

V двочас вежби

мр Владимир Балтић

3. Вектори

3. Вектори

Теоријски увод

Дефиниција 1. K поље *скалара*, V *скуп вектора*. $(V, K, +, \cdot)$ *векторски простор* над K ако је:

Дефиниција 1. K поље *скалара*, V скуп *вектора*. $(V, K, +, \cdot)$ *векторски простор* над K ако је:

1° $(V, +)$ Абелова група.

Дефиниција 1. K поље *скалара*, V скуп *вектора*. $(V, K, +, \cdot)$ *векторски простор* над K ако је:

1° $(V, +)$ Абелова група.

2° важе једнакости:

$$k \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = k \cdot \vec{v} + k \cdot \vec{w},$$

Дефиниција 1. K поље *скалара*, V скуп *вектора*. $(V, K, +, \cdot)$ *векторски простор* над K ако је:

1° $(V, +)$ Абелова група.

2° важе једнакости:

$$k \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = k \cdot \vec{v} + k \cdot \vec{w},$$

$$(k + m) \cdot \vec{v} = k \cdot \vec{v} + m \cdot \vec{v},$$

Дефиниција 1. K поље *скалара*, V скуп *вектора*. $(V, K, +, \cdot)$ *векторски простор* над K ако је:

1° $(V, +)$ Абелова група.

2° важе једнакости:

$$k \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = k \cdot \vec{v} + k \cdot \vec{w},$$

$$(k + m) \cdot \vec{v} = k \cdot \vec{v} + m \cdot \vec{v},$$

$$k \cdot (m \cdot \vec{v}) = (k \cdot m) \cdot \vec{v},$$

Дефиниција 1. K поље *скалара*, V скуп *вектора*. $(V, K, +, \cdot)$ *векторски простор* над K ако је:

1° $(V, +)$ Абелова група.

2° важе једнакости:

$$k \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = k \cdot \vec{v} + k \cdot \vec{w},$$

$$(k + m) \cdot \vec{v} = k \cdot \vec{v} + m \cdot \vec{v},$$

$$k \cdot (m \cdot \vec{v}) = (k \cdot m) \cdot \vec{v},$$

$$1 \cdot \vec{v} = \vec{v}.$$

Дефиниција 2. Нека је $U \neq \emptyset$, $U \subseteq V$. *Линеал* над U је скуп

$$\mathcal{L}(U) = \{a_1 \vec{u}_1 + a_2 \vec{u}_2 + \dots + a_n \vec{u}_n \mid \vec{u}_i \in U, a_i \in K\}.$$

Дефиниција 2. Нека је $U \neq \emptyset$, $U \subseteq V$. *Линеал* над U је скуп

$$\mathcal{L}(U) = \{a_1 \vec{u}_1 + a_2 \vec{u}_2 + \dots + a_n \vec{u}_n \mid \vec{u}_i \in U, a_i \in K\}.$$

За U кажемо да *генерише* $\mathcal{L}(U)$.

Дефиниција 2. Нека је $U \neq \emptyset$, $U \subseteq V$. *Линеал* над U је скуп

$$\mathcal{L}(U) = \{a_1 \vec{u}_1 + a_2 \vec{u}_2 + \dots + a_n \vec{u}_n \mid \vec{u}_i \in U, a_i \in K\}.$$

За U кажемо да *генерише* $\mathcal{L}(U)$.

Дефиниција 3. Линеарно независан скуп B који генерише в.п. V је *база* в.п. V .

Теорема 1. Ако в.п. V има базу од n елементата онда свака база в.п. V има n елементата.

Теорема 1. Ако в.п. V има базу од n елемената онда свака база в.п. V има n елемената.

Дефиниција 4. Нека је V в.п. над K , са базом од n елемената. Тада је n *димензија* в.п. V , $\dim V$.

Теорема 1. Ако в.п. V има базу од n елемената онда свака база в.п. V има n елемената.

Дефиниција 4. Нека је V в.п. над K , са базом од n елемената. Тада је n *димензија* в.п. V , $\dim V$.

Ако је $V = \{\vec{0}\}$, онда је $\dim V = 0$.

Теорема 2. Нека је V в.п. над K и $\dim V = n$ са базом $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$. Тада се вектор $\vec{v} \in V$ може на јединствен начин изразити у облику

$$\vec{v} = a_1 \cdot \vec{v}_1 + a_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + a_n \cdot \vec{v}_n,$$

где су $a_i \in K$.

Теорема 2. Нека је V в.п. над K и $\dim V = n$ са базом $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$. Тада се вектор $\vec{v} \in V$ може на јединствен начин изразити у облику

$$\vec{v} = a_1 \cdot \vec{v}_1 + a_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + a_n \cdot \vec{v}_n,$$

где су $a_i \in K$.

Дефиниција 5. a_1, a_2, \dots, a_n су *координате* вектора \vec{v} у односу на базу B .

Писаћемо $\vec{v} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Теорема 3. Нека је V в.п. над K , $\dim V = n$
са базом $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$. Нека су
 $\vec{u} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $\vec{v} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$.

Тада је

- $\vec{u} + \vec{v} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n);$
- $k \cdot \vec{u} = (k \cdot a_1, k \cdot a_2, \dots, k \cdot a_n).$

ОСОБИНЕ ВЕКТОРА У \mathbb{R}^3

Тачкама $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$
придружујемо вектор $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$:

$$\vec{v} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A).$$

ОСОБИНЕ ВЕКТОРА У \mathbb{R}^3

Тачкама $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$ придружујемо вектор $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$:

$$\vec{v} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A).$$

Интензитет вектора $\vec{v} = (x, y, z)$ је

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

ОСОБИНЕ ВЕКТОРА У \mathbb{R}^3

Тачкама $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$ придружујемо вектор $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$:

$$\vec{v} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A).$$

Интензитет вектора $\vec{v} = (x, y, z)$ је

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Нула-вектор: $\vec{0} = (0, 0, 0)$.

ОСОБИНЕ ВЕКТОРА У \mathbb{R}^3

Тачкама $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$ придружујемо вектор $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$:

$$\vec{v} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A).$$

Интензитет вектора $\vec{v} = (x, y, z)$ је

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Нула-вектор: $\vec{0} = (0, 0, 0)$.

Вектор интензитета 1 је *јединични вектор*.

ОСОБИНЕ ВЕКТОРА У \mathbb{R}^3

Тачкама $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$ придружујемо вектор $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$:

$$\vec{v} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A).$$

Интензитет вектора $\vec{v} = (x, y, z)$ је

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Нула-вектор: $\vec{0} = (0, 0, 0)$.

Вектор интензитета 1 је *јединични вектор*.

Јединичне векторе који имају правац и смер координатних оса су \vec{e}_x , \vec{e}_y и \vec{e}_z , или \vec{i} , \vec{j} и \vec{k} .

Скалярни производ вектора \vec{a} и \vec{b} , $\vec{a} \cdot \vec{b}$, је:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Скаларни производ вектора \vec{a} и \vec{b} , $\vec{a} \cdot \vec{b}$, је:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Одавде добијамо

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}.$$

Скаларни производ вектора \vec{a} и \vec{b} , $\vec{a} \cdot \vec{b}$, је:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Одавде добијамо

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}.$$

Ако су $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Ако су $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Уколико је

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0,$$

и $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ тада кажемо да су ти вектори *ортогонални* и то означавамо са $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Векторски производ два вектора \vec{a} и \vec{b} је
вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ који има особине

Векторски производ два вектора \vec{a} и \vec{b} је вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ који има особине

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b});$

Векторски производ два вектора \vec{a} и \vec{b} је вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ који има особине

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b});$

2) $\vec{c} \perp \vec{a}, \quad \vec{c} \perp \vec{b};$

Векторски производ два вектора \vec{a} и \vec{b} је вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ који има особине

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \angle(\vec{a}, \vec{b});$

2) $\vec{c} \perp \vec{a}, \quad \vec{c} \perp \vec{b};$

3) смер вектора \vec{c} је такав да \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} чине триједар десне оријентације.

