

III двочас вежби

мр Владимир Балтић

2. Линеарна алгебра

2.3. Матрице

Теоријски увод

ДЕФИНИЦИЈА:

Субматрица матрице A се добија тако што у A одбацимо неке врсте и/или колоне.

ДЕФИНИЦИЈЕ:

Субматрица матрице A се добија тако што у A одбацимо неке врсте и/или колоне.

Ранг матрице A , $r(A)$, је ред њене највеће регуларне квадратне субматрице.

ДЕФИНИЦИЈЕ:

Субматрица матрице A се добија тако што у A одбацимо неке врсте и/или колоне.

Ранг матрице A , $r(A)$, је ред њене највеће регуларне квадратне субматрице.

Ранг нула–матрице

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

је једнак 0.

Елементарне трансформације матрице не мењају ранг и оне су:

Елементарне трансформације матрице не мењају ранг и оне су:

1^о замена места 2 врсте (колоне),

Елементарне трансформације матрице не мењају ранг и оне су:

1° замена места 2 врсте (колоне),

2° множење врсте (колоне) бројем $k \neq 0$,

Елементарне трансформације матрице не мењају ранг и оне су:

1° замена места 2 врсте (колоне),

2° множење врсте (колоне) бројем $k \neq 0$,

3° додавање врсте (колоне), помножене неким бројем, другој врсти (колони).

Вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$ су *линеарно*
зависни

Вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$ су *линеарно зависни* ако постоје $k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{R}$ такви да

$$k_1 \vec{v}_1 + k_2 \vec{v}_2 + \dots + k_m \vec{v}_m = \vec{0}$$

и $(k_1, k_2, \dots, k_m) \neq (0, 0, \dots, 0)$.

Вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$ су *линеарно зависни* ако постоје $k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{R}$ такви да

$$k_1 \vec{v}_1 + k_2 \vec{v}_2 + \dots + k_m \vec{v}_m = \vec{0}$$

и $(k_1, k_2, \dots, k_m) \neq (0, 0, \dots, 0)$.

У противном су вектори *линеарно независни*.

Теорема 1. Ранг матрице A , $r(A)$, је највећи број линеарно независних врста (колона).

Теорема 1. Ранг матрице A , $r(A)$, је највећи број линеарно независних врста (колона).

Ранг $r(A)$ је број врста матрице A у степенастом облику које немају све елементе 0 .

Задаци

1.

Ако су A , B , X и $B - I$ регуларне матрице, одредити матрицу X из матричне једначине

$$AX^{-1}B - B = AX^{-1}.$$

Решение 1.

$$A\mathbf{X}^{-1}B - B = A\mathbf{X}^{-1}$$

Решение 1. $AX^{-1}B - B = AX^{-1}$

$$AX^{-1}B - AX^{-1} = B$$

Решение 1. $AX^{-1}B - B = AX^{-1}$

$$AX^{-1}B - AX^{-1} = B$$

$$AX^{-1}(B - I) = B$$

Решение 1. $AX^{-1}B - B = AX^{-1}$

$$AX^{-1}B - AX^{-1} = B$$

$$AX^{-1}(B - I) = B \quad / \quad \xrightarrow{A^{-1}}.$$

$$A^{-1}AX^{-1}(B - I) = A^{-1}B$$

Решение 1.

$$AX^{-1}B - B = AX^{-1}$$

$$AX^{-1}B - AX^{-1} = B$$

$$AX^{-1}(B - I) = B \quad / \quad \xrightarrow{A^{-1}}.$$

$$A^{-1}AX^{-1}(B - I) = A^{-1}B$$

$$X^{-1}(B - I) = A^{-1}B$$

Решение 1.

$$AX^{-1}B - B = AX^{-1}$$

$$AX^{-1}B - AX^{-1} = B$$

$$AX^{-1}(B - I) = B \quad / \quad \xrightarrow{A^{-1}.$$

$$A^{-1}AX^{-1}(B - I) = A^{-1}B$$

$$X^{-1}(B - I) = A^{-1}B \quad / \quad \xrightarrow{X.}$$

$$XX^{-1}(B - I) = XA^{-1}B$$

Решение 1.

