

I двочас вежби

мр Владимир Балтић

Алгебарске структуре

# Теоријски увод

Основне особине:

1<sup>o</sup>    *затвореност*  $*$  у  $X$ :

$$(\forall x, y \in X) \quad x * y \in X;$$

Основне особине:

1° *затвореност*  $*$  у  $X$ :

$$(\forall x, y \in X) \quad x * y \in X;$$

2° *асоцијативност*  $*$  у  $X$ :

$$(\forall x, y, z \in X) \quad x * (y * z) = (x * y) * z;$$

Основне особине:

1° *затвореност*  $*$  у  $X$ :

$$(\forall x, y \in X) \quad x * y \in X;$$

2° *асоцијативност*  $*$  у  $X$ :

$$(\forall x, y, z \in X) \quad x * (y * z) = (x * y) * z;$$

3° постоји *неутралан елемент*  $e \in X$  за  $*$ :

$$(\exists e \in X)(\forall x \in X) \quad x * e = e * x = x;$$

Основне особине:

1° *затвореност*  $*$  у  $X$ :

$$(\forall x, y \in X) \quad x * y \in X;$$

2° *асоцијативност*  $*$  у  $X$ :

$$(\forall x, y, z \in X) \quad x * (y * z) = (x * y) * z;$$

3° постоји *неутралан елемент*  $e \in X$  за  $*$ :

$$(\exists e \in X)(\forall x \in X) \quad x * e = e * x = x;$$

4°  $(\forall x \in X)$  постоји *инверзан елемент*  $x' \in X$ :

$$(\forall x \in X)(\exists x' \in X) \quad x * x' = x' * x = e,$$

Основне особине:

1° *затвореност*  $*$  у  $X$ :

$$(\forall x, y \in X) \quad x * y \in X;$$

2° *асоцијативност*  $*$  у  $X$ :

$$(\forall x, y, z \in X) \quad x * (y * z) = (x * y) * z;$$

3° постоји *неутралан елемент*  $e \in X$  за  $*$ :

$$(\exists e \in X)(\forall x \in X) \quad x * e = e * x = x;$$

4°  $(\forall x \in X)$  постоји *инверзан елемент*  $x' \in X$ :

$$(\forall x \in X)(\exists x' \in X) \quad x * x' = x' * x = e,$$

5° *комутативност*  $*$  у  $X$ :

$$(\forall x, y \in X) \quad x * y = y * x$$

Структура  $(X, *)$ ,  $X \neq \emptyset$  у зависности које особине има је:



Структура  $(X, *)$ ,  $X \neq \emptyset$  у зависности које особине има је:

1°	<i>групоид</i>
----	----------------

Структура  $(X, *)$ ,  $X \neq \emptyset$  у зависности које особине има је:

$1^\circ$	<i>групоид</i>
$1^\circ, 2^\circ$	<i>семигрупа</i>

Структура  $(X, *)$ ,  $X \neq \emptyset$  у зависности које особине има је:

$1^\circ$	<i>групоид</i>
$1^\circ, 2^\circ$	<i>семигрупа</i>
$1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$	<i>моноид</i>

Структура  $(X, *)$ ,  $X \neq \emptyset$  у зависности које особине има је:

$1^\circ$	<i>групоид</i>
$1^\circ, 2^\circ$	<i>семигрупа</i>
$1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$	<i>моноид</i>
$1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 5^\circ$	<i>комутативан моноид</i>

Структура  $(X, *)$ ,  $X \neq \emptyset$  у зависности које особине има је:

$1^\circ$	<i>групоид</i>
$1^\circ, 2^\circ$	<i>семигрупа</i>
$1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$	<i>моноид</i>
$1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 5^\circ$	<i>комутативан моноид</i>
$1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ$	<i>група</i>

Структура  $(X, *)$ ,  $X \neq \emptyset$  у зависности које особине има је:

$1^\circ$	<i>групоид</i>
$1^\circ, 2^\circ$	<i>семигрупа</i>
$1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$	<i>моноид</i>
$1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 5^\circ$	<i>комутативан моноид</i>
$1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ$	<i>група</i>
$1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ, 5^\circ$	<i>Абелова група</i>

$(X, +, \cdot)$  је *прстен* ако је:

$(X, +, \cdot)$  је *прстен* ако је:

1°  $(X, +)$  је Абелова група;



$(X, +, \cdot)$  је *прстен* ако је:

- 1°  $(X, +)$  је Абелова група;
- 2°  $(X, \cdot)$  је семигрупа;

$(X, +, \cdot)$  је *прстен* ако је:

1°  $(X, +)$  је Абелова група;

2°  $(X, \cdot)$  је семигрупа;

3°  $\cdot$  је дистрибутивна у односу на  $+$ , тј.  
 $(\forall x, y, z \in X)$  важи

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

$(X, +, \cdot)$  је *прстен* ако је:

1°  $(X, +)$  је Абелова група;

2°  $(X, \cdot)$  је семигрупа;

3°  $\cdot$  је дистрибутивна у односу на  $+$ , тј.  
 $(\forall x, y, z \in X)$  важи

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

Ако постоји неутралан елемент за  $\cdot \Rightarrow$  *прстен са јединицом*.