Векторски производ два вектора \vec{a} и \vec{b} је вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ који има особине

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \angle(\vec{a}, \vec{b});$

2) $\vec{c} \perp \vec{a}, \quad \vec{c} \perp \vec{b};$

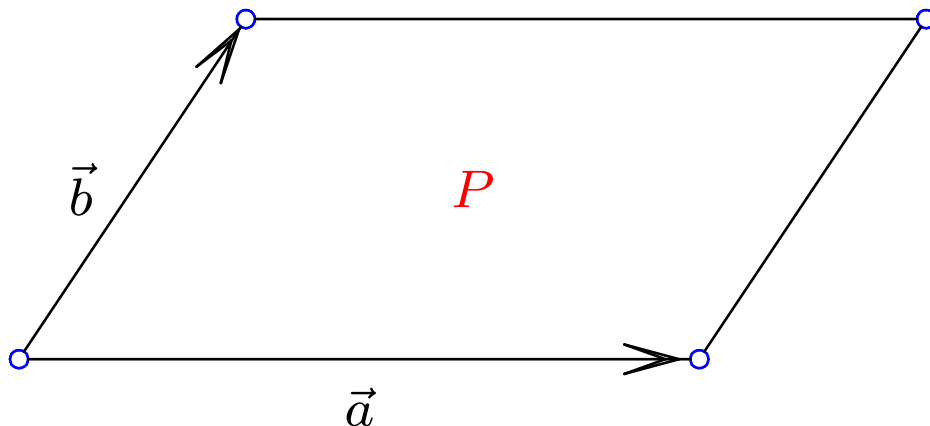
3) смер вектора \vec{c} је такав да \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} чине триједар десне оријентације.

Ако су $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ онда је

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Површина паралелограма над \vec{a} и \vec{b} је

$$P = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

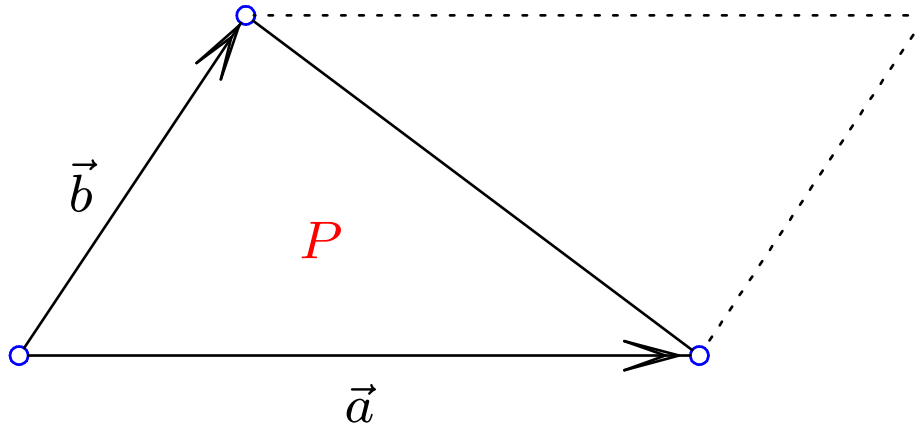


Површина паралелограма над \vec{a} и \vec{b} је

$$P = |\vec{a} \times \vec{b}|,$$

а површина троугла над \vec{a} и \vec{b} је

$$P = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

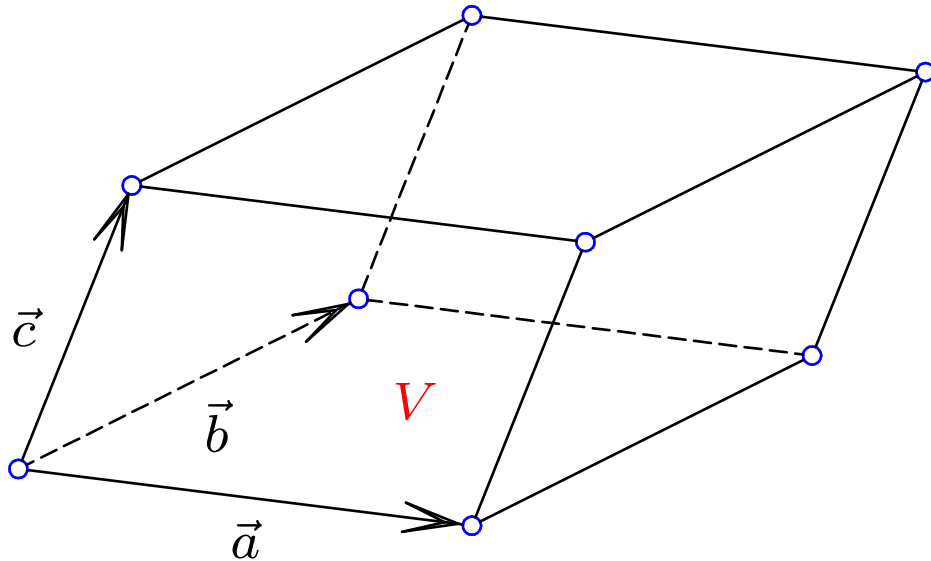


Мешовити производ три вектора \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} је израз

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Запремина призме над \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} је

$$V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$$

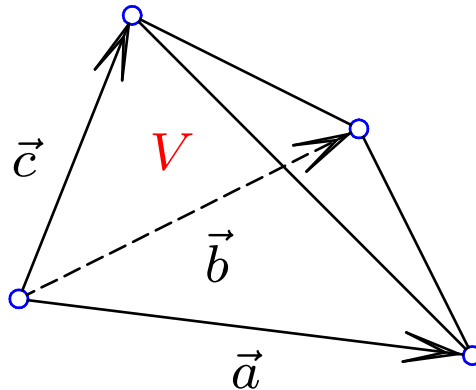


Запремина призме над \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} је

$$V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|,$$

а запремина пирамиде над \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} је

$$V = \frac{1}{6} |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|.$$



ГЕОМЕТРИЈСКЕ ОСОБИНЕ ВЕКТОРА

ГЕОМЕТРИЈСКЕ ОСОБИНЕ ВЕКТОРА

\vec{a} и \vec{b} су колинеарни $\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

ГЕОМЕТРИЈСКЕ ОСОБИНЕ ВЕКТОРА

\vec{a} и \vec{b} су колинеарни $\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

\vec{a} и \vec{b} нису нула-вектори и $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$
 $\Rightarrow \vec{a}$ и \vec{b} колинеарни.

ГЕОМЕТРИЈСКЕ ОСОБИНЕ ВЕКТОРА

\vec{a} и \vec{b} су колинеарни $\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

\vec{a} и \vec{b} нису нула-вектори и $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$
 $\Rightarrow \vec{a}$ и \vec{b} колинеарни.

За колинеарне векторе \vec{a} и \vec{b} постоји $\lambda \neq 0$ тако да је $\vec{a} = \lambda \vec{b}$.

ГЕОМЕТРИЈСКЕ ОСОБИНЕ ВЕКТОРА

\vec{a} и \vec{b} су колинеарни $\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

\vec{a} и \vec{b} нису нула-вектори и $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$
 $\Rightarrow \vec{a}$ и \vec{b} колинеарни.

За колинеарне векторе \vec{a} и \vec{b} постоји $\lambda \neq 0$ тако да је $\vec{a} = \lambda \vec{b}$.

\vec{a} , \vec{b} и \vec{c} су компланарни $\Rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$.

ГЕОМЕТРИЈСКЕ ОСОБИНЕ ВЕКТОРА

\vec{a} и \vec{b} су колинеарни $\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

\vec{a} и \vec{b} нису нула-вектори и $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$
 $\Rightarrow \vec{a}$ и \vec{b} колинеарни.

За колинеарне векторе \vec{a} и \vec{b} постоји $\lambda \neq 0$ тако да је $\vec{a} = \lambda \vec{b}$.

\vec{a} , \vec{b} и \vec{c} су компланарни $\Rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$.

\vec{a} , \vec{b} и \vec{c} нису нула-вектори и $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$
 $\Rightarrow \vec{a}$, \vec{b} и \vec{c} компланарни.

