

II двочас вежби

мр Владимир Балтић

2. Линеарна алгебра

2.1. Детерминанте

Теоријски увод

ДЕФИНИЦИЈА:

Детерминанта матрице A , у ознаци

$$\det(A), \quad |A| \quad \text{или} \quad \det A,$$

ДЕФИНИЦИЈА:

Детерминанта матрице A , у ознаци

$$\det(A), \quad |A| \quad \text{или} \quad \det A,$$

је сума по свим пермутацијама σ из скупа \mathbf{S}_n :

$$|A| = \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)}.$$

Одредимо детерминанте малих димензија.

$$\left| a_{11} \right| =$$

Одредимо детерминанте малих димензија.

$$\begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} = a_{11}$$

Одредимо детерминанте малих димензија.

$$|a_{11}| = a_{11}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Одредимо детерминанте малих димензија.

$$\left| a_{11} \right| = a_{11}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22}$$

Одредимо детерминанте малих димензија.

$$\left| a_{11} \right| = a_{11}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Одредимо детерминанте малих димензија.

$$\left| a_{11} \right| = a_{11}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

За дет. 3×3 користимо *Сарусово правило*:

Одредимо детерминанте малих димензија.

$$|a_{11}| = a_{11}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

За дет. 3×3 користимо *Сарусово правило*:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Одредимо детерминанте малих димензија.

$$|a_{11}| = a_{11}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

За дет. 3×3 користимо *Сарусово правило*:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

За дет. 3×3 користимо *Сарусово правило*:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} +$$

$$D = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} & + & a_{12}a_{23}a_{31} & + & a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} & - & a_{11}a_{23}a_{32} & - & a_{12}a_{21}a_{33}. \end{matrix}$$

За дет. 3×3 користимо *Сарусово правило*:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} + \\ + \\ + \end{matrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$D = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} & + & a_{12}a_{23}a_{31} & + & a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} & - & a_{11}a_{23}a_{32} & - & a_{12}a_{21}a_{33}. \end{matrix}$$

За дет. 3×3 користимо *Сарусово правило*:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} + & + & + \\ - & - & - \\ + & + & + \end{matrix}$$

$$D = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} & + & a_{12}a_{23}a_{31} & + & a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} & - & a_{11}a_{23}a_{32} & - & a_{12}a_{21}a_{33} \end{matrix}.$$

За дет. 3×3 користимо *Сарусово правило*:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

За дет. 3×3 користимо *Сарусово правило*:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

—
—

$$D = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

За дет. 3×3 користимо *Сарусово правило*:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}$$

—
—
—

$$D = \begin{array}{ccccc} a_{11}a_{22}a_{33} & + & a_{12}a_{23}a_{31} & + & a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} & - & a_{11}a_{23}a_{32} & - & a_{12}a_{21}a_{33} \end{array}.$$

Детерминанте 4×4 , 5×5 ,...

МОРАЈУ

се рачунати

Лапласовим развојем

или

свођењем на детерминанту троугаоне матрице.

ОСНОВНЕ ОСОБИНЕ

1° Нека је A^T транспонована матрица матрице A . Тада је

$$|A^T| = |A|.$$

Транспонована матрица се добија тако што врсте матрице A постану колоне матрице A^T и обрнуто.

Транспонована матрица се добија тако што врсте матрице A постану колоне матрице A^T и обрнуто.

Пример 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & -6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Транспонована матрица се добија тако што врсте матрице A постану колоне матрице A^T и обрнуто.

Пример 1.

$$\begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & -6 \end{pmatrix}^T & = & \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \\ 2 \times 3 & & 3 \times 2 \end{matrix}$$

2° Ако A има врсту (колону) са свим елементима 0

$$|A| = 0.$$

2° Ако A има врсту (колону) са свим елементима 0

$$|A| = 0.$$

3° Ако A има две једнаке врсте (колоне)

$$|A| = 0.$$

2° Ако A има врсту (колону) са свим елементима 0

$$|A| = 0.$$

3° Ако A има две једнаке врсте (колоне)

$$|A| = 0.$$

4° Ако A има две пропорционалне врсте (колоне)

$$|A| = 0.$$

4° Ако A има две пропорционалне врсте
(колоне)

$$|A| = 0.$$

5° Ако је A *троугаона матрица*

$$|A| = \prod_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

(детерминанта је једнака производу елемената
са *главне дијагонале*).