$$AX^{-1}B - B = AX^{-1}$$

$$AX^{-1}B - AX^{-1} = B$$

$$AX^{-1}(B - I) = B \quad / \quad \xrightarrow{A^{-1}}.$$

$$A^{-1}AX^{-1}(B - I) = A^{-1}B$$

$$X^{-1}(B - I) = A^{-1}B \quad / \quad \xrightarrow{X}.$$

$$XX^{-1}(B - I) = XA^{-1}B$$

$$(B - I) = XA^{-1}B$$

Решение 1.

$$AX^{-1}B - B = AX^{-1}$$

$$AX^{-1}B - AX^{-1} = B$$

$$AX^{-1}(B - I) = B \quad / \quad \xrightarrow{A^{-1}}.$$

$$A^{-1}AX^{-1}(B - I) = A^{-1}B$$

$$X^{-1}(B - I) = A^{-1}B \quad / \quad \xrightarrow{X}.$$

$$XX^{-1}(B - I) = XA^{-1}B$$

$$(B - I) = XA^{-1}B \quad / \quad \xleftarrow{\cdot B^{-1}}$$

$$(B - I)B^{-1} = XA^{-1}BB^{-1}$$

Решение 1.

$$AX^{-1}B - B = AX^{-1}$$

$$AX^{-1}B - AX^{-1} = B$$

$$AX^{-1}(B - I) = B \quad / \quad \xrightarrow{A^{-1} \cdot}$$

$$A^{-1}AX^{-1}(B - I) = A^{-1}B$$

$$X^{-1}(B - I) = A^{-1}B \quad / \quad \xrightarrow{X \cdot}$$

$$XX^{-1}(B - I) = XA^{-1}B$$

$$(B - I) = XA^{-1}B \quad / \quad \xleftarrow{\cdot B^{-1}}$$

$$(B - I)B^{-1} = XA^{-1}BB^{-1}$$

$$(B - I)B^{-1} = XA^{-1}$$

Решение 1.

$$AX^{-1}B - B = AX^{-1}$$

$$AX^{-1}B - AX^{-1} = B$$

$$AX^{-1}(B - I) = B \quad / \quad \xrightarrow{A^{-1} \cdot}$$

$$A^{-1}AX^{-1}(B - I) = A^{-1}B$$

$$X^{-1}(B - I) = A^{-1}B \quad / \quad \xrightarrow{X \cdot}$$

$$XX^{-1}(B - I) = XA^{-1}B$$

$$(B - I) = XA^{-1}B \quad / \quad \xleftarrow{\cdot B^{-1}}$$

$$(B - I)B^{-1} = XA^{-1}BB^{-1}$$

$$(B - I)B^{-1} = XA^{-1} \quad / \quad \xleftarrow{\cdot A}$$

$$(B - I)B^{-1}A = XA^{-1}A$$

Решение 1.

$$AX^{-1}B - B = AX^{-1}$$

$$AX^{-1}B - AX^{-1} = B$$

$$AX^{-1}(B - I) = B \quad / \xrightarrow{A^{-1} \cdot}$$

$$A^{-1}AX^{-1}(B - I) = A^{-1}B$$

$$X^{-1}(B - I) = A^{-1}B \quad / \xrightarrow{X \cdot}$$

$$XX^{-1}(B - I) = XA^{-1}B$$

$$(B - I) = XA^{-1}B \quad / \xleftarrow{\cdot B^{-1}}$$

$$(B - I)B^{-1} = XA^{-1}BB^{-1}$$

$$(B - I)B^{-1} = XA^{-1} \quad / \xleftarrow{\cdot A}$$

$$(B - I)B^{-1}A = XA^{-1}A$$

$$(B - I)B^{-1}A = X$$

Решение 1.

$$AX^{-1}B - B = AX^{-1}$$

$$AX^{-1}B - AX^{-1} = B$$

$$AX^{-1}(B - I) = B \quad / \quad \xrightarrow{A^{-1}}$$

$$A^{-1}AX^{-1}(B - I) = A^{-1}B$$

$$X^{-1}(B - I) = A^{-1}B \quad / \quad \xrightarrow{X}$$

$$XX^{-1}(B - I) = XA^{-1}B$$

$$(B - I) = XA^{-1}B \quad / \quad \xleftarrow{\cdot B^{-1}}$$

$$(B - I)B^{-1} = XA^{-1}BB^{-1}$$

$$(B - I)B^{-1} = XA^{-1} \quad / \quad \xleftarrow{\cdot A}$$

$$(B - I)B^{-1}A = XA^{-1}A$$

$$X = (B - I)B^{-1}A.$$



Решение 1.