ГЕОМЕТРИЈСКЕ ОСОБИНЕ ВЕКТОРА

\vec{a} и \vec{b} су колинеарни $\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

\vec{a} и \vec{b} нису нула-вектори и $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$
 $\Rightarrow \vec{a}$ и \vec{b} колинеарни.

За колинеарне векторе \vec{a} и \vec{b} постоји $\lambda \neq 0$ тако да је $\vec{a} = \lambda \vec{b}$.

\vec{a} , \vec{b} и \vec{c} су компланарни $\Rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$.

\vec{a} , \vec{b} и \vec{c} нису нула-вектори и $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$
 $\Rightarrow \vec{a}$, \vec{b} и \vec{c} компланарни.

За компланарне векторе \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} постоје α , β и γ , $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$, такви да је

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = \vec{0}.$$

Задаци

1. 3.3. Нека је

$$\mathbb{R}^3 = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$$\lambda \cdot (a_1, a_2, a_3) = (\lambda \cdot a_1, \lambda \cdot a_2, \lambda \cdot a_3).$$

а) Доказати да је $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ в.п.

б) Доказати да вектори

$$\vec{e}_1 = (2, 1, -3), \quad \vec{e}_2 = (3, 2, -5), \quad \vec{e}_3 = (1, -1, 1)$$

чине базу у \mathbb{R}^3 и изразити $\vec{x} = (6, 2, -7)$ помоћу вектора те базе.

Решење. **a)** Нека је $\vec{v} = (a, b, c)$ и $\vec{w} = (m, n, p)$.

Решење. **a)** Нека је $\vec{v} = (a, b, c)$ и $\vec{w} = (m, n, p)$.

У \mathbb{R}^3 је + затворена јер је

$$\vec{v} + \vec{w} = (a + m, b + n, c + p) \in \mathbb{R}^3.$$



Решење. **a)** Нека је $\vec{v} = (a, b, c)$ и $\vec{w} = (m, n, p)$.
У \mathbb{R}^3 је $+$ затворена јер је

$$\vec{v} + \vec{w} = (a + m, b + n, c + p) \in \mathbb{R}^3. \quad \checkmark$$

Асоцијативност сабирања вектора у \mathbb{R}^3 следи
из асоцијативности операције $+$ у \mathbb{R} . ✓

Решење. **a)** Нека је $\vec{v} = (a, b, c)$ и $\vec{w} = (m, n, p)$.
У \mathbb{R}^3 је $+$ затворена јер је

$$\vec{v} + \vec{w} = (a + m, b + n, c + p) \in \mathbb{R}^3.$$



Асоцијативност сабирања вектора у \mathbb{R}^3 следи
из асоцијативности операције $+$ у \mathbb{R} .



Неутрални елемент је $\vec{0} = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$.



Решење. **a)** Нека је $\vec{v} = (a, b, c)$ и $\vec{w} = (m, n, p)$.
У \mathbb{R}^3 је $+$ затворена јер је

$$\vec{v} + \vec{w} = (a + m, b + n, c + p) \in \mathbb{R}^3. \quad \checkmark$$

Асоцијативност сабирања вектора у \mathbb{R}^3 следи
из асоцијативности операције $+$ у \mathbb{R} . \checkmark

Неутрални елемент је $\vec{0} = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$. \checkmark

Инверзан елемент вектора $\vec{v} = (a, b, c)$ је
супротан вектор $-\vec{v} = (-a, -b, -c) \in \mathbb{R}^3$. \checkmark

Решење. **a)** Нека је $\vec{v} = (a, b, c)$ и $\vec{w} = (m, n, p)$.
У \mathbb{R}^3 је $+$ затворена јер је

$$\vec{v} + \vec{w} = (a + m, b + n, c + p) \in \mathbb{R}^3.$$



Асоцијативност сабирања вектора у \mathbb{R}^3 следи
из асоцијативности операције $+$ у \mathbb{R} .



Неутрални елемент је $\vec{0} = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$.



Инверзан елемент вектора $\vec{v} = (a, b, c)$ је
супротан вектор $-\vec{v} = (-a, -b, -c) \in \mathbb{R}^3$.



Комутативност сабирања вектора следи из
комутативности $+$ у \mathbb{R} .



Решење. **a)** Нека је $\vec{v} = (a, b, c)$ и $\vec{w} = (m, n, p)$.
У \mathbb{R}^3 је $+$ затворена јер је

$$\vec{v} + \vec{w} = (a + m, b + n, c + p) \in \mathbb{R}^3. \quad \checkmark$$

Асоцијативност сабирања вектора у \mathbb{R}^3 следи из асоцијативности операције $+$ у \mathbb{R} . ✓

Неутрални елемент је $\vec{0} = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$. ✓

Инверзан елемент вектора $\vec{v} = (a, b, c)$ је супротан вектор $-\vec{v} = (-a, -b, -c) \in \mathbb{R}^3$. ✓

Комутативност сабирања вектора следи из комутативности $+$ у \mathbb{R} . ✓

$\Rightarrow (\mathbb{R}^3, +)$ је **Абелова група**.

Због дистрибутивности операција \cdot и $+$ у \mathbb{R} је

$$k \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = k \cdot ((a, b, c) + (m, n, p))$$

Због дистрибутивности операција \cdot и $+$ у \mathbb{R} је

$$\begin{aligned} k \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= k \cdot ((a, b, c) + (m, n, p)) \\ &= k \cdot (a + m, b + n, c + p) \end{aligned}$$

Због дистрибутивности операција \cdot и $+$ у \mathbb{R} је

$$\begin{aligned} k \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= k \cdot ((a, b, c) + (m, n, p)) \\ &= k \cdot (a + m, b + n, c + p) \\ &= (k(a + m), k(b + n), k(c + p)) \end{aligned}$$

Због дистрибутивности операција \cdot и $+$ у \mathbb{R} је

$$\begin{aligned}k \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= k \cdot ((a, b, c) + (m, n, p)) \\&= k \cdot (a + m, b + n, c + p) \\&= (k(a + m), k(b + n), k(c + p)) \\&= (ka + km, kb + kn, kc + kp)\end{aligned}$$

Због дистрибутивности операција \cdot и $+$ у \mathbb{R} је

$$\begin{aligned}k \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= k \cdot ((a, b, c) + (m, n, p)) \\&= k \cdot (a + m, b + n, c + p) \\&= (k(a + m), k(b + n), k(c + p)) \\&= (ka + km, kb + kn, kc + kp) \\&= (ka, kb, kc) + (km, kn, kp)\end{aligned}$$

Због дистрибутивности операција \cdot и $+$ у \mathbb{R} је

$$\begin{aligned}k \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= k \cdot ((a, b, c) + (m, n, p)) \\&= k \cdot (a + m, b + n, c + p) \\&= (k(a + m), k(b + n), k(c + p)) \\&= (ka + km, kb + kn, kc + kp) \\&= (ka, kb, kc) + (km, kn, kp) \\&= k \cdot \vec{v} + k \cdot \vec{w}.\end{aligned}$$



Због дистрибутивности операција \cdot и $+$ у \mathbb{R} је

$$(k + m) \cdot \vec{v} = (k + m) \cdot (a, b, c)$$

Због дистрибутивности операција \cdot и $+$ у \mathbb{R} је

$$\begin{aligned}(k + m) \cdot \vec{v} &= (k + m) \cdot (a, b, c) \\ &= ((k + m)a, (k + m)b, (k + m)c)\end{aligned}$$

Због дистрибутивности операција \cdot и $+$ у \mathbb{R} је

$$\begin{aligned}(k + m) \cdot \vec{v} &= (k + m) \cdot (a, b, c) \\ &= ((k + m)a, (k + m)b, (k + m)c) \\ &= (ka + ma, kb + mb, kc + mc)\end{aligned}$$

Због дистрибутивности операција \cdot и $+$ у \mathbb{R} је

$$\begin{aligned}(k + m) \cdot \vec{v} &= (k + m) \cdot (a, b, c) \\&= ((k + m)a, (k + m)b, (k + m)c) \\&= (ka + ma, kb + mb, kc + mc) \\&= (ka, kb, kc) + (ma, mb, mc)\end{aligned}$$