$(X, +, \cdot)$  је *прстен* ако је:

1°  $(X, +)$  је Абелова група;

2°  $(X, \cdot)$  је семигрупа;

3°  $\cdot$  је дистрибутивна у односу на  $+$ , тј.  
 $(\forall x, y, z \in X)$  важи

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

Ако постоји неутралан елемент за  $\cdot \Rightarrow$  *прстен са јединицом*.

Ако је  $\cdot$  комутативна  $\Rightarrow$  *комутативан прстен*.

$(X, +, \cdot)$  je *nože* ako je:

$(X, +, \cdot)$  је *поље* ако је:

1°  $(X, +)$  је Абелова група;

$(X, +, \cdot)$  је *поље* ако је:

- 1°  $(X, +)$  је Абелова група;
- 2°  $(X/\{0\}, \cdot)$  је Абелова група

$(X, +, \cdot)$  је *поље* ако је:

1°  $(X, +)$  је Абелова група;

2°  $(X/\{0\}, \cdot)$  је Абелова група

(0 је н. ел. за операцију  $+$ );



$(X, +, \cdot)$  је *поље* ако је:

1°  $(X, +)$  је Абелова група;

2°  $(X/\{0\}, \cdot)$  је Абелова група

(0 је н. ел. за операцију  $+$ );

3°  $\cdot$  је дистрибутивна у односу на  $+$ .

# Задаци

1. 1.33.

Испитати да ли је  $(A, *)$  група ако је:

(1)  $A = \{x + y\sqrt{2} \mid x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}\},$

(2)  $A = \{x + y\sqrt{2} \mid x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}, x^2 + y^2 \neq 0\}$

и ако је  $a * b = a \cdot b.$

*Решение.*      (1)     $A = \{x + y\sqrt{2} \mid x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}\}.$

*Решење.*      (1)     $A = \{x + y\sqrt{2} \mid x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}\}.$

Затвореност:

$$a = x + y\sqrt{2} \quad \text{и} \quad b = v + w\sqrt{2}.$$

*Решење.*      (1)     $A = \{x + y\sqrt{2} \mid x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}\}.$

**Затвореност:**

$$a = x + y\sqrt{2} \quad \text{и} \quad b = v + w\sqrt{2}.$$

$$a * b = (x + y\sqrt{2}) \cdot (v + w\sqrt{2})$$

*Решење.*      (1)     $A = \{x + y\sqrt{2} \mid x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}\}.$

**Затвореност:**

$$a = x + y\sqrt{2} \quad \text{и} \quad b = v + w\sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned} a * b &= (x + y\sqrt{2}) \cdot (v + w\sqrt{2}) \\ &= xv + xw\sqrt{2} + yv\sqrt{2} + 2yw \end{aligned}$$

*Решење.*      (1)     $A = \{x + y\sqrt{2} \mid x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}\}.$

**Затвореност:**

$$a = x + y\sqrt{2} \quad \text{и} \quad b = v + w\sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned} a * b &= (x + y\sqrt{2}) \cdot (v + w\sqrt{2}) \\ &= xv + xw\sqrt{2} + yv\sqrt{2} + 2yw \\ &= (xv + 2yw) + (xw + yv)\sqrt{2}, \end{aligned}$$

*Решение.* (1)  $A = \{x + y\sqrt{2} \mid x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}\}.$

**Затвореност:**

$$a = x + y\sqrt{2} \quad \text{и} \quad b = v + w\sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned} a * b &= (x + y\sqrt{2}) \cdot (v + w\sqrt{2}) \\ &= xv + xw\sqrt{2} + yv\sqrt{2} + 2yw \\ &= (xv + 2yw) + (xw + yv)\sqrt{2}, \end{aligned}$$

$$x, y, v, w \in \mathbb{Q} \Rightarrow \begin{array}{l} xv + 2yw \in \mathbb{Q} \\ xw + yv \in \mathbb{Q} \end{array} \Rightarrow a * b \in A.$$





Асоцијативност:

се преноси из  $\mathbb{R}$ :

$$a * (b * c) = a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = (a * b) * c.$$



## Асоцијативност:

се преноси из  $\mathbb{R}$ :

$$a * (b * c) = a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = (a * b) * c.$$



## Неутралан елемент:

је  $e = 1$ :

$$1 * a = 1 \cdot a = a \quad \text{и} \quad a * 1 = a \cdot 1 = a.$$

## Асоцијативност:

се преноси из  $\mathbb{R}$ :

$$a * (b * c) = a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = (a * b) * c.$$



## Неутралан елемент:

је  $e = 1$ :

$$1 * a = 1 \cdot a = a \quad \text{и} \quad a * 1 = a \cdot 1 = a.$$

$e \in A$  јер је  $e = 1 + 0 \cdot \sqrt{2}$ , а  $1, 0 \in \mathbb{Q}$ .