5° Ако је A *троугаона матрица*

$$|A| = \prod_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

(детерминанта је једнака производу елемената са *главне дијагонале*).

6° Ако A и B имају пропорционалне елементе у некој врсти ($b_{ij} = m \cdot a_{ij}$), а остале врсте су им једнаке

$$|B| = m \cdot |A|.$$

6° Ако A и B имају пропорционалне елементе у некој врсти ($b_{ij} = m \cdot a_{ij}$), а остале врсте су им једнаке

$$|B| = m \cdot |A|.$$

7° Ако се B добија од A тако што у матрици A две врсте (колоне) замене места

$$|B| = -|A|.$$

7° Ако се B добија од A тако што у матрици A две врсте (колоне) замене места

$$|B| = -|A|.$$

8° Ако се B добија тако што у A i -тој врсти (колони) додамо j -ту врсту (колону) помножену бројем m

$$|B| = |A|.$$

8° Ако се B добија тако што у A i -тој врсти (колони) додамо j -ту врсту (колону) помножену бројем m

$$|B| = |A|.$$

9° *Минор* M_{ij} елемента a_{ij} се добија од A избацивањем i -те врсте и j -те колоне.

8° Ако се B добија тако што у A i -тој врсти (колони) додамо j -ту врсту (колону) помножену бројем m

$$|B| = |A|.$$

9° *Минор* M_{ij} елемента a_{ij} се добија од A избацивањем i -те врсте и j -те колоне.

Кофактор елемента a_{ij} квадратне матрице A је

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|.$$

9° *Минор* M_{ij} елемента a_{ij} се добија од A избацивањем i -те врсте и j -те колоне.

Кофактор елемента a_{ij} квадратне матрице A је

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|.$$

Лапласов развој по ел. i -те врсте

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in}.$$

9° *Минор* M_{ij} елемента a_{ij} се добија од A избацивањем i -те врсте и j -те колоне.

Кофактор елемента a_{ij} квадратне матрице A је

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|.$$

Лапласов развој по ел. i -те врсте

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in}.$$

Лапласов развој по ел. j -те колоне

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots + a_{nj} A_{nj}.$$

Знаке $(-1)^{i+j}$ можемо памтити као

+

—

+

—

+

—

+

—

+

ОДНОСНО

+

—

+

—

—

+

—

+

+

—

+

—

—

+

—

+

Задаци

1. 2.21.

Израчунати детерминанту

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a^2 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix},$$

при чему је $a^3 = 1$ и $a \neq 1$.

Решение 1. САРУСОВО ПРАВИЛО

$$D = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a^2 \\ a^2 & a & 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ a^2 & a \end{array} \right| =$$

Решение 1. САРУСОВО ПРАВИЛО

$$D = \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a^2 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 & a^2 & a \end{array} \right| =$$

$$1 \cdot 1 \cdot 1$$

Решение 1. САРУСОВО ПРАВИЛО

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a^2 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ a^2 & a \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot a^2 \cdot a^2$$

Решение 1. САРУСОВО ПРАВИЛО

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a^2 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ a^2 & a \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot a^2 \cdot a^2 + a \cdot 1 \cdot a$$

Решение 1. САРУСОВО ПРАВИЛО

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a^2 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ a^2 & a \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot a^2 \cdot a^2 + a \cdot 1 \cdot a - a \cdot 1 \cdot a^2$$

Решение 1. САРУСОВО ПРАВИЛО

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a^2 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ a^2 & a \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot a^2 \cdot a^2 + a \cdot 1 \cdot a - a \cdot 1 \cdot a^2 - 1 \cdot a^2 \cdot a$$