Због дистрибутивности операција \cdot и $+$ у \mathbb{R} је

$$\begin{aligned}(k + m) \cdot \vec{v} &= (k + m) \cdot (a, b, c) \\&= ((k + m)a, (k + m)b, (k + m)c) \\&= (ka + ma, kb + mb, kc + mc) \\&= (ka, kb, kc) + (ma, mb, mc) \\&= k \cdot \vec{v} + m \cdot \vec{v}. \quad \checkmark\end{aligned}$$

Због асоцијативности операције \cdot у \mathbb{R} је

$$\begin{aligned} k \cdot (m \cdot \vec{v}) &= k \cdot (m \cdot (a, b, c)) = k \cdot (ma, mb, mc) \\ &= (kma, kmb, kmc) = (k \cdot m) \cdot \vec{v}. \quad \checkmark \end{aligned}$$

Због асоцијативности операције \cdot у \mathbb{R} је

$$\begin{aligned} k \cdot (m \cdot \vec{v}) &= k \cdot (m \cdot (a, b, c)) = k \cdot (ma, mb, mc) \\ &= (kma, kmb, kmc) = (k \cdot m) \cdot \vec{v}. \quad \checkmark \end{aligned}$$

Коначно

$$1 \cdot \vec{v} = 1 \cdot (a, b, c) = (1 \cdot a, 1 \cdot b, 1 \cdot c) = (a, b, c) = \vec{v}. \quad \checkmark$$

Због асоцијативности операције \cdot у \mathbb{R} је

$$\begin{aligned} k \cdot (m \cdot \vec{v}) &= k \cdot (m \cdot (a, b, c)) = k \cdot (ma, mb, mc) \\ &= (kma, kmb, kmc) = (k \cdot m) \cdot \vec{v}. \quad \checkmark \end{aligned}$$

Коначно

$$1 \cdot \vec{v} = 1 \cdot (a, b, c) = (1 \cdot a, 1 \cdot b, 1 \cdot c) = (a, b, c) = \vec{v}. \quad \checkmark$$

$\Rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ је векторски простор.

б) \vec{e}_1 , \vec{e}_2 и \vec{e}_3 су линеарно независни акко

$$\alpha \cdot \vec{e}_1 + \beta \cdot \vec{e}_2 + \gamma \cdot \vec{e}_3 = \vec{0}$$

има само решење $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

$$\alpha \cdot \vec{e}_1 + \beta \cdot \vec{e}_2 + \gamma \cdot \vec{e}_3 = \vec{0}$$

$$\alpha \cdot \vec{e}_1 + \beta \cdot \vec{e}_2 + \gamma \cdot \vec{e}_3 = \vec{0}$$

$$\alpha \cdot (2, 1, -3) + \beta \cdot (3, 2, -5) + \gamma \cdot (1, -1, 1) =$$

$$\alpha \cdot \vec{e}_1 + \beta \cdot \vec{e}_2 + \gamma \cdot \vec{e}_3 = \vec{0}$$

$$\alpha \cdot (2, 1, -3) + \beta \cdot (3, 2, -5) + \gamma \cdot (1, -1, 1) =$$

$$(2\alpha, \alpha, -3\alpha) + (3\beta, 2\beta, -5\beta) + (\gamma, -\gamma, \gamma) =$$

$$\alpha \cdot \vec{e}_1 + \beta \cdot \vec{e}_2 + \gamma \cdot \vec{e}_3 = \vec{0}$$

$$\alpha \cdot (2, 1, -3) + \beta \cdot (3, 2, -5) + \gamma \cdot (1, -1, 1) =$$

$$(2\alpha, \alpha, -3\alpha) + (3\beta, 2\beta, -5\beta) + (\gamma, -\gamma, \gamma) =$$

$$(2\alpha + 3\beta + \gamma, \alpha + 2\beta - \gamma, -3\alpha - 5\beta + \gamma) = (0, 0, 0)$$

$$\alpha \cdot \vec{e}_1 + \beta \cdot \vec{e}_2 + \gamma \cdot \vec{e}_3 = \vec{0}$$

$$\alpha \cdot (2, 1, -3) + \beta \cdot (3, 2, -5) + \gamma \cdot (1, -1, 1) =$$

$$(2\alpha, \alpha, -3\alpha) + (3\beta, 2\beta, -5\beta) + (\gamma, -\gamma, \gamma) =$$

$$(2\alpha + 3\beta + \gamma, \alpha + 2\beta - \gamma, -3\alpha - 5\beta + \gamma) = (0, 0, 0)$$

се своди на

$$\begin{array}{ccccccccc} 2\alpha & + & 3\beta & + & \gamma & = & 0 \\ \alpha & + & 2\beta & - & \gamma & = & 0 \\ -3\alpha & - & 5\beta & + & \gamma & = & 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc}
 2\alpha & + & 3\beta & + & \gamma & = & 0 \\
 \alpha & + & 2\beta & - & \gamma & = & 0 \\
 -3\alpha & - & 5\beta & + & \gamma & = & 0
 \end{array}$$

је хомоген.

$$\begin{array}{cccccc} 2\alpha & + & 3\beta & + & \gamma & = & 0 \\ \alpha & + & 2\beta & - & \gamma & = & 0 \\ -3\alpha & - & 5\beta & + & \gamma & = & 0 \end{array}$$

је хомоген. Због

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

има јединствено решење

$$\begin{array}{cccccc} 2\alpha & + & 3\beta & + & \gamma & = & 0 \\ \alpha & + & 2\beta & - & \gamma & = & 0 \\ -3\alpha & - & 5\beta & + & \gamma & = & 0 \end{array}$$

је хомоген. Због

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

има јединствено решење: $\alpha = \beta = \gamma = 0$, па су \vec{e}_1 , \vec{e}_2 и \vec{e}_3 **линеарно независни**.

Напомена. Лінійну залежність вектора

$$\vec{e}_1 = (2, 1, -3), \quad \vec{e}_2 = (3, 2, -5), \quad \vec{e}_3 = (1, -1, 1)$$

можемо перевірити так що визначимо ранг матриці

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Напомена. Линеарну зависност вектора

$$\vec{e}_1 = (2, 1, -3), \quad \vec{e}_2 = (3, 2, -5), \quad \vec{e}_3 = (1, -1, 1)$$

можемо испитати тако што одредимо ранг матрице

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Из $r(M) = 3$ следи да имамо **3** лин. независна вектора \vec{e}_1 , \vec{e}_2 и \vec{e}_3 .

Вектори \vec{e}_1 , \vec{e}_2 и \vec{e}_3 генеришу \mathbb{R}^3 , ако се произвољан вектор $\vec{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ може представити као:

$$\alpha \cdot \vec{e}_1 + \beta \cdot \vec{e}_2 + \gamma \cdot \vec{e}_3 = \vec{v}$$

Вектори \vec{e}_1 , \vec{e}_2 и \vec{e}_3 генеришу \mathbb{R}^3 , ако се произвољан вектор $\vec{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ може представити као:

$$\alpha \cdot \vec{e}_1 + \beta \cdot \vec{e}_2 + \gamma \cdot \vec{e}_3 = \vec{v}$$

$$(2\alpha + 3\beta + \gamma, \alpha + 2\beta - \gamma, -3\alpha - 5\beta + \gamma) = (a, b, c).$$

Вектори \vec{e}_1 , \vec{e}_2 и \vec{e}_3 генеришу \mathbb{R}^3 , ако се произвољан вектор $\vec{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ може представити као:

$$\alpha \cdot \vec{e}_1 + \beta \cdot \vec{e}_2 + \gamma \cdot \vec{e}_3 = \vec{v}$$

$$(2\alpha + 3\beta + \gamma, \alpha + 2\beta - \gamma, -3\alpha - 5\beta + \gamma) = (a, b, c).$$

И овај систем има исту $\Delta = 1 \neq 0$ па има јединствено решење, тј. вектори \vec{e}_1 , \vec{e}_2 и \vec{e}_3 генеришу \mathbb{R}^3 .