Инверзан елемент:

За  $a = x + y\sqrt{2}$  тражимо ин. ел.  $a' = z + t\sqrt{2}$ .

$$a * a' = a' * a = e$$

Инверзан елемент:

За  $a = x + y\sqrt{2}$  тражимо ин. ел.  $a' = z + t\sqrt{2}$ .

$$a * a' = a' * a = e$$

$$(x + y\sqrt{2}) \cdot (z + t\sqrt{2}) = (z + t\sqrt{2}) \cdot (x + y\sqrt{2}) = 1.$$

## Инверзан елемент:

За  $a = x + y\sqrt{2}$  тражимо ин. ел.  $a' = z + t\sqrt{2}$ .

$$a * a' = a' * a = e$$

$$(x + y\sqrt{2}) \cdot (z + t\sqrt{2}) = (z + t\sqrt{2}) \cdot (x + y\sqrt{2}) = 1.$$

Одавде за  $x = y = 0$ , тј. за  $a = 0$  добијамо  $0 \cdot (z + t\sqrt{2}) = 1$ , што је немогуће, па елемент  $a = 0$  нема инверзан елемент.

## Инверзан елемент:

За  $a = x + y\sqrt{2}$  тражимо ин. ел.  $a' = z + t\sqrt{2}$ .

$$a * a' = a' * a = e$$

$$(x + y\sqrt{2}) \cdot (z + t\sqrt{2}) = (z + t\sqrt{2}) \cdot (x + y\sqrt{2}) = 1.$$

Одавде за  $x = y = 0$ , тј. за  $a = 0$  добијамо  $0 \cdot (z + t\sqrt{2}) = 1$ , што је немогуће, па елемент  $a = 0$  нема инверзан елемент.

Због овога дата структура НИЈЕ група.

Комутативност:

се преноси из  $\mathbb{R}$ :

$$a * b = a \cdot b = b \cdot a = b * a.$$





## Комутативност:

се преноси из  $\mathbb{R}$ :

$$a * b = a \cdot b = b \cdot a = b * a.$$



## Закључак:

$(A, *)$  није група.

$(A, *)$  је комутативан моноид.

$$(2) \quad A = \{x + y\sqrt{2} \mid x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}, x^2 + y^2 \neq 0\}.$$

(2)  $A = \{x + y\sqrt{2} \mid x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}, x^2 + y^2 \neq 0\}.$

Аналогно као у (1) добијамо да је  $*$  у  $A$ :

1° затворена (проверити и да је  $a * b \neq 0$ ),

2° асоцијативна,

3° има н. ел.  $e = 1$ ,

5° комутативна.

4° инверзан элемент:

$$(x + y\sqrt{2}) \cdot (z + t\sqrt{2}) = (z + t\sqrt{2}) \cdot (x + y\sqrt{2}) = 1.$$

4° инверзан элемент:

$$(x + y\sqrt{2}) \cdot (z + t\sqrt{2}) = (z + t\sqrt{2}) \cdot (x + y\sqrt{2}) = 1.$$

$$z + t\sqrt{2} = \frac{1}{x + y\sqrt{2}} = \frac{1}{x + y\sqrt{2}} \cdot \frac{x - y\sqrt{2}}{x - y\sqrt{2}}$$

4° инверзан элемент:

$$(x + y\sqrt{2}) \cdot (z + t\sqrt{2}) = (z + t\sqrt{2}) \cdot (x + y\sqrt{2}) = 1.$$

$$\begin{aligned} z + t\sqrt{2} &= \frac{1}{x + y\sqrt{2}} = \frac{1}{x + y\sqrt{2}} \cdot \frac{x - y\sqrt{2}}{x - y\sqrt{2}} \\ &= \frac{x - y\sqrt{2}}{x^2 - 2y^2} = \frac{x}{x^2 - 2y^2} + \frac{-y}{x^2 - 2y^2} \sqrt{2}. \end{aligned}$$

4° инверзан элемент:

$$(x + y\sqrt{2}) \cdot (z + t\sqrt{2}) = (z + t\sqrt{2}) \cdot (x + y\sqrt{2}) = 1.$$

$$\begin{aligned} z + t\sqrt{2} &= \frac{1}{x + y\sqrt{2}} = \frac{1}{x + y\sqrt{2}} \cdot \frac{x - y\sqrt{2}}{x - y\sqrt{2}} \\ &= \frac{x - y\sqrt{2}}{x^2 - 2y^2} = \frac{x}{x^2 - 2y^2} + \frac{-y}{x^2 - 2y^2} \sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$x, y \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{x}{x^2 - 2y^2}, \frac{-y}{x^2 - 2y^2} \in \mathbb{Q}$$

