frac{37}{13} = \frac{1}{3}$.

Коначно добијамо да је $d(p, q) = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. ■

Напомена 1. Дискусија у овом решењу ће ићи мало лакше ако користимо изводе за тражење минимума функције или методе за тражење екстрема функција више променљивих (на ФОН-у се уче у Математици 2).

Напомена 2. На овај начин смо одредили и координате тачке T са p и тачке S са q које су на том минималном одстојању. За $t = \frac{7}{3}$ добијамо $T(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{17}{3})$ и $s = \frac{6t-1}{13} = 1$ одређује $S(1, 2, 6)$.

Решење 3. Одредимо праву n која је заједничка нормала праве p и праве q . Како је $n \perp p$, $n \perp q$ то и за њихове векторе правца важи $\vec{v}_n \perp \vec{v}_p$, $\vec{v}_n \perp \vec{v}_q$. Стога можемо узети да је $\vec{v}_n = \frac{1}{2}\vec{v}_p \times \vec{v}_q$ или неки колинеаран вектор. Како је

$$\vec{v}_p \times \vec{v}_q = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-2, -2, 2)$$

узећемо $\vec{v}_n = -\frac{1}{2}\vec{v}_p \times \vec{v}_q = -\frac{1}{2}(-2, -2, 2) = (1, 1, -1)$.

Одредили смо вектор правца праве n , али нам је потребно да одредимо и једну тачку на тој правој да бисмо имали једначину праве n .

Одредимо раван π која је одређена правима p и n . Њен вектор нормале је $\vec{n}_\pi \perp \vec{v}_p$ и $\vec{n}_\pi \perp \vec{v}_n$, па можемо узети да је $\vec{n}_\pi = \vec{v}_p \times \vec{v}_n$ или неки колинеаран вектор. Како је

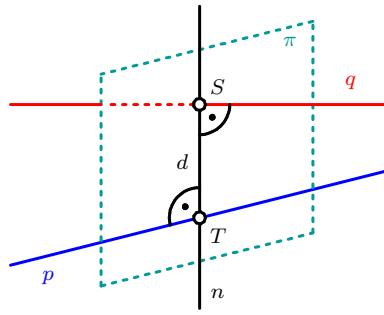
$$\vec{v}_p \times \vec{v}_n = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-3, 3, 0)$$

узећемо $\vec{n}_\pi = -\frac{1}{3}\vec{v}_p \times \vec{v}_n = -\frac{1}{3}(-3, 3, 0) = (1, -1, 0)$.

Како раван π садржи целу праву p она садржи и њену тачку $P(-1, 0, 1)$, па добијамо да је једначина равни π једнака $\pi: 1 \cdot (x - (-1)) - 1 \cdot (y - 0) + 0 \cdot (z - 1) = 0$, односно

$$\pi: x - y + 1 = 0.$$

У пресеку равни π и праве q добијамо тачку S . Та тачка задовољава и једначину равни $\pi: x - y + 1 = 0$ и једначину праве q (најпогодније је да узмемо параметарски облик) $q: x = s$, $y = 3s - 1$, $z = 4s + 2$ ($s \in \mathbb{R}$). Стога имамо да је $x - y + 1 = s - (3s - 1) + 1 = -2s + 2 = 0$, одакле је $s = 1$, што даје тачку $S(1, 2, 6)$.



Слика уз задатак 9.

Да бисмо одредили тачку T поновићемо исти поступак: одредићемо раван σ која садржи праве q и n и у пресеку равни σ са правом p добијамо тачку T .

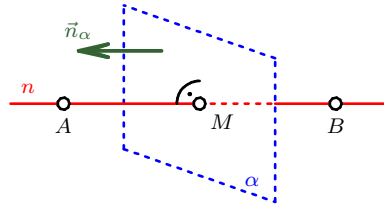
$$\vec{n}_\sigma = \vec{v}_p \times \vec{v}_n = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-7, 5, -2) \quad \text{и} \quad Q(0, -1, 2) \Rightarrow \sigma: -7(x-0) + 5(y-(-1)) - 2(z-2) = 0,$$

тј. $\sigma: -7x + 5y - 2z + 9 = 0$. Уврстимо овде параметарски задату праву $p: x = t - 1, y = t, z = 2t + 1$ и добијамо $-6t + 14 = 0$, тј. $t = \frac{7}{3}$, чиме смо одредили тачку $T(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{17}{3})$.

Тражено растојање између праве p и q је једнако растојању тачке $T(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{17}{3})$ и тачке $S(1, 2, 6)$, што је интензитет вектора \vec{ST} , тј. $d(p, q) = d(T, S) = |\vec{ST}| = |(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3})| = \sqrt{(\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2 + (-\frac{1}{3})^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. ■

Напомена 3. Након што смо одредили $S(1, 2, 6)$, собзиром да смо пре нашли $\vec{v}_n = (1, 1, -1)$, могли смо да одредимо једначину заједничке нормале n на праве p и q — то је $n: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{-1}$. Даље смо тачку T могли да нађемо као пресек праве p и праве q .