Вектори \vec{e}_1 , \vec{e}_2 и \vec{e}_3 генеришу \mathbb{R}^3 , ако се произвољан вектор $\vec{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ може представити као:

$$\alpha \cdot \vec{e}_1 + \beta \cdot \vec{e}_2 + \gamma \cdot \vec{e}_3 = \vec{v}$$

$$(2\alpha + 3\beta + \gamma, \alpha + 2\beta - \gamma, -3\alpha - 5\beta + \gamma) = (a, b, c).$$

И овај систем има исту $\Delta = 1 \neq 0$ па има јединствено решење, тј. вектори \vec{e}_1 , \vec{e}_2 и \vec{e}_3 генеришу \mathbb{R}^3 .

$\Rightarrow B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ је база в.п. \mathbb{R}^3 .

Напомена. Уместо да покажемо да вектори \vec{e}_1 , \vec{e}_2 и \vec{e}_3 генеришу \mathbb{R}^3 могли смо да искористимо:

Теорема 4. Ако имамо n лин. незав. вектора у в.п. V , за који је $\dim V = n$, онда тих n вектора чини базу в.п. V .

Овде имамо да је $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ и показали смо да су вектори \vec{e}_1 , \vec{e}_2 и \vec{e}_3 линеарно независни, па они чине базу простора \mathbb{R}^3 .

$$(2\alpha + 3\beta + \gamma, \alpha + 2\beta - \gamma, -3\alpha - 5\beta + \gamma) = (6, 2, -7)$$

$$(2\alpha + 3\beta + \gamma, \alpha + 2\beta - \gamma, -3\alpha - 5\beta + \gamma) = (6, 2, -7)$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 2\alpha & + & 3\beta & + & \gamma & = & 6 \\ \alpha & + & 2\beta & - & \gamma & = & 2 \\ -3\alpha & - & 5\beta & + & \gamma & = & -7. \end{array}$$

$$(2\alpha + 3\beta + \gamma, \alpha + 2\beta - \gamma, -3\alpha - 5\beta + \gamma) = (6, 2, -7)$$

$$\begin{array}{rcccccccl} 2\alpha & + & 3\beta & + & \gamma & = & 6 \\ \alpha & + & 2\beta & - & \gamma & = & 2 \\ -3\alpha & - & 5\beta & + & \gamma & = & -7. \end{array}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_{\alpha} = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -7 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$(2\alpha + 3\beta + \gamma, \alpha + 2\beta - \gamma, -3\alpha - 5\beta + \gamma) = (6, 2, -7)$$

$$\begin{array}{rrrrrr} 2\alpha & + & 3\beta & + & \gamma & = & 6 \\ \alpha & + & 2\beta & - & \gamma & = & 2 \\ -3\alpha & - & 5\beta & + & \gamma & = & -7. \end{array}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_{\alpha} = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -7 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\Delta_{\beta} = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_{\gamma} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \\ -3 & -5 & -7 \end{vmatrix} = 1$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_{\alpha} = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -7 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\Delta_{\beta} = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_{\gamma} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \\ -3 & -5 & -7 \end{vmatrix} = 1$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\Delta_{\alpha}}{\Delta} = 1, \quad \beta = \frac{\Delta_{\beta}}{\Delta} = 1 \text{ и } \gamma = \frac{\Delta_{\gamma}}{\Delta} = 1.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_\alpha = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -7 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\Delta_\beta = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_\gamma = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \\ -3 & -5 & -7 \end{vmatrix} = 1$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\Delta_\alpha}{\Delta} = 1, \quad \beta = \frac{\Delta_\beta}{\Delta} = 1 \text{ и } \gamma = \frac{\Delta_\gamma}{\Delta} = 1.$$

$$\vec{x} = 1 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + 1 \cdot \vec{e}_3,$$

$$(6, 2, -7) = 1 \cdot (2, 1, -3) + 1 \cdot (3, 2, -5) + 1 \cdot (1, -1, 1).$$



2. 3.34. Доказати да су вектори $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (4, 1, 1)$ и $\vec{c} = (-9, 3, 6)$ компланарни, а затим изразити \vec{c} преко \vec{a} и \vec{b} .

2. 3.34. Доказати да су вектори $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (4, 1, 1)$ и $\vec{c} = (-9, 3, 6)$ компланарни, а затим изразити \vec{c} преко \vec{a} и \vec{b} .

Решење.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ -9 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

2. 3.34. Доказати да су вектори $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (4, 1, 1)$ и $\vec{c} = (-9, 3, 6)$ компланарни, а затим изразити \vec{c} преко \vec{a} и \vec{b} .

Решење.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ -9 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ и \vec{c} линеарно зависни

2. 3.34. Доказати да су вектори $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (4, 1, 1)$ и $\vec{c} = (-9, 3, 6)$ компланарни, а затим изразити \vec{c} преко \vec{a} и \vec{b} .

Решење.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ -9 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ и \vec{c} линеарно зависни

$\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ и \vec{c} компланарни.

2. 3.34. Доказати да су вектори $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (4, 1, 1)$ и $\vec{c} = (-9, 3, 6)$ компланарни, а затим изразити \vec{c} преко \vec{a} и \vec{b} .

Решење.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ -9 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ и \vec{c} линеарно зависни

$\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ и \vec{c} компланарни.

$$(-9, 3, 6) = \alpha(1, 2, 3) + \beta(4, 1, 1)$$

Решење.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ -9 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ и \vec{c} линеарно зависни

$\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ и \vec{c} компланарни.

$$(-9, 3, 6) = \alpha(1, 2, 3) + \beta(4, 1, 1)$$

$$\begin{array}{rclcl} & \alpha & + & 4\beta & = & -9 \\ \text{даје систем} & 2\alpha & + & \beta & = & 3 \\ & 3\alpha & + & \beta & = & 6 \end{array}$$

Решење.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ -9 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ и \vec{c} линеарно зависни

$\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ и \vec{c} компланарни.

$$(-9, 3, 6) = \alpha(1, 2, 3) + \beta(4, 1, 1)$$

$$\begin{array}{rcccl} & \alpha & + & 4\beta & = & -9 \\ \text{даје систем} & 2\alpha & + & \beta & = & 3 & \text{који има} \\ & 3\alpha & + & \beta & = & 6 \end{array}$$

решење $\alpha = 3$ и $\beta = -3$, тј.

$$(-9, 3, 6) = 3 \cdot (1, 2, 3) - 3 \cdot (4, 1, 1). \quad \blacksquare$$

3. 3.21. Дати су вектори

$$\vec{u} = (6, 1, 1), \quad \vec{v} = (0, 3, -1) \text{ и } \vec{w} = (-2, 3, 5).$$

Одредити t тако да буде $\vec{u} + t\vec{v} \perp \vec{w}$.

3. 3.21. Дати су вектори

$$\vec{u} = (6, 1, 1), \vec{v} = (0, 3, -1) \text{ и } \vec{w} = (-2, 3, 5).$$

Одредити t тако да буде $\vec{u} + t\vec{v} \perp \vec{w}$.

Решење.

Означимо $\vec{x} = \vec{u} + t \cdot \vec{v} = (6, 1 + 3t, 1 - t)$.

3. 3.21. Дати су вектори

$$\vec{u} = (6, 1, 1), \quad \vec{v} = (0, 3, -1) \text{ и } \vec{w} = (-2, 3, 5).$$

Одредити t тако да буде $\vec{u} + t\vec{v} \perp \vec{w}$.

Решење.

Означимо $\vec{x} = \vec{u} + t \cdot \vec{v} = (6, 1 + 3t, 1 - t)$.

$$\vec{x} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{w} = 0.$$

3. 3.21. Дати су вектори

$$\vec{u} = (6, 1, 1), \vec{v} = (0, 3, -1) \text{ и } \vec{w} = (-2, 3, 5).$$

Одредити t тако да буде $\vec{u} + t\vec{v} \perp \vec{w}$.

Решење.

