

2. Линеарна алгебра

Овде је дат кратак преглед IV двочаса вежби. Потребно је да обновите одговарајућу теоријску материју која је обрађена на предавањима и у уџбенику.

Како се највећим делом на вежбама раде задаци из збирке, након броја задатка плавом бојом је означен број задатка у збирци "Методичка збирка решених задатака из Математике 1" аутора Владимира Балтића и Оливере Мизић у форми $x.z.$, где је x број главе, а z број задатка у тој глави. Ови задаци са оним са писмених и колоквијума од претходних година чине целину довољну за припрему ове области.

2.2. Системи линеарних једначина

$$\begin{array}{rclcrcl} x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ 1. \text{ Испитати сагласност и решити систем линеарних једначина} & x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & 3x & + & 3y & + & z & = & 2. \end{array}$$

Решење 1. Детерминанта система Δ и остале детерминанте које се јављају у Крамеровим формулама ($\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$) су једнаке:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3.$$

Како је $\Delta = 0$ и $\Delta_x = 5 \neq 0$ систем нема решења. ■

Напомена. Овде нисмо ни морали да одређујемо Δ_y и Δ_z јер смо већ на основу Δ и Δ_x добили да систем нема решења.

Решење 2. Решаваћемо систем Гаусовим системом елиминације:

$$\begin{array}{rclcrcl} x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & = & 1 & \text{II} - \text{I} \\ 3x & + & 3y & + & z & = & 2 & \text{III} - 3 \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcrcl} x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ & & 3y & - & 4z & = & 0 \\ & & 6y & - & 8z & = & -1 & \text{III} - 2 \cdot \text{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcrcl} x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ & & 3y & - & 4z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & -1 & \text{IV} \end{array}$$

Како је III једначина $0 = -1 \neq 0$, та једначина нема решења, па и цео систем нема решења. ■

$$\begin{array}{rclcrcl} x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ 2. \text{ Испитати сагласност и решити систем линеарних једначина} & x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & 3x & + & 3y & + & z & = & 3. \end{array}$$

Решење. Како су све детерминанте $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ систем МОРАМО решавати Гаусовим системом елиминације.

$$\begin{array}{rclcrcl} x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & = & 1 & \text{II} - \text{I} \\ 3x & + & 3y & + & z & = & 3 & \text{III} - 3 \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcrcl} x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ & & 3y & - & 4z & = & 0 \\ & & 6y & - & 8z & = & 0 & \text{III} - 2 \cdot \text{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcrcl} x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ & & 3y & - & 4z & = & 0 \\ & & & & \cancel{0} & - & \cancel{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcrcl} x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ & & 3y & - & 4z & = & 0 \end{array}$$

Добили смо систем у степенастом облику, у коме су променљиве x и y везане (оне су на почетку једначина), док је преостала променљива, z слободна и њој додељујемо вредност параметра:

$$z = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Стога овај систем има вишеструко решење које зависи од 1 параметра. Даље, y добијамо из II једначине: $y = -\frac{4}{3}\alpha$. Коначно када z и y уврстимо у I једначину добијамо $x = 1 - \frac{5}{3}\alpha$.

Систем има вишеструко решење које зависи од 1 параметра: $(x, y, z) = \left(1 - \frac{5}{3}\alpha, \frac{4}{3}\alpha, \alpha\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. ■

Напомена. Како је параметар α произвољан реалан број, ми смо могли да узмемо да је $\alpha = 3t$ и добили би "лепше" решење $(x, y, z) = (1 - 5t, 4t, 3t)$, $t \in \mathbb{R}$.

3. Испитати сагласност и решити систем линеарних једначина

$$\begin{array}{rclcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & + & z & = & 3. \end{array}$$

Решење. Када у Гаусовом систему елиминације I једначину одузмемо и од II и од III добијамо еквивалентан систем

$$\begin{array}{rclcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & 0 & = & 1 & & \\ & & 0 & = & 2 & & \end{array}$$

Било због II било због III једначине овај систем нема решења. ■

Напомена. Иако су све детерминанте $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ систем нема решења.