10. сличан са 4.31. Одредити тачку B симетричну тачки $A(-1, 0, -1)$ у односу на раван $\alpha: 2x + y - z + 7 = 0$.



Слика уз задатак 10.

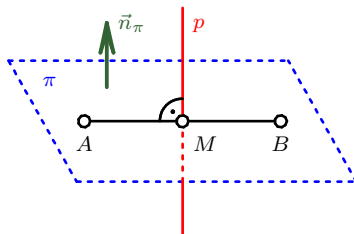
Решење. Да би одредили симетричну тачку B потребно је да прво одредимо пројекцију M тачке A на раван α . Вектор \vec{v}_n нормале n равни α је $\vec{v}_n = \vec{n}_\alpha = (2, 1, -1)$ и права n садржи тачку $A(-1, 0, -1)$. Стога је права n у параметарском облику $n: x = 2t - 1, y = t, z = -t - 1$. Када то заменимо у једначину равни α добијамо $2(2t - 1) + t - (-t - 1) + 7 = 0$, тј. $6t + 6 = 0$, односно $t = -1$, па је $M(-3, -1, 0)$.

За координате средишта M дужи AB важе једнакости

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad z_M = \frac{z_A + z_B}{2},$$

па одатле налазимо $x_B = 2x_M - x_A = -5, y_B = 2y_M - y_A = -2, z_B = 2z_M - z_A = 1$, тј. $B(-5, -2, 1)$. ■

11. сличан са 4.32. Одредити тачку B симетричну тачки $A(-1, 0, -1)$ у односу на $p: \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-4}{2}$.



Слика уз задатак 11.

Упутства. Нека раван π садржи тачку A и нормална је на праву p . Можемо узети да је њен вектор нормале $\vec{n}_\pi = \vec{v}_p = (1, 0, 2)$. Одатле добијамо да је $\pi: x + 2z + 3 = 0$. У пресеку праве p и равни π добијамо тачку $M(-3, 1, 0)$. На основу координата тачака A и M добијамо симетричну тачку $B(-5, 2, 1)$. ■

12. 2. испит октобар 2007. Дате су тачке $A(0, 2, -5)$, $B(5, 1, -4)$, $C(1, 3, -3)$ и $M(3, -7, 9)$. Одредити једначину равни којој припадају тачке A , B и C , а затим одредити пројекцију тачке M на ту раван.

Упутства. Раван која садржи тачке A , B и C је $\pi: x + 3y - 2z = 16$.

Нормала на раван π из тачке M је права $n: \frac{x-3}{1} = \frac{y+7}{3} = \frac{z-9}{-2} (=t)$, па се пројекција P тачке M на раван π добија за вредност параметра $t = \frac{26}{7}$, тј. $P(\frac{47}{7}, \frac{29}{7}, \frac{11}{7})$. ■

13. сличан са 4.36. Одредити једначину равни која садржи тачку $A(2, -3, 1)$ и паралелна је правама $p: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-1}{2}$ и $q: \frac{x-7}{2} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}$.

Упутства. За тражену раван α важи $\alpha \parallel p, \alpha \parallel q \Rightarrow \vec{n}_\alpha \perp \vec{v}_p, \vec{n}_\alpha \perp \vec{v}_q$. Стога можемо узети, нпр. да је $\vec{n}_\alpha = -\frac{1}{2}\vec{v}_p \times \vec{v}_q = (1, 1, 0)$. Одатле је $\alpha: 1 \cdot (x-2) + 1 \cdot (y-(-3)) + 0 \cdot (z-1) = 0$, односно $\alpha: x + y + 1 = 0$. ■

14. сличан са 4.47. Одредити једначину праве која садржи тачку $A(2, -3, 1)$ и сече праве $p: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-1}{2}$ и $q: \frac{x-7}{2} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}$. ■

Решење 1. Произвољну праву a кроз тачку A можемо представити као $a: \frac{x-2}{u} = \frac{y+3}{v} = \frac{z-1}{w}$ јер је $A(2, -3, 1)$, а можемо узети да је непознати вектор правца $\vec{v}_a = (u, v, w)$.

У задатку 7 смо се срили са условом да се две праве секу. Кад то искористимо за праве p и a добијамо

$$\begin{vmatrix} (-1)-2 & (-2)-(-3) & 1-1 \\ 3 & -3 & 2 \\ u & v & w \end{vmatrix} = 2u + 6v + 6w = 0.$$

Кад то искористимо за праве q и a добијамо

$$\begin{vmatrix} 7-2 & (-4)-(-3) & 1-1 \\ 2 & -2 & 2 \\ u & v & w \end{vmatrix} = -2u - 10v - 8w = 0.$$

Добили смо хомогени систем $\begin{matrix} 2u + 6v + 6w = 0 \\ -2u - 10v - 8w = 0 \end{matrix}$ и потребно нам је једно његово решење (јер нам треба само једна вредност за \vec{v}_a). Решавањем добијамо нпр. $w = -2$, $v = 1$, $u = 3$, тј. тражена права је $a: \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{-2}$. ■

Решење 2. Прво ћемо проверити да ли се непаралелне праве p и q секу (нису паралелне јер је $\vec{v}_q \neq \lambda \cdot \vec{v}_p$): $\begin{vmatrix} (-1)-7 & (-2)-(-4) & 1-1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \Rightarrow p$ и q се не секу (да смо добили да се секу тражена права a би пролазила кроз дату тачку A и кроз пресечну тачку T праве p и праве q).