Означимо $\vec{x} = \vec{u} + t \cdot \vec{v} = (6, 1 + 3t, 1 - t)$.

$$\vec{x} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{w} = 0.$$

$$(6, 1 + 3t, 1 - t) \cdot (-2, 3, 5) = -12 + (3 + 9t) + (5 - 5t) = 0$$

3. 3.21. Дати су вектори

$$\vec{u} = (6, 1, 1), \vec{v} = (0, 3, -1) \text{ и } \vec{w} = (-2, 3, 5).$$

Одредити t тако да буде $\vec{u} + t\vec{v} \perp \vec{w}$.

Решење.

Означимо $\vec{x} = \vec{u} + t \cdot \vec{v} = (6, 1 + 3t, 1 - t)$.

$$\vec{x} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{w} = 0.$$

$$(6, 1 + 3t, 1 - t) \cdot (-2, 3, 5) = -12 + (3 + 9t) + (5 - 5t) = 0$$

$$-4 + 4t = 0 \Rightarrow t = 1. \quad \blacksquare$$

4. 3.13. Израчунати меру φ угла који граде вектори $\vec{a} = 7\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

4. 3.13. Израчунати меру φ угла који граде вектори $\vec{a} = 7\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

Решење.
$$\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

4. 3.13. Израчунати меру φ угла који граде вектори $\vec{a} = 7\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

Решење. $\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (7, 2, -1) \cdot (1, 2, -3) = 7 + 4 + 3 = 14.$$

4. 3.13. Израчунати меру φ угла који grade вектори $\vec{a} = 7\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

Решење. $\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (7, 2, -1) \cdot (1, 2, -3) = 7 + 4 + 3 = 14.$$

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = (7, 2, -1) \cdot (7, 2, -1) = 54 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{54}.$$

4. 3.13. Израчунати меру φ угла који grade вектори $\vec{a} = 7\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

Решење. $\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (7, 2, -1) \cdot (1, 2, -3) = 7 + 4 + 3 = 14.$$

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = (7, 2, -1) \cdot (7, 2, -1) = 54 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{54}.$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}.$$

Решение. $\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (7, 2, -1) \cdot (1, 2, -3) = 7 + 4 + 3 = 14.$$

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = (7, 2, -1) \cdot (7, 2, -1) = 54 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{54}.$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}.$$

$$\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{14}{\sqrt{54} \cdot \sqrt{14}} = \sqrt{\frac{7}{27}}$$

Решение. $\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (7, 2, -1) \cdot (1, 2, -3) = 7 + 4 + 3 = 14.$$

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = (7, 2, -1) \cdot (7, 2, -1) = 54 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{54}.$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}.$$

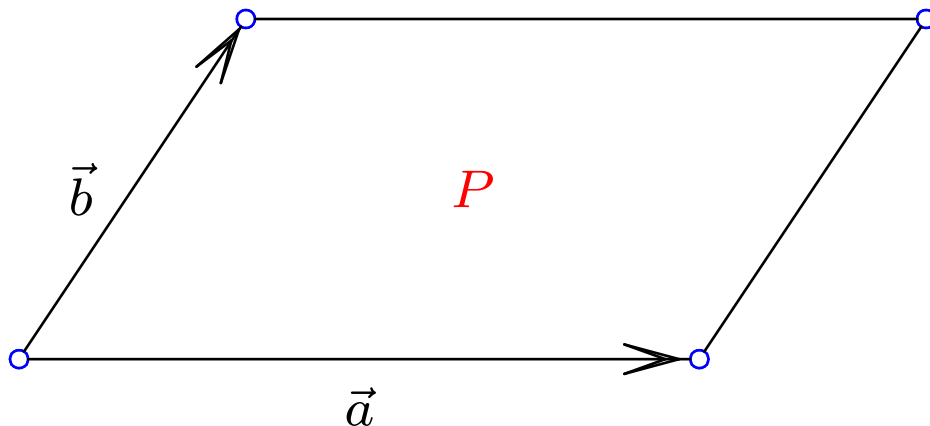
$$\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{14}{\sqrt{54} \cdot \sqrt{14}} = \sqrt{\frac{7}{27}}$$

$$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos \sqrt{\frac{7}{27}}.$$

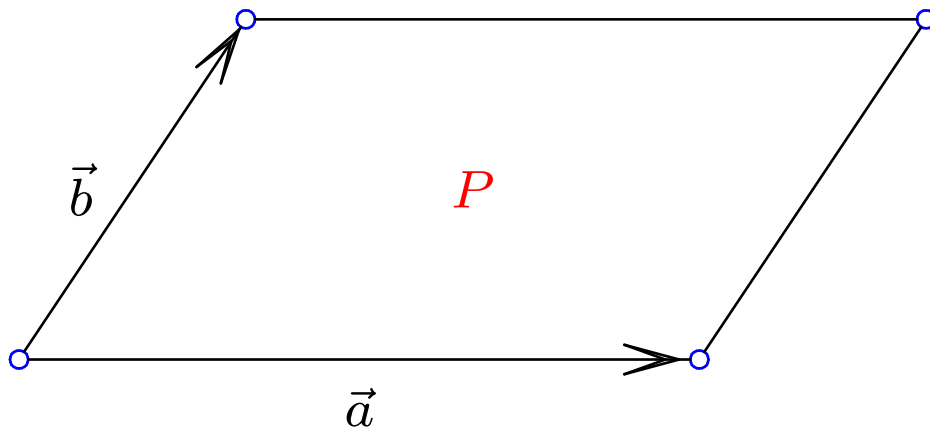


5. 3.27. Израчунати површину P паралелограма конструисаног над векторима $\vec{a} = 5\vec{i} - 4\vec{j} +$ и $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$.

5. 3.27. Израчунати површину P паралелограма конструисаног над векторима $\vec{a} = 5\vec{i} - 4\vec{j} +$ и $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$.

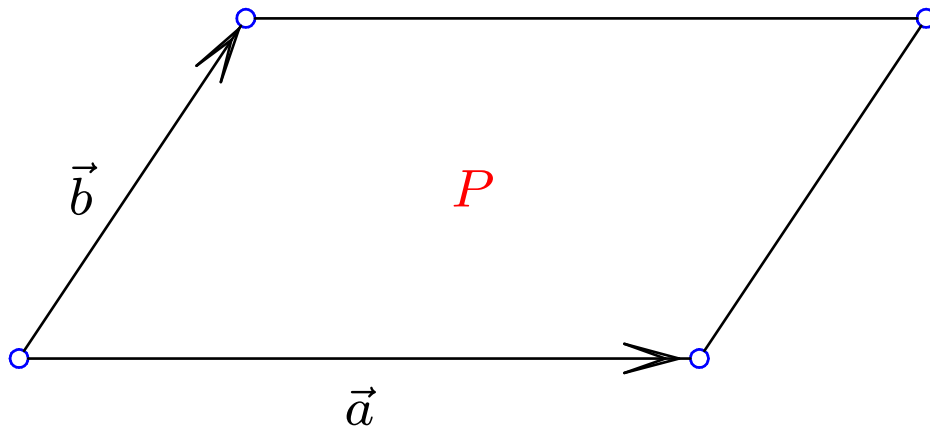


Решение.



$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -4 & 7 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1\vec{i} + 17\vec{j} + 9\vec{k} = (1, 17, 9)$$

Решение.