Решение 1. САРУСОВО ПРАВИЛО

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a^2 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ a^2 & a \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot a^2 \cdot a^2 + a \cdot 1 \cdot a - a \cdot 1 \cdot a^2 - 1 \cdot a^2 \cdot a - 1 \cdot 1 \cdot 1 =$$

Решение 1. САРУСОВО ПРАВИЛО

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a^2 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ a^2 & a \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot a^2 \cdot a^2 + a \cdot 1 \cdot a - a \cdot 1 \cdot a^2 - 1 \cdot a^2 \cdot a - 1 \cdot 1 \cdot 1 =$$

$$1 + a^4 + a^2 - a^3 - a^3 - 1 = a^4 - 2a^3 + a^2 =$$

Решение 1. САРУСОВО ПРАВИЛО

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a^2 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ a^2 & a \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot a^2 \cdot a^2 + a \cdot 1 \cdot a - a \cdot 1 \cdot a^2 - 1 \cdot a^2 \cdot a - 1 \cdot 1 \cdot 1 =$$

$$1 + a^4 + a^2 - a^3 - a^3 - 1 = a^4 - 2a^3 + a^2 =$$

$$a^3 \cdot a - 2 + a^2 = a - 2 + a^2 = 1 + a + a^2 - 3 =$$

Решение 1. САРУСОВО ПРАВИЛО

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a^2 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ a^2 & a \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot a^2 \cdot a^2 + a \cdot 1 \cdot a - a \cdot 1 \cdot a^2 - 1 \cdot a^2 \cdot a - 1 \cdot 1 \cdot 1 =$$

$$1 + a^4 + a^2 - a^3 - a^3 - 1 = a^4 - 2a^3 + a^2 =$$

$$a^3 \cdot a - 2 + a^2 = a - 2 + a^2 = 1 + a + a^2 - 3 =$$

$$(1 + a + a^2) \cdot \frac{1 - a}{1 - a} - 3 = \frac{1 - a^3}{1 - a} - 3 = 0 - 3 = -3.$$



Решење 2. ОСОБИНЕ ДЕТЕРМИНАНТИ

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a^2 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{II}-\text{I}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & a^2 - a \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} =$$

Решење 2. ОСОБИНЕ ДЕТЕРМИНАНТИ

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a^2 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} \text{ II-I} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & a^2 - a \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} =$$

Лапласов развој по II врсти:

+	-	+
-	+	-
+	-	+

$$D = -0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & a \\ a^2 & 1 \end{vmatrix} - (a^2 - a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a^2 & a \end{vmatrix} =$$

Решење 2. ОСОБИНЕ ДЕТЕРМИНАНТИ

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a^2 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{II}-\text{I}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & a^2 - a \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} =$$

Лапласов развој по II врсти.

$$D = -0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & a \\ a^2 & 1 \end{vmatrix} - (a^2 - a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a^2 & a \end{vmatrix} =$$

$$-(a^2 - a) \cdot (a - a^2) = (a^2 - a)^2 = a^4 - 2a^3 + a^2 =$$

$$\dots = -3.$$



2. 2.4.

Користећи Лапласов развој израчунати

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

Решење. Лапласов развој по II колони
(јер она има 2 елемента 0):

$$\begin{array}{cccc}
 + & - & + & - \\
 - & + & - & + \\
 + & - & + & - \\
 - & + & - & +
 \end{array}
 \quad
 D = \begin{vmatrix}
 3 & 1 & 2 & 3 \\
 4 & 0 & 2 & 4 \\
 1 & 0 & 1 & 1 \\
 4 & -1 & 0 & 5
 \end{vmatrix} =$$

Решење. Лапласов развој по II колони
(јер она има 2 елемента 0):

$$\begin{array}{cccc}
 + & - & + & - \\
 - & + & - & + \\
 + & - & + & - \\
 - & + & - & +
 \end{array}
 \quad D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$-1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} + 0 - 0 + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

Решење. Лапласов развој по II колони
(јер она има 2 елемента 0):

$$\begin{array}{cccc}
 + & - & + & - \\
 - & + & - & + \\
 + & - & + & - \\
 - & + & - & +
 \end{array}
 \quad D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$-1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} + 0 - 0 + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$-(20 + 8 + 0 - 16 - 0 - 10) - 0 = -2.$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

јер су I и III колона једнаке.