4. У зависности од реалног параметра a одредити фундаментални систем решења и опште решење система

$$\begin{array}{rclcrcl} 3x & - & 2y & + & 5z & + & au & = & 0 \\ 6x & - & ay & + & 4z & + & 3u & = & 0 \\ 9x & - & 6y & + & 3z & + & 2u & = & 0. \end{array}$$

Решење. Овај систем има 3 једначине и 4 непознате (x, y, z, u) те се не може решавати преко детерминанти, него мора Гаусовим системом елиминације (или помоћу Кејли-Хамилтонове теореме, што је другачији запис Гаусовог система елиминације)!

$$\begin{array}{rclcrcl} 3x & - & 2y & + & 5z & + & au & = & 0 \\ 6x & - & ay & + & 4z & + & 3u & = & 0 & \text{II} - 2 \cdot \text{I} \\ 9x & - & 6y & + & 3z & + & 2u & = & 0 & \text{III} - 3 \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcrcl} 3x & - & 2y & + & 5z & + & au & = & 0 \\ & & (4-a)y & - & 6z & + & (3-2a)u & = & 0 \\ & & & & -12z & + & (2-3a)u & = & 0 \end{array}$$

Сада имамо 2 случаја у зависности од тога да ли је члан $4-a$ једнак или различит од 0 (ако је једнак онда нам се квари "степнице").

1° За $a \neq 4$ претходни систем је у степенастом облику и променљиве x , y и z су везане, док је u слободна и њој додељујемо вредност параметра $u = t$, $t \in \mathbb{R}$. Враћањем уназад добијамо вредности осталих променљивих: $z = \frac{2-3a}{12}t$, $y = \frac{1}{2}t$ и $\frac{3a-22}{36}t$. Дакле имамо да је решење

$$(x, y, z, u) = \left(\frac{3a-22}{36}t, \frac{1}{2}t, \frac{2-3a}{12}t, t\right) = t \cdot \left(\frac{3a-22}{36}, \frac{1}{2}, \frac{2-3a}{12}, 1\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Вектор $X_1 = \left(\frac{3a-22}{36}, \frac{1}{2}, \frac{2-3a}{12}, 1\right)$ се назива фундаментално решење система.

2° Када је $a = 4$ претходни систем се своди на:

$$\begin{array}{rcll}
 3x & - & 2y & + & 5z & + & 4u & = & 0 \\
 & & & - & 6z & - & 5u & = & 0 \\
 & & & - & 12z & - & 10u & = & 0 & \text{III} - 2 \cdot \text{II} \\
 \hline
 3x & - & 2y & + & 5z & + & 4u & = & 0 \\
 & & & - & 6z & - & 5u & = & 0 \\
 & & & & & & \cancel{0} & = & \cancel{0} \\
 \hline
 3x & - & 2y & + & 5z & + & 4u & = & 0 \\
 & & & - & 6z & - & 5u & = & 0
 \end{array}$$

Ово је систем у степенастом облику, у коме су променљиве x и z везане, а остале, y и u су слободне. Слободним променљивима доделимо вредности параметара:

$$y = t, \quad u = p, \quad t, p \in \mathbb{R}.$$

Даље, z добијамо из II једначине: $z = -\frac{5}{6}p$. Када z , y и u уврстимо у I добијамо $x = \frac{2}{3}t + \frac{1}{18}p$.

$$(x, y, z, u) = \left(\frac{2}{3}t + \frac{1}{18}p, t, -\frac{5}{6}p, p \right) = t \cdot \left(\frac{2}{3}, 1, 0, 0 \right) + p \cdot \left(\frac{1}{18}, 0, -\frac{5}{6}, 1 \right), \quad t, p \in \mathbb{R}.$$

Вектори $X_1 = \left(\frac{2}{3}, 1, 0, 0 \right)$ и $X_2 = \left(\frac{1}{18}, 0, -\frac{5}{6}, 1 \right)$ су фундаментална решења система.

Објединимо решења која су добијена у сваком од случајева у један коначан закључак:

1° За $a \neq 4$ има 1 фундаментално решење $X_1 = \left(\frac{3a-22}{36}, \frac{1}{2}, \frac{2-3a}{12}, 1 \right)$ које одређује опште решење $(x, y, z, u) = t \cdot X_1$, $t \in \mathbb{R}$.

2° За $a = 4$ има два фундаментална решења $X_1 = \left(\frac{2}{3}, 1, 0, 0 \right)$ и $X_2 = \left(\frac{1}{18}, 0, -\frac{5}{6}, 1 \right)$ која одређују опште решење $(x, y, z, u) = t \cdot X_1 + p \cdot X_2$, $t, p \in \mathbb{R}$.

■

Напомена. Када су сви слободни чланови једнаки 0, систем се назива *хомоген*. Хомоген систем УВЕК има решења (значи, или јединствено решење или вишеструко решење) јер је $(x, y, z, u) = (0, 0, 0, 0)$ решење хомогеног система. Ово решење се назива *тривијално решење*.

Решења хомогеног система чине векторски простор који је разапет фундаменталним решењима.