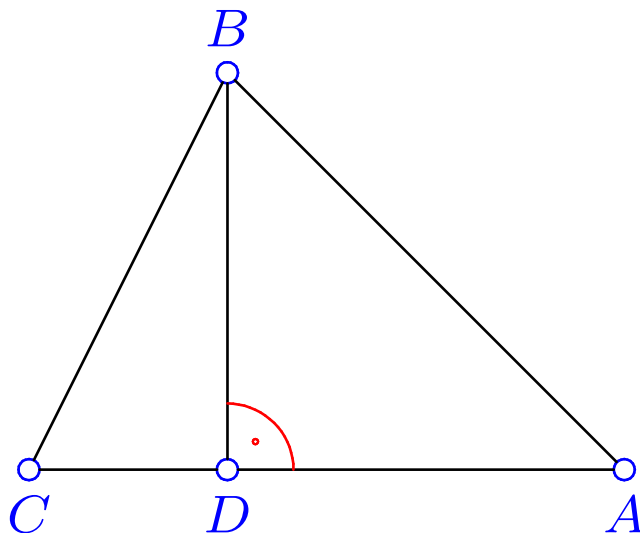


$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -4 & 7 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1\vec{i} + 17\vec{j} + 9\vec{k} = (1, 17, 9)$$

$$P = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{1^2 + 17^2 + 9^2} = \sqrt{371}.$$



6. 3.32. Наћи површину и дужину висине BD троугла ABC ако је $A(-3, -2, 0)$, $B(3, -3, 1)$ и $C(5, 0, 2)$.



Решение 1. $A(-3, -2, 0)$, $B(3, -3, 1)$ и $C(5, 0, 2)$.

$$\vec{a} = \overrightarrow{CA} = (x_A - x_C, y_A - y_C, z_A - z_C) = (-8, -2, -2)$$

Решение 1. $A(-3, -2, 0)$, $B(3, -3, 1)$ и $C(5, 0, 2)$.

$$\vec{a} = \overrightarrow{CA} = (x_A - x_C, y_A - y_C, z_A - z_C) = (-8, -2, -2)$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{CB} = (-2, -3, -1)$$

Решение 1. $A(-3, -2, 0)$, $B(3, -3, 1)$ и $C(5, 0, 2)$.

$$\vec{a} = \overrightarrow{CA} = (x_A - x_C, y_A - y_C, z_A - z_C) = (-8, -2, -2)$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{CB} = (-2, -3, -1)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -8 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = (-4, -4, 20)$$

Решение 1. $A(-3, -2, 0)$, $B(3, -3, 1)$ и $C(5, 0, 2)$.

$$\vec{a} = \overrightarrow{CA} = (x_A - x_C, y_A - y_C, z_A - z_C) = (-8, -2, -2)$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{CB} = (-2, -3, -1)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -8 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = (-4, -4, 20)$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + 20^2}$$

Решение 1. $A(-3, -2, 0)$, $B(3, -3, 1)$ и $C(5, 0, 2)$.

$$\vec{a} = \overrightarrow{CA} = (x_A - x_C, y_A - y_C, z_A - z_C) = (-8, -2, -2)$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{CB} = (-2, -3, -1)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -8 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = (-4, -4, 20)$$

$$\begin{aligned} P_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + 20^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{432} = 6\sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + 20^2} \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{432} = 6\sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

Како је $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} CA \cdot BD$ и

$$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{(-8)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}
 P_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + 20^2} \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{432} = 6\sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

Како је $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} CA \cdot BD$ и

$$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{(-8)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

добијамо $BD = \frac{2P_{\triangle ABC}}{CA} = \frac{2 \cdot 6\sqrt{3}}{6\sqrt{2}} = \sqrt{6}.$



Решение 2. $P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2}$

Решение 2. $P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2}$

$$P_1 = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 20,$$

Решение 2. $P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2}$

$$P_1 = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 20,$$

$$P_2 = \begin{vmatrix} y_A & z_A & 1 \\ y_B & z_B & 1 \\ y_C & z_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$

Решение 2. $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2}$

$$P_1 = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 20,$$

$$P_2 = \begin{vmatrix} y_A & z_A & 1 \\ y_B & z_B & 1 \\ y_C & z_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$P_3 = \begin{vmatrix} z_A & x_A & 1 \\ z_B & x_B & 1 \\ z_C & x_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -4.$$

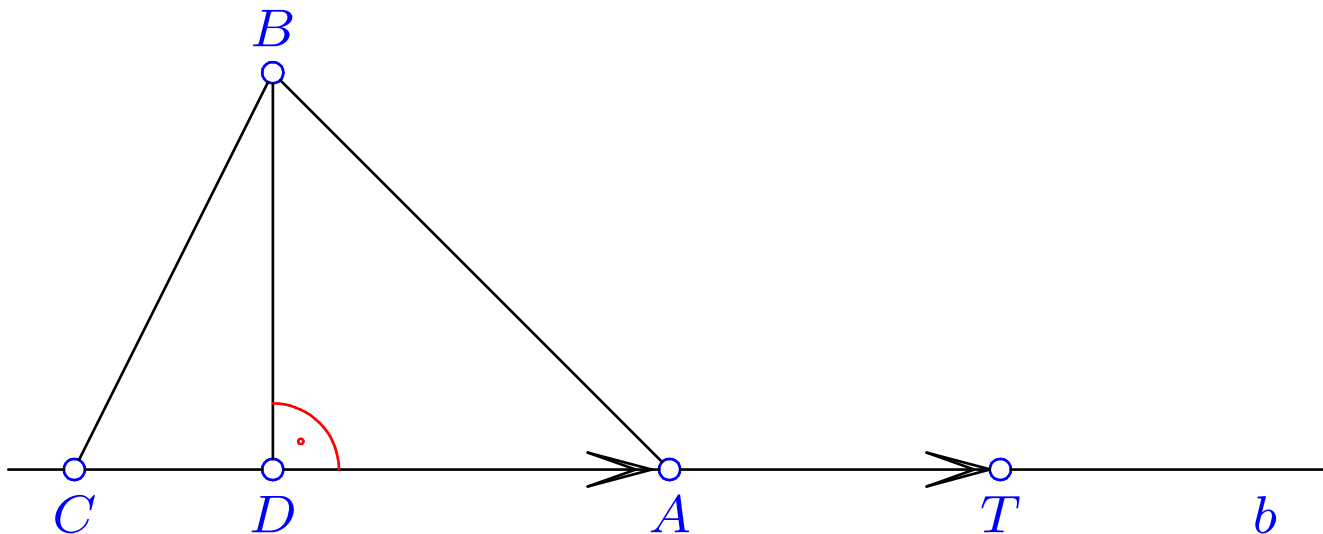
Решение 2. $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2}$

$$P_1 = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 20,$$

$$P_2 = \begin{vmatrix} y_A & z_A & 1 \\ y_B & z_B & 1 \\ y_C & z_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$P_3 = \begin{vmatrix} z_A & x_A & 1 \\ z_B & x_B & 1 \\ z_C & x_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -4.$$

$$P = \frac{1}{2}\sqrt{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2} = \frac{1}{2}\sqrt{432} = 6\sqrt{3}.$$



Произвољна тачка T са праве b дата је са

$$\begin{aligned}(x_T, y_T, z_T) &= (x_C, y_C, z_C) + t \cdot \overrightarrow{CA} \\ &= (5 - 8t, -2t, 2 - 2t)\end{aligned}$$

(\overrightarrow{CA} и \overrightarrow{CT} колинеарни, тј. важи $\overrightarrow{CT} = t \cdot \overrightarrow{CA}$).

$D \in b$ па је $D(5 - 8t, -2t, 2 - 2t)$, за неко t .