4° инверзан елемент:

$$(x + y\sqrt{2}) \cdot (z + t\sqrt{2}) = (z + t\sqrt{2}) \cdot (x + y\sqrt{2}) = 1.$$

$$\begin{aligned} z + t\sqrt{2} &= \frac{1}{x + y\sqrt{2}} = \frac{1}{x + y\sqrt{2}} \cdot \frac{x - y\sqrt{2}}{x - y\sqrt{2}} \\ &= \frac{x - y\sqrt{2}}{x^2 - 2y^2} = \frac{x}{x^2 - 2y^2} + \frac{-y}{x^2 - 2y^2} \sqrt{2}. \end{aligned}$$

$x, y \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{x}{x^2 - 2y^2}, \frac{-y}{x^2 - 2y^2} \in \mathbb{Q}$  ( $x^2 - 2y^2 \neq 0$  јер  $x^2 - 2y^2 = 0 \Rightarrow \frac{x}{y} = \pm\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$  контрадикција),



4° инверзан елемент:

$$(x + y\sqrt{2}) \cdot (z + t\sqrt{2}) = (z + t\sqrt{2}) \cdot (x + y\sqrt{2}) = 1.$$

$$\begin{aligned} z + t\sqrt{2} &= \frac{1}{x + y\sqrt{2}} = \frac{1}{x + y\sqrt{2}} \cdot \frac{x - y\sqrt{2}}{x - y\sqrt{2}} \\ &= \frac{x - y\sqrt{2}}{x^2 - 2y^2} = \frac{x}{x^2 - 2y^2} + \frac{-y}{x^2 - 2y^2} \sqrt{2}. \end{aligned}$$

$x, y \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{x}{x^2 - 2y^2}, \frac{-y}{x^2 - 2y^2} \in \mathbb{Q}$  ( $x^2 - 2y^2 \neq 0$  јер  $x^2 - 2y^2 = 0 \Rightarrow \frac{x}{y} = \pm\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$  контрадикција), а  $(x, y) \neq (0, 0) \Rightarrow a' = (\frac{x}{x^2 - 2y^2}, \frac{-y}{x^2 - 2y^2}) \neq (0, 0)$ .

4° инверзан елемент:

$$(x + y\sqrt{2}) \cdot (z + t\sqrt{2}) = (z + t\sqrt{2}) \cdot (x + y\sqrt{2}) = 1.$$

$$\begin{aligned} z + t\sqrt{2} &= \frac{1}{x + y\sqrt{2}} = \frac{1}{x + y\sqrt{2}} \cdot \frac{x - y\sqrt{2}}{x - y\sqrt{2}} \\ &= \frac{x - y\sqrt{2}}{x^2 - 2y^2} = \frac{x}{x^2 - 2y^2} + \frac{-y}{x^2 - 2y^2} \sqrt{2}. \end{aligned}$$

$x, y \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{x}{x^2 - 2y^2}, \frac{-y}{x^2 - 2y^2} \in \mathbb{Q}$  ( $x^2 - 2y^2 \neq 0$  јер  $x^2 - 2y^2 = 0 \Rightarrow \frac{x}{y} = \pm\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$  контрадикција), а  $(x, y) \neq (0, 0) \Rightarrow a' = (\frac{x}{x^2 - 2y^2}, \frac{-y}{x^2 - 2y^2}) \neq (0, 0)$ .

Стога инверзан елемент  $a' \in A$ .



Закључак:

$(A, *)$  је Абелова група.



2. 1.40.

Испитати да ли је  $(A, *)$  група ако је  
 $A = \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$  и  $a * b = a + b + a \cdot b$ .

2. 1.40.

Испитати да ли је  $(A, *)$  група ако је  
 $A = \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$  и  $a * b = a + b + a \cdot b$ .

*Решење.* Затвореност:

$$a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\} \Rightarrow a * b = a + b + ab \in \mathbb{Q}.$$

2. 1.40.

Испитати да ли је  $(A, *)$  група ако је  
 $A = \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$  и  $a * b = a + b + a \cdot b$ .

*Решење.* Затвореност:

$$a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\} \Rightarrow a * b = a + b + ab \in \mathbb{Q}.$$

Треба још  $a * b \neq -1$ .

Пп. супротно да је  $a * b = -1$ .

*Решење.*      Затвореност:

$$a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\} \Rightarrow a * b = a + b + ab \in \mathbb{Q}.$$

Треба још  $a * b \neq -1$ .

Пп. супротно да је  $a * b = -1$ .

$$a + b + ab = -1, \text{ тј. } a + b(1 + a) = -1.$$

$$b(1 + a) = -1 - a$$

*Решење.*      Затвореност:

$$a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\} \Rightarrow a * b = a + b + ab \in \mathbb{Q}.$$

Треба још  $a * b \neq -1$ .

Пп. супротно да је  $a * b = -1$ .

$$a + b + ab = -1, \text{ тј. } a + b(1 + a) = -1.$$

$$b(1 + a) = -1 - a \quad / : (a + 1) \neq 0$$

$$b = \frac{-1-a}{1+a} = \frac{-(1+a)}{1+a} = -1$$



*Решење.*      Затвореност:

$$a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\} \Rightarrow a * b = a + b + ab \in \mathbb{Q}.$$

Треба још  $a * b \neq -1$ .