$$AX^{-1}B - B = AX^{-1}$$

$$AX^{-1}B - AX^{-1} = B$$

$$AX^{-1}(B - I) = B \quad / \quad \xrightarrow{A^{-1}}$$

$$A^{-1}AX^{-1}(B - I) = A^{-1}B$$

$$X^{-1}(B - I) = A^{-1}B \quad / \quad \xrightarrow{X}$$

$$XX^{-1}(B - I) = XA^{-1}B$$

$$(B - I) = XA^{-1}B \quad / \quad \xleftarrow{\cdot B^{-1}}$$

$$(B - I)B^{-1} = XA^{-1}BB^{-1}$$

$$(B - I)B^{-1} = XA^{-1} \quad / \quad \xleftarrow{\cdot A}$$

$$(B - I)B^{-1}A = XA^{-1}A$$

$$X = (B - I)B^{-1}A.$$



Решение 2. Из $X^{-1}(B - I) = A^{-1}B$:

$$X^{-1} = A^{-1}B(B - I)^{-1}$$

Решење 2. Из $X^{-1}(B - I) = A^{-1}B$:

$$X^{-1} = A^{-1}B(B - I)^{-1}$$

и онда је

$$X = (X^{-1})^{-1} = (A^{-1}B(B - I)^{-1})^{-1}$$

Решење 2. Из $X^{-1}(B - I) = A^{-1}B$:

$$X^{-1} = A^{-1}B(B - I)^{-1}$$

и онда је

$$X = (X^{-1})^{-1} = (A^{-1}B(B - I)^{-1})^{-1}$$

па из формуле $(M \cdot N)^{-1} = N^{-1} \cdot M^{-1}$

Решење 2. Из $X^{-1}(B - I) = A^{-1}B$:

$$X^{-1} = A^{-1}B(B - I)^{-1}$$

и онда је

$$X = (X^{-1})^{-1} = (A^{-1}B(B - I)^{-1})^{-1}$$

па из формуле $(M \cdot N)^{-1} = N^{-1} \cdot M^{-1}$
добијамо

$$X = (B - I)B^{-1}A.$$



2.

Нека је

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Q}, c \neq 0, |a| \neq |b| \right\},$$

а \cdot је оп. множења матрица.

Испитати да ли је (\mathcal{A}, \cdot) Абелова група.

Решење. Означимо $A(a, b, c) = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}$.

Решење. Означимо $A(a, b, c) = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}$.

Затвореност:

$$A(a, b, c) \cdot A(m, n, p) = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m & 0 & n \\ 0 & p & 0 \\ n & 0 & m \end{bmatrix}$$

Решење. Означимо $A(a, b, c) = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}$.

Затвореност:

$$\begin{aligned} A(a, b, c) \cdot A(m, n, p) &= \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m & 0 & n \\ 0 & p & 0 \\ n & 0 & m \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} am + bn & 0 & an + bm \\ 0 & cp & 0 \\ an + bm & 0 & am + bn \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Решење. Означимо $A(a, b, c) = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}$.

Затвореност:

$$\begin{aligned} A(a, b, c) \cdot A(m, n, p) &= \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m & 0 & n \\ 0 & p & 0 \\ n & 0 & m \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} am + bn & 0 & an + bm \\ 0 & cp & 0 \\ an + bm & 0 & am + bn \end{bmatrix} \\ &= A(am + bn, an + bm, cp) \end{aligned}$$

Решење. Означимо $A(a, b, c) = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}$.

Затвореност:

$$\begin{aligned} A(a, b, c) \cdot A(m, n, p) &= \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m & 0 & n \\ 0 & p & 0 \\ n & 0 & m \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} am + bn & 0 & an + bm \\ 0 & cp & 0 \\ an + bm & 0 & am + bn \end{bmatrix} \\ &= A(am + bn, an + bm, cp) \end{aligned}$$

$$a, b, c, m, n, p \in \mathbb{Q} \Rightarrow am + bn, an + bm, cp \in \mathbb{Q}.$$

Решење. Означимо $A(a, b, c) = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}$.

Затвореност:

$$A(a, b, c) \cdot A(m, n, p) = A(am + bn, an + bm, cp)$$

$$a, b, c, m, n, p \in \mathbb{Q} \Rightarrow am + bn, an + bm, cp \in \mathbb{Q}$$

$$c \neq 0, p \neq 0 \Rightarrow cp \neq 0$$

Решење. Означимо $A(a, b, c) = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}$.