$D \in b$ па је $D(5 - 8t, -2t, 2 - 2t)$, за неко t .

t одређујемо из $CA \perp BD \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

$D \in b$ па је $D(5 - 8t, -2t, 2 - 2t)$, за неко t .

t одређујемо из $CA \perp BD \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

$$\overrightarrow{BD} = (2 - 8t, 3 - 2t, 2 - 2t)$$

$D \in b$ па је $D(5 - 8t, -2t, 2 - 2t)$, за неко t .

t одређујемо из $CA \perp BD \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

$$\overrightarrow{BD} = (2 - 8t, 3 - 2t, 2 - 2t)$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = (-8, -2, -2) \cdot (2 - 8t, 3 - 2t, 2 - 2t)$$

$D \in b$ па је $D(5 - 8t, -2t, 2 - 2t)$, за неко t .

t одређујемо из $CA \perp BD \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

$$\overrightarrow{BD} = (2 - 8t, 3 - 2t, 2 - 2t)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} &= (-8, -2, -2) \cdot (2 - 8t, 3 - 2t, 2 - 2t) \\ &= 16 - 64t + 6 - 4t + 2 - 4t\end{aligned}$$

$D \in b$ па је $D(5 - 8t, -2t, 2 - 2t)$, за неко t .

t одређујемо из $CA \perp BD \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

$$\overrightarrow{BD} = (2 - 8t, 3 - 2t, 2 - 2t)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} &= (-8, -2, -2) \cdot (2 - 8t, 3 - 2t, 2 - 2t) \\ &= 16 - 64t + 6 - 4t + 2 - 4t \\ &= 24 - 72t = 0\end{aligned}$$

$D \in b$ па је $D(5 - 8t, -2t, 2 - 2t)$, за неко t .

t одређујемо из $CA \perp BD \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

$$\overrightarrow{BD} = (2 - 8t, 3 - 2t, 2 - 2t)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} &= (-8, -2, -2) \cdot (2 - 8t, 3 - 2t, 2 - 2t) \\ &= 16 - 64t + 6 - 4t + 2 - 4t \\ &= 24 - 72t = 0\end{aligned}$$

$t = \frac{1}{3} \Rightarrow$ подножје висине из B је $D(\frac{7}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$.

$D \in b$ па је $D(5 - 8t, -2t, 2 - 2t)$, за неко t .

t одређујемо из $CA \perp BD \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

$$\overrightarrow{BD} = (2 - 8t, 3 - 2t, 2 - 2t)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} &= (-8, -2, -2) \cdot (2 - 8t, 3 - 2t, 2 - 2t) \\ &= 16 - 64t + 6 - 4t + 2 - 4t \\ &= 24 - 72t = 0\end{aligned}$$

$t = \frac{1}{3} \Rightarrow$ подножје висине из B је $D(\frac{7}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$.

Вектор $\overrightarrow{BD} = (-\frac{2}{3}, \frac{7}{3}, \frac{1}{3})$, па је тражена висина

$D \in b$ па је $D(5 - 8t, -2t, 2 - 2t)$, за неко t .

t одређујемо из $CA \perp BD \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

$$\overrightarrow{BD} = (2 - 8t, 3 - 2t, 2 - 2t)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} &= (-8, -2, -2) \cdot (2 - 8t, 3 - 2t, 2 - 2t) \\ &= 16 - 64t + 6 - 4t + 2 - 4t \\ &= 24 - 72t = 0\end{aligned}$$

$t = \frac{1}{3} \Rightarrow$ подножје висине из B је $D(\frac{7}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$.

Вектор $\overrightarrow{BD} = (-\frac{2}{3}, \frac{7}{3}, \frac{1}{3})$, па је тражена висина

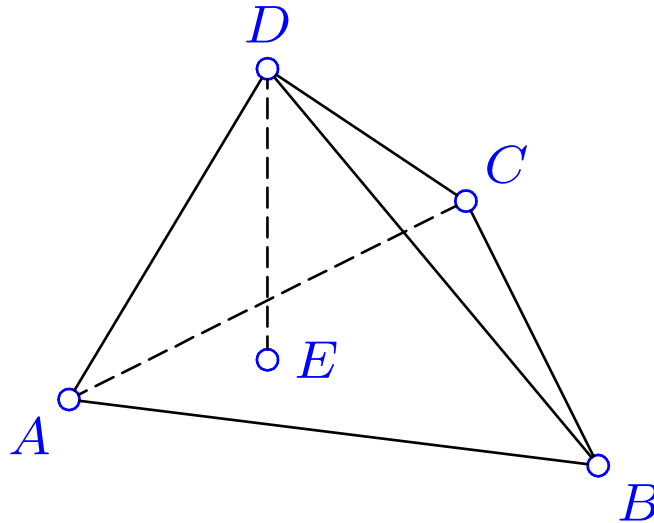
$$|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{49}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{6}.$$



7. 3.46. Дате су тачке $A(1, -1, 1)$, $B(1, 3, 1)$, $C(3, 1, 1)$, и $D(1, 1, 3)$.

а) Израчунати запремину V пирамиде $ABCD$.

б) Израчунати дужину висине h_D из темена D пирамиде $ABCD$.



Решение. **a)** $A(1, -1, 1), B(1, 3, 1), C(3, 1, 1), D(1, 1, 3).$

$$\overrightarrow{AB} = (0, 4, 0), \quad \overrightarrow{AC} = (2, 2, 0), \quad \overrightarrow{AD} = (0, 2, 2).$$

Решење. **a)** $A(1, -1, 1), B(1, 3, 1), C(3, 1, 1), D(1, 1, 3).$

$$\overrightarrow{AB} = (0, 4, 0), \quad \overrightarrow{AC} = (2, 2, 0), \quad \overrightarrow{AD} = (0, 2, 2).$$

Запремина пирамиде $ABCD$ дата је са

$$\begin{aligned} V_{ABCD} &= \frac{1}{6} |\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD})| = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \right| \\ &= \frac{|-16|}{6} = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

б) Површина троугла ABC је

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|.$$

б) Површина троугла ABC је

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|.$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, -8) \Rightarrow$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |(0, 0, -8)| = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4.$$

б) Површина троугла ABC је

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|.$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, -8) \Rightarrow$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |(0, 0, -8)| = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4.$$

$$\text{Из } V_{ABCD} = \frac{1}{3} P_{\triangle ABC} \cdot h_D \Rightarrow h_D = 2.$$



Напомена. Тачка T у равни ABC је

$$\begin{aligned}(x_T, y_T, z_T) &= (x_A, y_A, z_A) + t \cdot \overrightarrow{AB} + p \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= (1 + 2p, -1 + 4t + 2p, 1),\end{aligned}$$

Напомена. Тачка T у равни ABC је

$$\begin{aligned}(x_T, y_T, z_T) &= (x_A, y_A, z_A) + t \cdot \overrightarrow{AB} + p \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= (1 + 2p, -1 + 4t + 2p, 1),\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{DE} = (2p, -2 + 4t + 2p, -2)$$

Напомена. Тачка T у равни ABC је

$$\begin{aligned}(x_T, y_T, z_T) &= (x_A, y_A, z_A) + t \cdot \overrightarrow{AB} + p \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= (1 + 2p, -1 + 4t + 2p, 1),\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{DE} = (2p, -2 + 4t + 2p, -2)$$

и решавали би систем (по t и p)

$$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \quad \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.$$

Напомена. Тачка T у равни ABC је

$$\begin{aligned}(x_T, y_T, z_T) &= (x_A, y_A, z_A) + t \cdot \overrightarrow{AB} + p \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= (1 + 2p, -1 + 4t + 2p, 1),\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{DE} = (2p, -2 + 4t + 2p, -2)$$

и решавали би систем (по t и p)

$$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \quad \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.$$

Решење је $t = \frac{1}{2}, p = 0 \Rightarrow$ подножје $E(1, 1, 1)$.

Напомена. Тачка T у равни ABC је

$$\begin{aligned}(x_T, y_T, z_T) &= (x_A, y_A, z_A) + t \cdot \overrightarrow{AB} + p \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= (1 + 2p, -1 + 4t + 2p, 1),\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{DE} = (2p, -2 + 4t + 2p, -2)$$

и решавали би систем (по t и p)

$$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \quad \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.$$

Решење је $t = \frac{1}{2}$, $p = 0 \Rightarrow$ подножје $E(1, 1, 1)$.

Коначно, $h_D = |\overrightarrow{DE}| = 2$.

Напомена. Тачка T у равни ABC је

$$\begin{aligned}(x_T, y_T, z_T) &= (x_A, y_A, z_A) + t \cdot \overrightarrow{AB} + p \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= (1 + 2p, -1 + 4t + 2p, 1),\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{DE} = (2p, -2 + 4t + 2p, -2)$$

и решавали би систем (по t и p)

$$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \quad \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.$$

Решење је $t = \frac{1}{2}$, $p = 0 \Rightarrow$ подножје $E(1, 1, 1)$.

Коначно, $h_D = |\overrightarrow{DE}| = 2$.

Питање. Шта је једначина равни ABC ?

КРАЈ ЧАСА