Пп. супротно да је  $a * b = -1$ .

$$a + b + ab = -1, \text{ тј. } a + b(1 + a) = -1.$$

$$b(1 + a) = -1 - a \quad / : (a + 1) \neq 0$$

$$b = \frac{-1-a}{1+a} = \frac{-(1+a)}{1+a} = -1 \quad \downarrow \quad b \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}.$$

*Решење.* Затвореност:

$$a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\} \Rightarrow a * b = a + b + ab \in \mathbb{Q}.$$

Треба још  $a * b \neq -1$ .

Пп. супротно да је  $a * b = -1$ .

$$a + b + ab = -1, \text{ тј. } a + b(1 + a) = -1.$$

$$b(1 + a) = -1 - a \quad / : (a + 1) \neq 0$$

$$b = \frac{-1-a}{1+a} = \frac{-(1+a)}{1+a} = -1 \quad \downarrow \quad b \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}.$$

Стога  $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\} \Rightarrow a * b \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}.$



## Асоцијативност:

Оп.  $+$  и  $\cdot$  су асоцијативне, комутативне и дистрибутивне у  $\mathbb{R}$

## Асоцијативност:

Оп.  $+$  и  $\cdot$  су асоцијативне, комутативне и дистрибутивне у  $\mathbb{R}$  па у  $A \subset \mathbb{R}$  важи

$$a * (b * c) = a + (b * c) + a \cdot (b * c)$$

## Асоцијативност:

Оп.  $+$  и  $\cdot$  су асоцијативне, комутативне и дистрибутивне у  $\mathbb{R}$  па у  $A \subset \mathbb{R}$  важи

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= a + (b * c) + a \cdot (b * c) \\ &= a + (b + c + bc) + a \cdot (b + c + bc) \end{aligned}$$

## Асоцијативност:

Оп.  $+$  и  $\cdot$  су асоцијативне, комутативне и дистрибутивне у  $\mathbb{R}$  па у  $A \subset \mathbb{R}$  важи

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= a + (b * c) + a \cdot (b * c) \\ &= a + (b + c + bc) + a \cdot (b + c + bc) \\ &= a + b + c + ab + ac + bc + abc \end{aligned}$$

## Асоцијативност:

Оп.  $+$  и  $\cdot$  су асоцијативне, комутативне и дистрибутивне у  $\mathbb{R}$  па у  $A \subset \mathbb{R}$  важи

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= a + (b * c) + a \cdot (b * c) \\ &= a + (b + c + bc) + a \cdot (b + c + bc) \\ &= a + b + c + ab + ac + bc + abc \\ &= (a + b + ab) + c + (a + b + ab) \cdot c \end{aligned}$$

## Асоцијативност:

Оп.  $+$  и  $\cdot$  су асоцијативне, комутативне и дистрибутивне у  $\mathbb{R}$  па у  $A \subset \mathbb{R}$  важи

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= a + (b * c) + a \cdot (b * c) \\ &= a + (b + c + bc) + a \cdot (b + c + bc) \\ &= a + b + c + ab + ac + bc + abc \\ &= (a + b + ab) + c + (a + b + ab) \cdot c \\ &= (a * b) + c + (a * b) \cdot c = (a * b) * c. \end{aligned}$$





Неутралан елемент:

$$x * e = x + e + x \cdot e = x$$

Неутралан елемент:

$$x * e = x + e + x \cdot e = x$$

$$(1 + x) \cdot e = 0 \Rightarrow e = 0 \in A.$$

Неутралан элемент:

$$x * e = x + e + x \cdot e = x$$

$$(1 + x) \cdot e = 0 \Rightarrow e = 0 \in A.$$

И

$$0 * x = 0 + x + 0 \cdot x = x.$$



Инверзан елемент:

За  $x'$  важи  $x * x' = e$ , тј.  $x + x' + x \cdot x' = 0$ ,

## Инверзан елемент:

За  $x'$  важи  $x * x' = e$ , тј.  $x + x' + x \cdot x' = 0$ ,

одакле је  $x' = \frac{-x}{1+x} \in \mathbb{Q}$

## Инверзан елемент:

За  $x'$  важи  $x * x' = e$ , тј.  $x + x' + x \cdot x' = 0$ ,

одакле је  $x' = \frac{-x}{1+x} \in \mathbb{Q}$

(исто и из  $x' * x = e$ ).