3. 2.5.

Користећи особине детерминанти израчунати

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решење.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{II}-\text{I} \\ \text{III}-\text{I} \\ \text{IV}-\text{I} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \text{I}+\text{II}+\text{III}+\text{IV} \end{matrix} =$$

Решение.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{II}-\text{I} \\ \text{III}-\text{I} \\ \text{IV}-\text{I} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \text{I}+\text{II}+\text{III}+\text{IV} \end{matrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \text{III}-2\cdot\text{II} \\ \text{IV}+\text{II} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}.$$

Решење.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{II}-\text{I} \\ \text{III}-\text{I} \\ \text{IV}-\text{I} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \text{I}+\text{II}+\text{III}+\text{IV} \end{matrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \text{III}-2\cdot\text{II} \\ \text{IV}+\text{II} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}.$$

Добили смо детерминанту **триугаоне матрице**,
па је: $D = 10 \cdot 1 \cdot (-4) \cdot (-4) = 160.$ ■

4. 2.24.

Израчунати

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & c & d \\ -a & -b & c & d \\ -a & -b & -c & d \end{vmatrix}.$$

Решение.

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & c & d \\ -a & -b & c & d \\ -a & -b & -c & d \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{II}+\text{I} \\ \text{III}+\text{I} \\ \text{IV}+\text{I} \end{matrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 2b & 2c & 2d \\ 0 & 0 & 2c & 2d \\ 0 & 0 & 0 & 2d \end{vmatrix} =$$

Решение.

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & c & d \\ -a & -b & c & d \\ -a & -b & -c & d \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{II}+\text{I} \\ \text{III}+\text{I} \\ \text{IV}+\text{I} \end{matrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 2b & 2c & 2d \\ 0 & 0 & 2c & 2d \\ 0 & 0 & 0 & 2d \end{vmatrix} =$$

$$a \cdot 2b \cdot 2c \cdot 2d = 8abcd.$$



1.3. Матрице

Теоријски увод

Матрица је правоугаони низ облика

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица је правоугаони низ облика

$$\begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \\ \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ова матрица има *m* *врста* и *n* *колона*.

Матрица је правоугаони низ облика

$$\begin{array}{ccccccc} & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow \\ \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right) \end{array}$$

Ова матрица има *m* *врста* и *n* *колона*.

Матрица је правоугаони низ облика

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ова матрица има *m* *врста* и *n* *колона*.

Ако је *m = n* тада је *A* квадратна матрица реда *n*.

Ознаке за матрицу:

(\quad)

или

$\| \quad \|$

или

$[\quad]$

Ознаке за детерминанту:

$| \quad |$

Ознаке за матрицу:

(\quad) или $\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$ или $[\quad]$

Ознаке за детерминанту:

$\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$

Две матрице су *једнаке*, $A = B$, ако имају исти облик $m \times n$ и одговарајући елементи су им једнаки: $a_{ij} = b_{ij}$.

МАТРИЧНЕ ОПЕРАЦИЈЕ:

Збир 2 матрице A и B (истог облика $m \times n$) је:

$$A + B = \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{vmatrix}.$$

Множење матрице *A* бројем *k* је дато са:

$$k \cdot A = \begin{bmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & \dots & k \cdot a_{1n} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & \dots & k \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot a_{m1} & k \cdot a_{m2} & \dots & k \cdot a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Производ матрица *A* и *B* је дефинисан само ако:

$$\begin{array}{ccccc} A, & B & \Rightarrow & C = A \cdot B. \\ m \times p & p \times n & & m \times n \end{array}$$

Производ матрица A и B је дефинисан само ако:

$$\begin{array}{ccc} A, & B & \Rightarrow C = A \cdot B. \\ m \times p & p \times n & m \times n \end{array}$$

Елементи матрице C су

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}$$

(множимо i -ту врсту A и j -ту колону B).