Затвореност:

$$A(a, b, c) \cdot A(m, n, p) = A(am + bn, an + bm, cp)$$

$$a, b, c, m, n, p \in \mathbb{Q} \Rightarrow am + bn, an + bm, cp \in \mathbb{Q}$$

$$c \neq 0, p \neq 0 \Rightarrow cp \neq 0$$

Покажимо још да је $|am + bn| \neq |an + bm|$.

Решење. Означимо $A(a, b, c) = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}$.

Затвореност:

$$A(a, b, c) \cdot A(m, n, p) = A(am + bn, an + bm, cp)$$

$$a, b, c, m, n, p \in \mathbb{Q} \Rightarrow am + bn, an + bm, cp \in \mathbb{Q}$$

$$c \neq 0, p \neq 0 \Rightarrow cp \neq 0$$

Покажимо још да је $|am + bn| \neq |an + bm|$.

Пп. супротно:

$$am + bn = an + bm \text{ или } am + bn = -an - bm.$$

Решење. Означимо $A(a, b, c) = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}$.

Затвореност:

$$A(a, b, c) \cdot A(m, n, p) = A(am + bn, an + bm, cp)$$

$$a, b, c, m, n, p \in \mathbb{Q} \Rightarrow am + bn, an + bm, cp \in \mathbb{Q}$$

$$c \neq 0, p \neq 0 \Rightarrow cp \neq 0$$

Покажимо још да је $|am + bn| \neq |an + bm|$.

Пп. супротно:

$$am + bn = an + bm \text{ или } am + bn = -an - bm.$$

$$am + bn - an - bm = 0$$

Решење. Означимо $A(a, b, c) = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}$.

Затвореност:

$$A(a, b, c) \cdot A(m, n, p) = A(am + bn, an + bm, cp)$$

$$a, b, c, m, n, p \in \mathbb{Q} \Rightarrow am + bn, an + bm, cp \in \mathbb{Q}$$

$$c \neq 0, p \neq 0 \Rightarrow cp \neq 0$$

Покажимо још да је $|am + bn| \neq |an + bm|$.

Пп. супротно:

$$am + bn = an + bm \text{ или } am + bn = -an - bm.$$

$$(a - b)(m - n) = 0 \text{ или } (a + b)(m + n) = 0$$

Решење. Означимо $A(a, b, c) = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}$.

Затвореност:

$$A(a, b, c) \cdot A(m, n, p) = A(am + bn, an + bm, cp)$$

$$a, b, c, m, n, p \in \mathbb{Q} \Rightarrow am + bn, an + bm, cp \in \mathbb{Q}$$

$$c \neq 0, p \neq 0 \Rightarrow cp \neq 0$$

Покажимо још да је $|am + bn| \neq |an + bm|$.

Пп. супротно:

$$am + bn = an + bm \text{ или } am + bn = -an - bm.$$

$$(a - b)(m - n) = 0 \text{ или } (a + b)(m + n) = 0$$

$$a = b \text{ или } m = n \quad \Downarrow \quad a = -b \text{ или } m = -n \quad \Downarrow$$

Решење. Означимо $A(a, b, c) = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}$.

Затвореност:

$$A(a, b, c) \cdot A(m, n, p) = A(am + bn, an + bm, cp) \in \mathcal{A}$$


Решење. Означимо $A(a, b, c) = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}$.

Затвореност:

$$A(a, b, c) \cdot A(m, n, p) = A(am + bn, an + bm, cp) \in \mathcal{A} \quad \checkmark$$

Асоцијативност:

Множење матрица је асоц. у скупу \mathcal{M} свих матрица 3×3 па је и у скупу $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$. ✓

Решење. Означимо $A(a, b, c) = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}$.

Затвореност:

$$A(a, b, c) \cdot A(m, n, p) = A(am + bn, an + bm, cp). \quad \checkmark$$

Асоцијативност:

Множење матрица је асоц. у скупу \mathcal{M} свих матрица 3×3 па је и у скупу $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$. ✓

Неутрални елемент:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Решење. Означимо $A(a, b, c) = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}$.