## Инверзан елемент:

За  $x'$  важи  $x * x' = e$ , тј.  $x + x' + x \cdot x' = 0$ ,

одакле је  $x' = \frac{-x}{1+x} \in \mathbb{Q}$

(исто и из  $x' * x = e$ ).

$$\frac{-x}{1+x} = -1 \quad / \cdot (1+x) \neq 0$$

## Инверзан елемент:

За  $x'$  важи  $x * x' = e$ , тј.  $x + x' + x \cdot x' = 0$ ,

одакле је  $x' = \frac{-x}{1+x} \in \mathbb{Q}$

(исто и из  $x' * x = e$ ).

$$\frac{-x}{1+x} = -1 \quad / \cdot (1+x) \neq 0$$

$$-x = -1 - x, \text{ тј. } 0 = -1 \quad \downarrow$$



## Инверзан елемент:

За  $x'$  важи  $x * x' = e$ , тј.  $x + x' + x \cdot x' = 0$ ,

одакле је  $x' = \frac{-x}{1+x} \in \mathbb{Q}$

(исто и из  $x' * x = e$ ).

$$\frac{-x}{1+x} = -1 \quad / \cdot (1+x) \neq 0$$

$$-x = -1 - x, \text{ тј. } 0 = -1 \quad \downarrow$$

Стога је  $x' = \frac{-x}{1+x} \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ .



## Комутативност:

Оп.  $+$  и  $\cdot$  комутативне у  $\mathbb{R}$ ,

## Комутативност:

Оп.  $+$  и  $\cdot$  комутативне у  $\mathbb{R}$ , па и у  $A \subset \mathbb{R}$  важи

$$a * b = a + b + ab = b + a + ba = b * a.$$



## Комутативност:

Оп.  $+$  и  $\cdot$  комутативне у  $\mathbb{R}$ , па и у  $A \subset \mathbb{R}$  важи

$$a * b = a + b + ab = b + a + ba = b * a.$$



## Закључак:

$(A, *)$  је Абелова група.



### 3. 1.44.

Испитати да ли је  $(A, *)$  група ако је

$$A = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0\} \quad \text{и}$$

$$(a, b) * (c, d) = (ac, bc + c + d).$$

$$(a, b) * (c, d) = (ac, bc + c + d).$$

*Решење.*      Затвореност:

Нека су  $(a, b), (c, d) \in A$ .

$$(a, b) * (c, d) = (ac, bc + c + d).$$

*Решење.*      Затвореност:

Нека су  $(a, b), (c, d) \in A$ .

Из  $a, c \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$  и  $b, d \in \mathbb{Q}$  следи

$$a \cdot c \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \quad \text{и} \quad bc + c + d \in \mathbb{Q},$$

па је и  $(a, b) * (c, d) = (ac, bc + c + d) \in A$ .



## Асоцијативност:

Оп.  $+$  и  $\cdot$  су асоцијативне, комутативне и дистрибутивне у  $\mathbb{R}$



## Асоцијативност:

Оп.  $+$  и  $\cdot$  су асоцијативне, комутативне и дистрибутивне у  $\mathbb{R}$  па у  $A \subset \mathbb{R}^2$  важи

$$(a, b) * \left( (c, d) * (f, g) \right) = (a, b) * (cf, df + f + g)$$

## Асоцијативност:

Оп.  $+$  и  $\cdot$  су асоцијативне, комутативне и дистрибутивне у  $\mathbb{R}$  па у  $A \subset \mathbb{R}^2$  важи

$$\begin{aligned}(a, b) * \left( (c, d) * (f, g) \right) &= (a, b) * (cf, df + f + g) \\ &= (acf, bcf + cf + df + f + g)\end{aligned}$$

## Асоцијативност:

Оп.  $+$  и  $\cdot$  су асоцијативне, комутативне и дистрибутивне у  $\mathbb{R}$  па у  $A \subset \mathbb{R}^2$  важи

$$\begin{aligned}(a, b) * ((c, d) * (f, g)) &= (a, b) * (cf, df + f + g) \\ &= (acf, bcf + cf + df + f + g) \\ &= (ac, bc + c + d) * (f, g)\end{aligned}$$

## Асоцијативност:

Оп.  $+$  и  $\cdot$  су асоцијативне, комутативне и дистрибутивне у  $\mathbb{R}$  па у  $A \subset \mathbb{R}^2$  важи

$$\begin{aligned}(a, b) * \left( (c, d) * (f, g) \right) &= (a, b) * (cf, df + f + g) \\ &= (acf, bcf + cf + df + f + g) \\ &= (ac, bc + c + d) * (f, g) \\ &= \left( (a, b) * (c, d) \right) * (f, g).\end{aligned}$$



Неутралан елемент:

Важи  $x * e = x$ , тј.

$$(a, b) * (e_1, e_2) = (a \cdot e_1, b \cdot e_1 + e_1 + e_2) = (a, b).$$

Неутралан елемент:

Важи  $x * e = x$ , тј.

$$(a, b) * (e_1, e_2) = (a \cdot e_1, b \cdot e_1 + e_1 + e_2) = (a, b).$$

Добијамо систем

$$\begin{aligned} a \cdot e_1 &= a \\ b \cdot e_1 + e_1 + e_2 &= b \end{aligned}$$

## Неутралан елемент:

Важи  $x * e = x$ , тј.

$$(a, b) * (e_1, e_2) = (a \cdot e_1, b \cdot e_1 + e_1 + e_2) = (a, b).$$

Добијамо систем 
$$\begin{array}{l} a \cdot e_1 = a \\ b \cdot e_1 + e_1 + e_2 = b \end{array}$$
 одакле

$e_1 = 1$  и  $e_2 = -1$ , тј.  $e = (1, -1) \in A$ .