Јединична матрица је

$$I = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Јединична матрица је

$$I = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

За њу важи:

$$X \cdot I = X \quad \text{и} \quad I \cdot X = X.$$

За *инверзну матрицу* A^{-1} квадратне матрице A важи

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I.$$

За *инверзну матрицу* A^{-1} квадратне матрице A важи

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I.$$

Ако постоји инверзна матрица, она је јединствена.

За *инверзну матрицу* A^{-1} квадратне матрице A важи

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I.$$

Ако постоји инверзна матрица, она је јединствена.

Квадратна матрица A је *регуларна* ако има инверзну матрицу, а *сингуларна* ако нема.

Адјунгована матрица квадратне матрице A је матрица

$$\operatorname{adj} A = \|A_{ij}\|^T = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix},$$

где су $A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$ одгов. кофактори.

Теорема 1. Матрица A је регуларна акко је

$$\det(A) \neq 0.$$

Тада је

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj } A.$$

Задаци

5. Израчунати $M = AB + 2C$ ако је

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ и}$$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \\ 5 & -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 2 & 3 & 4 \\ 8 & -7 & 7 \end{pmatrix},$$

Решение.

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 2 & 3 & 4 \\ 8 & -7 & 7 \end{pmatrix},$$

$$3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 = 3 + 0 - 2 + 0 = 1.$$

$$0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 0 + 1 + 4 - 1 = 4.$$

Решение.

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 2 & 3 & 4 \\ 8 & -7 & 7 \end{pmatrix},$$

$$2C = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \\ 5 & -2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -6 \\ 0 & 12 & -6 \\ 10 & -4 & 16 \end{pmatrix},$$

Решение.

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 2 & 3 & 4 \\ 8 & -7 & 7 \end{pmatrix},$$

$$2C = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \\ 5 & -2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -6 \\ 0 & 12 & -6 \\ 10 & -4 & 16 \end{pmatrix},$$

$$M = AB + 2C$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 2 & 3 & 4 \\ 8 & -7 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 0 & -6 \\ 0 & 12 & -6 \\ 10 & -4 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 4 \\ 2 & 15 & -2 \\ 18 & -11 & 23 \end{pmatrix}.$$



6. Одредити инверзну матрицу A^{-1} матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Решение.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$1 + 0 + 2 - (-1) - 0 - 2 = 2.$$

Решење.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$1 + 0 + 2 - (-1) - 0 - 2 = 2.$$

Како је $|A| = 2 \neq 0$ то постоји A^{-1} .

Одредимо $\text{adj } A$ и одатле $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj } A$.

Одредимо $\text{adj } A$ и одатле $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj } A$.

При одређивању кофактора имамо

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{array}$$

Кофактори су

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{13} = + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

Кофактори су

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{13} = + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

Кофактори су

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{13} = + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{31} = + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Адјунгована матрица је

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Адјунгована матрица је

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Инверзна матрица је

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{\det(A)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$



Напомена. Провера: $A \cdot A^{-1} = I$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Решити матричну једначину

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot X = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Решење. Можемо написати као

$$A \cdot X = B$$

Решење. Можемо написати као

$$A \cdot X = B \quad / \quad \underset{\longrightarrow}{A^{-1}}.$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

Решење. Можемо написати као

$$A \cdot X = B \quad / \quad \xrightarrow{\cdot A^{-1}}$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

Решење. Можемо написати као

$$A \cdot X = B \quad / \cdot A^{-1} \longrightarrow$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

У претходном задатку смо добили A^{-1} .

$$X = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 4 \\ 2 & 6 & -6 \\ 2 & \frac{11}{2} & -5 \end{vmatrix}.$$



КРАЈ ЧАСА