5. У зависности од реалних параметара a и b решити систем линеарних једначина

$$\begin{array}{rcl}
 2x & - & y & + & 3z & = & 2 \\
 x & + & 2y & + & z & = & -1 \\
 4x & + & 3y & + & az & = & 0 \\
 x & - & 3y & + & bz & = & a - 2.
 \end{array}$$

Решење. Овај систем има 4 једначине и 3 непознате па се не може решавати преко детерминанти, него мора Гаусовим системом елиминације!

$$\begin{array}{rcll}
 2x & - & y & + & 3z & = & 2 \\
 x & + & 2y & + & z & = & -1 \\
 4x & + & 3y & + & az & = & 0 \\
 x & - & 3y & + & bz & = & a - 2 & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \\
 \hline
 x & + & 2y & + & z & = & -1 \\
 2x & - & y & + & 3z & = & 2 & \text{II} - 2 \cdot \text{I} \\
 4x & + & 3y & + & az & = & 0 & \text{III} - 4 \cdot \text{I} \\
 x & - & 3y & + & bz & = & a - 2 & \text{IV} - \text{I} \\
 \hline
 x & + & 2y & + & z & = & -1 \\
 & - & 5y & + & z & = & 4 \\
 & - & 5y & + & (a-4)z & = & 4 & \text{III} - \text{II} \\
 & - & 5y & + & (b-1)z & = & a-1 & \text{IV} - \text{II}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl}
 x & + & 2y & + & z & = & -1 \\
 & & -5y & + & z & = & 4 \\
 & & & & (a-5)z & = & 0 \\
 & & & & (b-2)z & = & a-5
 \end{array}$$

Овај систем наликује на систем у степенастом облику (наликује јер би у последњој једначини морали да елиминишемо z), али не можемо да наставимо процес Гаусовог система елиминације јер не знамо да ли је неки од коефицијената $a-5$ или $b-2$ једнак 0. Стога ћемо имати следећа 3 случаја да разматрамо:

$$1^\circ \quad a \neq 5 \qquad 2^\circ \quad a = 5, b \neq 2 \qquad 3^\circ \quad a = 5, b = 2$$

(тачније, када решавамо задатак ми ћемо доћи прво до случаја $a \neq 5$ и $a = 5$, али се овај други онда дели на 2 подслучаја). Размотримо сада сваки од ових случајева понаособ.

1° Када је $a \neq 5$ можемо да наставимо процес елиминације променљивих:

$$\begin{array}{rclcl}
 x & + & 2y & + & z & = & -1 \\
 & & -5y & + & z & = & 4 \\
 & & & & (a-5)z & = & 0 \\
 & & & & (b-2)z & = & a-5
 \end{array} \quad \text{IV} - \frac{b-2}{a-5} \cdot \text{III}$$

$$\begin{array}{rclcl}
 x & + & 2y & + & z & = & -1 \\
 & & -5y & + & z & = & 4 \\
 & & & & (a-5)z & = & 0 \\
 & & & & 0 & = & a-5.
 \end{array} \quad \downarrow$$

Како смо добили једначину $0 = a - 5 \neq 0$ то систем у овом случају нема решења.

2° Када је $a = 5$ имамо да III једначина постаје $0 = 0$ и њу можемо потпуно обрисати:

$$\begin{array}{rclcl}
 x & + & 2y & + & z & = & -1 \\
 & & -5y & + & z & = & 4 \\
 & & & & \cancel{0} & = & \cancel{0} \\
 & & & & (b-2)z & = & 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl}
 x & + & 2y & + & z & = & -1 \\
 & & -5y & + & z & = & 4 \\
 & & & & (b-2)z & = & 0.
 \end{array}$$

Како је $b \neq 2$, добили смо систем у степенастом облику, у коме су све променљиве зависне, па овај систем има јединствено решење. Из III једначине добијамо да је $z = \frac{0}{b-2} = 0$. Када ово уврстимо у II добијамо $y = -\frac{4}{5}$. Коначно када z и y уврстимо у I добијамо $x = \frac{3}{5}$.

3° Када је $a = 5$ и $b = 2$ имамо да и III и IV једначина постају $0 = 0$ и их можемо избрисати:

$$\begin{array}{rclcl}
 x & + & 2y & + & z & = & -1 \\
 & & -5y & + & z & = & 4 \\
 & & & & \cancel{0} & = & \cancel{0} \\
 & & & & \cancel{0} & = & \cancel{0}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl}
 x & + & 2y & + & z & = & -1 \\
 & & -5y & + & z & = & 4
 \end{array}$$

Добили смо систем у степенастом облику, у коме су променљиве x и y везане, док је z слободна и њој додељујемо вредност параметра $z = t, t \in \mathbb{R}$. Даље, y добијамо из II једначине: $y = -\frac{4}{5} + \frac{1}{5}t$. Коначно када z и y уврстимо у I добијамо $x = \frac{3}{5} - \frac{7}{5}t$.