## Неутралан елемент:

Важи  $x * e = x$ , тј.

$$(a, b) * (e_1, e_2) = (a \cdot e_1, b \cdot e_1 + e_1 + e_2) = (a, b).$$

Добијамо систем 
$$\begin{array}{l} a \cdot e_1 = a \\ b \cdot e_1 + e_1 + e_2 = b \end{array}$$
 одакле

$e_1 = 1$  и  $e_2 = -1$ , тј.  $e = (1, -1) \in A$ .

Важи и

$$(1, -1) * (a, b) = (1 \cdot a, (-1) \cdot a + a + b) = (a, b).$$





Инверзан елемент:

Нека је за  $x = (a, b)$  инв. ел.  $x' = (m, n)$ .

## Инверзан елемент:

Нека је за  $x = (a, b)$  инв. ел.  $x' = (m, n)$ .

Важи  $x * x' = e$ , тј.

$$x * x' = (am, bm + m + n) = (1, -1).$$

## Инверзан елемент:

Нека је за  $x = (a, b)$  инв. ел.  $x' = (m, n)$ .

Важи  $x * x' = e$ , тј.

$$x * x' = (am, bm + m + n) = (1, -1).$$

Добијамо систем 
$$\begin{aligned} am &= 1 \\ bm + m + n &= -1 \end{aligned}$$

## Инверзан елемент:

Нека је за  $x = (a, b)$  инв. ел.  $x' = (m, n)$ .

Важи  $x * x' = e$ , тј.

$$x * x' = (am, bm + m + n) = (1, -1).$$

Добијамо систем 
$$\begin{array}{l} am = 1 \\ bm + m + n = -1 \end{array}$$
 одакле је

$$m = \frac{1}{a} \neq 0,$$

## Инверзан елемент:

Нека је за  $x = (a, b)$  инв. ел.  $x' = (m, n)$ .

Важи  $x * x' = e$ , тј.

$$x * x' = (am, bm + m + n) = (1, -1).$$

Добијамо систем 
$$\begin{array}{l} am = 1 \\ bm + m + n = -1 \end{array}$$
 одакле је 
$$m = \frac{1}{a} \neq 0, \text{ па је } \frac{b}{a} + \frac{1}{a} + n = -1, n = \frac{-1-a-b}{a},$$

## Инверзан елемент:

Нека је за  $x = (a, b)$  инв. ел.  $x' = (m, n)$ .

Важи  $x * x' = e$ , тј.

$$x * x' = (am, bm + m + n) = (1, -1).$$

Добијамо систем 
$$\begin{array}{l} am = 1 \\ bm + m + n = -1 \end{array}$$
 одакле је

$m = \frac{1}{a} \neq 0$ , па је  $\frac{b}{a} + \frac{1}{a} + n = -1$ ,  $n = \frac{-1-a-b}{a}$ , тј.

$$x' = \left( \frac{1}{a}, \frac{-1-a-b}{a} \right) \in A.$$

## Инверзан елемент:

Нека је за  $x = (a, b)$  инв. ел.  $x' = (m, n)$ .

Важи  $x * x' = e$ , тј.

$$x * x' = (am, bm + m + n) = (1, -1).$$

Добијамо систем 
$$\begin{aligned} am &= 1 \\ bm + m + n &= -1 \end{aligned}$$
 одакле је

$m = \frac{1}{a} \neq 0$ , па је  $\frac{b}{a} + \frac{1}{a} + n = -1$ ,  $n = \frac{-1-a-b}{a}$ , тј.

$$x' = \left(\frac{1}{a}, \frac{-1-a-b}{a}\right) \in A.$$

Важи и  $x' * x = e$ , па је  $x'$  инв. ел. у  $A$ .



Закључак:

$(A, *)$  је група.

$(A, *)$  није Абелова



Закључак:

$(A, *)$  је група.

$(A, *)$  није Абелова јер  $*$  није комутативна у  $A$ :

$$(1, 0) * (2, 1) = (2, 3) \neq (2, 2) = (2, 1) * (1, 0).$$



4. 1.39. Нека је

$$A = \{f_{a,b}(x) : f_{a,b}(x) = ax + b, \ a, b \in \mathbb{R}, \ a \neq 0\}$$

и нека је  $\circ$  операција на скупу  $A$  дефинисана као композиција пресликавања. Доказати да је  $(A, \circ)$  група и испитати да ли је Абелова.