Затвореност:

$$A(a, b, c) \cdot A(m, n, p) = A(am + bn, an + bm, cp). \quad \checkmark$$

Асоцијативност:

Множење матрица је асоц. у скупу \mathcal{M} свих матрица 3×3 па је и у скупу $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$. ✓

Неутрални елемент:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A(1, 0, 1) \in \mathcal{A}. \quad \checkmark$$

Инверзни елемент:

је инверзна матр. A^{-1} матрице $A = A(a, b, c)$

Инверзни елемент:

је инверзна матр. A^{-1} матрице $A = A(a, b, c)$:

$$A^{-1} = A\left(\frac{a}{a^2 - b^2}, \frac{-b}{a^2 - b^2}, \frac{1}{c}\right) \in \mathcal{A}.$$



Инверзни елемент:

је инверзна матр. A^{-1} матрице $A = A(a, b, c)$:

$$A^{-1} = A\left(\frac{a}{a^2 - b^2}, \frac{-b}{a^2 - b^2}, \frac{1}{c}\right) \in \mathcal{A}.$$



Напомена. Инв. елемент смо могли добити:

$$A \cdot A^{-1} = I \quad A(a, b, c) \cdot A(m, n, p) = A(1, 0, 1), \text{ тј.}$$

$$A(am + bn, an + bm, cp) = A(1, 0, 1).$$

Инверзни елемент:

је инверзна матр. A^{-1} матрице $A = A(a, b, c)$:

$$A^{-1} = A\left(\frac{a}{a^2-b^2}, \frac{-b}{a^2-b^2}, \frac{1}{c}\right) \in \mathcal{A}.$$



Напомена. Инв. елемент смо могли добити:

$$A \cdot A^{-1} = I \quad A(a, b, c) \cdot A(m, n, p) = A(1, 0, 1), \text{ тј.}$$

$$A(am + bn, an + bm, cp) = A(1, 0, 1).$$

$$\begin{array}{rcl} & am + bn & = 1 \\ \text{Решавањем система} & an + bm & = 0 \\ & cp & = 1 \end{array} \quad \text{добијамо}$$

$$a = \frac{a}{a^2-b^2}, \quad b = \frac{-b}{a^2-b^2}, \quad c = \frac{1}{c}.$$

Инверзни елемент:

је инверзна матр. A^{-1} матрице $A = A(a, b, c)$:

$$A^{-1} = A\left(\frac{a}{a^2 - b^2}, \frac{-b}{a^2 - b^2}, \frac{1}{c}\right) \in \mathcal{A}.$$



Комутативност:

Из комутативности $+$ и \cdot у \mathbb{Q} следи

$$A(a, b, c) \cdot A(m, n, p) = A(am + bn, an + bm, cp)$$

Инверзни елемент:

је инверзна матр. A^{-1} матрице $A = A(a, b, c)$:

$$A^{-1} = A\left(\frac{a}{a^2 - b^2}, \frac{-b}{a^2 - b^2}, \frac{1}{c}\right) \in \mathcal{A}.$$



Комутативност:

Из комутативности $+$ и \cdot у \mathbb{Q} следи

$$\begin{aligned} A(a, b, c) \cdot A(m, n, p) &= A(am + bn, an + bm, cp) \\ &= A(ma + nb, mb + na, pc) \end{aligned}$$

Инверзни елемент:

је инверзна матр. A^{-1} матрице $A = A(a, b, c)$:

$$A^{-1} = A\left(\frac{a}{a^2 - b^2}, \frac{-b}{a^2 - b^2}, \frac{1}{c}\right) \in \mathcal{A}.$$



Комутативност:

Из комутативности $+$ и \cdot у \mathbb{Q} следи

$$\begin{aligned} A(a, b, c) \cdot A(m, n, p) &= A(am + bn, an + bm, cp) \\ &= A(ma + nb, mb + na, pc) \\ &= A(m, n, p) \cdot A(a, b, c). \end{aligned}$$



Инверзни елемент:

је инверзна матр. A^{-1} матрице $A = A(a, b, c)$:

$$A^{-1} = A\left(\frac{a}{a^2 - b^2}, \frac{-b}{a^2 - b^2}, \frac{1}{c}\right) \in \mathcal{A}.$$



Комутативност:

Из комутативности $+$ и \cdot у \mathbb{Q} следи

$$\begin{aligned} A(a, b, c) \cdot A(m, n, p) &= A(am + bn, an + bm, cp) \\ &= A(ma + nb, mb + na, pc) \\ &= A(m, n, p) \cdot A(a, b, c). \end{aligned}$$



ЗАКЉУЧАК:

(\mathcal{A}, \cdot) јесте Абелова група.



3.