Даље ћемо као у решењу 3 задатка 9 формирати раван π која садржи праве p и a , односно праву p и тачку A . Њу добијамо тако што узмемо тачку $P(-1, -2, 1)$ из канонског облика праве p и добијамо да је

$$\vec{n}_\pi = \vec{v}_p \times \overrightarrow{PA} = (3, -3, 2) \times (3, -1, 0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (2, 6, 6).$$

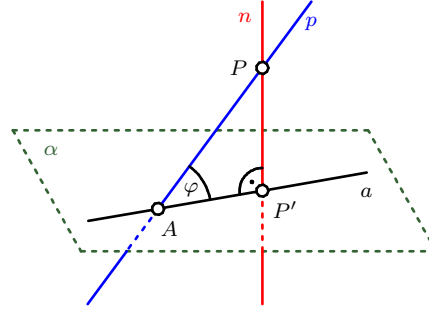
Раван π је одређена са \vec{n}_π и A , па је $\pi: 2 \cdot (x-2) + 6 \cdot (y-(-3)) + 6 \cdot (z-1) = 0$, односно $\pi: 2x + 6y + 6z + 8 = 0$. У пресеку равни π и праве q добијамо тачку S :

$$2 \cdot (2s + 7) + 6(-2s - 4) + 6(2s + 1) + 8 = 0 \Rightarrow 4s + 4 = 0 \Rightarrow s = -1 \Rightarrow S(5, -2, -1).$$

Тражена права a је права кроз тачке A и S , па можемо узети да је њен вектор правца $\vec{v}_a = \frac{1}{3}\overrightarrow{AS} = (3, 1, -2)$ и коначно добијамо да је $a: \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{-2}$. ■

15. Дата је раван $\alpha: x + y - z + 1 = 0$ и права $p: \frac{x-1}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$. Одредити

- а) пресечну тачку праве p и равни α ;
 б) меру угла између праве p и равни α .



Слика уз задатак 16.

Решење 1. а) Права p у параметарском облику је $p: x = 1, y = 2t, z = t - 1$, што кад уврстимо у једначину равни α добијамо $1 + 2t - (t - 1) + 1 = 0$, односно $t = -3$, па је пресечна тачка $A(1, -6, -4)$.

б) Узмимо једну тачку P са праве p (различиту од продора A) и одредимо њену пројекцију P' на раван α . Узећемо $P(1, 0, -1)$ која је дата канонским обликом једначине праве p . Права n нормална на раван α и која пролази кроз тачку P има вектор правца $\vec{v}_n = \vec{n}_\alpha = (1, 1, -1)$, па је $n: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$, тј. $n: x = s + 1, y = s, z = -s - 1$. Када ово уврстимо у једначину равни α добијамо $s = -1$, тј. $P'(0, -1, 0)$.

Сада из правоуглог троугла $\triangle AP'P$ добијамо да је тражени угао φ одређен са

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{P'A}|}{|\vec{PA}|} = \frac{|(-1, 5, 4)|}{|(0, 6, 3)|} = \frac{\sqrt{42}}{\sqrt{45}} = \sqrt{\frac{14}{15}},$$

одакле је $\varphi = \arccos \sqrt{\frac{14}{15}}$. ■

Напомена 1. Да нам се тражила пројекција праве p на раван α , задатак би потпуно исто радили, само што би још тражену пројекцију (што је права a на горњој слици) одредили као праву кроз тачке A и P' .

Решење 2. а) Овај део задатка решавамо исто као малопре.

б) Угао φ између праве p и равни α (које се секу), чији су вектори правца \vec{v}_p и нормале \vec{n}_α дат је са:

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{v}_p \cdot \vec{n}_\alpha|}{|\vec{v}_p| \cdot |\vec{n}_\alpha|}.$$

Како је $\vec{v}_p = (0, 2, 1)$ и $\vec{n}_\alpha = (1, 1, -1)$ добијамо да је $\sin \varphi = \frac{|1|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{15}}$, тј. $\varphi = \arcsin \frac{1}{\sqrt{15}}$. ■

Напомена 2. У ова два начина је одређен потпуно исти угао, само је он другачије записан. То можемо проверити јер за сваки угао важи $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, а како је $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ то је и $0 \leq \sin \varphi \leq 1$ и $0 \leq \cos \varphi \leq 1$. Тј. из

$$\cos \varphi = \sqrt{\frac{14}{15}} \Rightarrow \sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{1 - \frac{14}{15}} = \frac{1}{\sqrt{15}}.$$