*Решење.* Композиција функција  $f_{a,b} \circ f_{c,d}$  је дефинисана као  $f_{a,b}(x) \circ f_{c,d}(x) = f_{c,d}(f_{a,b}(x))$ .

**Затвореност:**

$$\begin{aligned} f_{a,b}(x) \circ f_{c,d}(x) &= f_{c,d}(f_{a,b}(x)) \\ &= f_{c,d}(ax + b) = c(ax + b) + d \\ &= acx + bc + d = f_{ac, bc+d}(x). \end{aligned}$$

$$a, c \neq 0 \Rightarrow ac \neq 0 \Rightarrow f_{a,b}(x) \circ f_{c,d}(x) \in A. \quad \checkmark$$

## Асоцијативност:

Оп.  $+$  и  $\cdot$  су асоцијативне, комутативне и дистрибутивне у  $\mathbb{R}$  па у  $A$  важи

$$\begin{aligned} f_{a,b}(x) \circ \left( f_{c,d}(x) \circ f_{g,h}(x) \right) &= f_{a,b}(x) \circ f_{cg,dg+h}(x) \\ &= f_{acg,bcg+dg+h}(x) \\ &= f_{ac,bc+d}(x) \circ f_{g,h}(x) \\ &= \left( f_{a,b}(x) \circ f_{c,d}(x) \right) \circ f_{g,h}(x). \end{aligned}$$



## Неутралан елемент:

Идентичко пресликавање

$$f_{1,0}(x) = x$$

је неутралан елемент за  $\circ$ .



## Инверзан елемент:

Инверзан елемент за линеарну функцију

$$f_{a,b}(x) = ax + b$$

је линеарна функција

$$f_{\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}.$$



## Закључак:

$(A, \circ)$  је група.

$(A, \circ)$  није Абелова јер у  $A$  композиција  $\circ$  није комутативна:

$$f_{1,2}(x) \circ f_{2,1}(x) = f_{2,5}(x) \neq f_{2,3} = f_{2,1}(x) \circ f_{1,2}(x).$$



5. 1.59. Доказати да је структура

$$(\{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}, +, \cdot)$$

поље.

*Решење.*      Означимо

$$A = \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}.$$



*Решење.*      Означимо

$$A = \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}.$$

$(A, +)$  Абелова група:

Оп.  $+$  је затворена у  $A$ :

$$(x + y\sqrt{2}) + (v + w\sqrt{2}) = (x + v) + (y + w)\sqrt{2}. \quad \checkmark$$

*Решење.*      Означимо

$$A = \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}.$$

$(A, +)$  Абелова група:

Оп.  $+$  је затворена у  $A$ :

$$(x + y\sqrt{2}) + (v + w\sqrt{2}) = (x + v) + (y + w)\sqrt{2}. \quad \checkmark$$

Асоц. се преноси из  $\mathbb{R}$ :

$$a + (b + c) = (a + b) + c. \quad \checkmark$$

Неут. ел. за  $+$  је  $e = 0 = 0 + 0 \cdot \sqrt{2} \in A$ . ✓

Неут. ел. за  $+$  је  $e = 0 = 0 + 0 \cdot \sqrt{2} \in A$ . ✓

Инв. ел. за  $a = x + y\sqrt{2}$  је  
 $a' = (-x) + (-y)\sqrt{2} \in A$ . ✓

Неут. ел. за  $+$  је  $e = 0 = 0 + 0 \cdot \sqrt{2} \in A$ . ✓

Инв. ел. за  $a = x + y\sqrt{2}$  је  
 $a' = (-x) + (-y)\sqrt{2} \in A$ . ✓

Комут. се преноси из  $\mathbb{R}$ :

$a + b = b + a$ . ✓

Неут. ел. за  $+$  је  $e = 0 = 0 + 0 \cdot \sqrt{2} \in A$ .



Инв. ел. за  $a = x + y\sqrt{2}$  је

$$a' = (-x) + (-y)\sqrt{2} \in A.$$



Комут. се преноси из  $\mathbb{R}$ :

$$a + b = b + a.$$



$(A, +)$  је Абелова група.

$(A \setminus \{0\}, \cdot)$  Абелова група:

У 1. задатку  $(A \setminus \{0\}, \cdot)$  Абелова група.

$(A \setminus \{0\}, \cdot)$  Абелова група:

У 1. задатку  $(A \setminus \{0\}, \cdot)$  Абелова група.

Дистрибутивност:

Како је  $\cdot$  је дистрибутивна у односу на  $+$  у  $\mathbb{R}$ , то је она дистр. и у  $A \subset \mathbb{R}$ .



$(A \setminus \{0\}, \cdot)$  Абелова група:

У 1. задатку  $(A \setminus \{0\}, \cdot)$  Абелова група.

Дистрибутивност:

Како је  $\cdot$  је дистрибутивна у односу на  $+$  у  $\mathbb{R}$ , то је она дистр. и у  $A \subset \mathbb{R}$ .

Закључак:

$(A, +, \cdot)$  је поље.



**КРАЈ ЧАСА**