Лепо је објединити решења која су добијена у сваком од случајева у један коначан закључак:

1° За $a \neq 5$ систем нема решења.

2° За $a = 5$ и $b \neq 2$, систем има јединствено решење $(x, y, z) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 0\right)$.

3° За $a = 5$ и $b = 2$ систем има вишеструко решење које зависи од једног параметра

$$(x, y, z) = \left(\frac{3}{5} - \frac{7}{5}t, -\frac{4}{5} + \frac{1}{5}t, t\right), t \in \mathbb{R}.$$

■

6. У зависности од реалног параметра a решити систем линеарних једначина

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= a \\ x + y + az &= a^2. \end{aligned}$$

Решење 1. Задатак можемо решавати стандардним Гаусовим системом елиминације, или на следечи начин: сабирањем све три једначине добија се да је $(a+2)(x+y+z) = a^2 + a + 1$, те стога за $a \neq -2$ имамо да је:

$$x + y + z = \frac{a^2 + a + 1}{a + 2}.$$

Када то одузмемо од прве једначине добија се

$$(a-1)x = 1 - \frac{a^2 + a + 1}{a + 2} = \frac{1 - a^2}{a + 2}.$$

Ако је $a \neq 1$ можемо обе стране поделити са $a-1$ и тако добијамо решење за x . Слично се добијају и y и z (у овом случају је јединствено решење):

$$\text{за } a \neq -2 \text{ и } a \neq 1 \quad (x, y, z) = \left(-\frac{a+1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{(a+1)^2}{a+2}\right).$$

За $a = -2$ имамо систем

$$\begin{aligned} -2x + y + z &= 1 \\ x - 2y + z &= -2 \\ x + y - 2z &= 4 \end{aligned}$$

и када њему саберемо све три једначине добијамо $0 = 3$ па је стога систем несагласан, тј. нема решења. За $a = 1$ систем се свео на једну једначину

$$x + y + z = 1$$

и њено решење је $(x, y, z) = (1 - t - p, t, p)$ $t, p \in \mathbb{R}$.

■

Решење 2. Задатак ћемо решавати коришћењем детерминанти.

Уколико детерминанту система израчунамо Сарусовим правилом добијамо да је $\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2$. Али

тада имамо проблем са факторисањем овог полинома 3. степена (морали би из теорије полинома да користимо Теорему о рационалним нулама полинома са целобројним коефицијентима, Безуов став, да делимо полиноме и да факторишемо квадратни трином). Да бисмо избегли све то ми ћемо факторисати детерминанту током њеног рачунања, тј. користићемо особине детерминанти:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{II}-\text{I} \\ \text{III}-\text{I} \end{matrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1-a & a-1 & 0 \\ 1-a & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{I}+\text{II}+\text{III} \end{matrix} \\ &= (a-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{I}+\text{II}+\text{III} \end{matrix} = (a-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (a-1)^2 \cdot (a+2) \cdot 1 \cdot 1 = (a-1)^2(a+2). \end{aligned}$$

Одавде добијамо да имамо 3 различита случаја 1° $a \neq 1, -2$, 2° $a = -2$ и 3° $a = 1$.

На сличан начин можемо израчунати и остале детерминанте:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{vmatrix} = -(a-1)^2(a+1), \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a^2 & a \end{vmatrix} = (a-1)^2, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a^2 \end{vmatrix} = (a-1)^2(a+1)^2.$$

1° $a \neq 1, -2$. Како је $\Delta \neq 0$ систем има јединствено решење, које добијамо из Крамерових формула:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-(a-1)^2(a+1)}{(a-1)^2(a+2)} = -\frac{a+1}{a+2}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{(a-1)^2}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{1}{a+2}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{(a-1)^2(a+1)^2}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{(a+1)^2}{a+2}.$$

2° $a = -2$. Како је $\Delta = 0$ и $\Delta_x = 9 \neq 0$ систем нема решења.

3° $a = 1$. Како је $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ систем се своди на једну једначину са 3 непознате:

$$x + y + z = 1$$

и она има решење $(x, y, z) = (1 - \alpha - \beta, \alpha, \beta) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. ■