Одредити ранг матрице

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Решение.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \curvearrowleft \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \text{II} - 2 \cdot \text{I} \\ \\ \text{IV} - 4 \cdot \text{I} \end{array}$$

Решение.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \text{II} - 2 \cdot \text{I} \\ \\ \text{IV} - 4 \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -3 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \text{IV} - \text{II} \end{array}$$

Решение.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \curvearrowleft \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \text{II} - 2 \cdot \text{I} \\ \\ \text{IV} - 4 \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -3 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \curvearrowleft \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -3 \end{bmatrix} \text{IV} - \text{II}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \end{bmatrix} \text{IV} - \text{III} \quad \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Решење.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \curvearrowleft \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \text{II} - 2 \cdot \text{I} \\ \\ \text{IV} - 4 \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -3 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \curvearrowleft \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -3 \end{bmatrix} \text{IV} - \text{II}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \end{bmatrix} \text{IV} - \text{III} \quad \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

па је $r(A) = 3$.



4.

Одредити ранг матрице

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -a \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -a & -1 \end{bmatrix}$$

у зависности од реалног параметра a .

Решение.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -a \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -a & -1 \end{vmatrix} = a^2 + 7a - 8 = (a - 1)(a + 8).$$

Решение.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -a \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -a & -1 \end{vmatrix} = a^2 + 7a - 8 = (a - 1)(a + 8).$$

1° За $a \neq 1, -8$

$|A| \neq 0 \Rightarrow A$ регуларна $\Rightarrow r(A) = 3$.

Решение.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -a \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -a & -1 \end{vmatrix} = a^2 + 7a - 8 = (a - 1)(a + 8).$$

1° За $a \neq 1, -8$

$|A| \neq 0 \Rightarrow A$ регуларна $\Rightarrow r(A) = 3$.

2° За $a = 1$ или 3° за $a = -8$

$|A| = 0 \Rightarrow A$ сингуларна $\Rightarrow r(A) \neq 3 \Rightarrow r(A) < 3$.

Решение.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -a \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -a & -1 \end{vmatrix} = a^2 + 7a - 8 = (a - 1)(a + 8).$$

1° За $a \neq 1, -8$

$|A| \neq 0 \Rightarrow A$ регуларна $\Rightarrow r(A) = 3$.

2° За $a = 1$ или 3° за $a = -8$

$|A| = 0 \Rightarrow A$ сингуларна $\Rightarrow r(A) \neq 3 \Rightarrow r(A) < 3$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2.$$

2° За $a = 1$: у A заменимо свако a са 1 :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{II} - 2 \cdot \text{I} \\ \text{III} - 3 \cdot \text{I} \end{array}$$

2° За $a = 1$: у A заменимо свако a са 1 :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \curvearrowleft \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \text{II} - 2 \cdot \text{I} \\ \text{III} - 3 \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & -10 & 2 \end{bmatrix} \text{III} - 2 \cdot \text{II} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

2° За $a = 1$: у A заменимо свако a са 1 :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \text{II} - 2 \cdot \text{I} \\ \text{III} - 3 \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & -10 & 2 \end{bmatrix} \text{III} - 2 \cdot \text{II} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

па је $r(A) = 2$.

3° За $a = -8$: у A заменимо свако a са -8 :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 8 \\ 3 & 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \text{II} - 2 \cdot \text{I} \\ \text{III} - 3 \cdot \text{I} \end{matrix} \sim$$

3° За $a = -8$: у A заменимо свако a са -8 :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 8 \\ 3 & 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \text{II} - 2 \cdot \text{I} \\ \text{III} - 3 \cdot \text{I} \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 10 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{III} - 5 \cdot \text{II} \end{matrix} \sim$$

3° За $a = -8$: у A заменимо свако a са -8 :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 8 \\ 3 & 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \text{II} - 2 \cdot \text{I} \\ \text{III} - 3 \cdot \text{I} \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 10 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{III} - 5 \cdot \text{II} \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

3° За $a = -8$: у A заменимо свако a са -8 :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 8 \\ 3 & 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \text{II} - 2 \cdot \text{I} \\ \text{III} - 3 \cdot \text{I} \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 10 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{III} - 5 \cdot \text{II} \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{па је } r(A) = 2.$$

ЗАКЉУЧАК:

$$r(A) = \begin{cases} 3 & \text{за } a \neq 1, -8 \\ 2 & \text{за } a = 1 \text{ или } a = -8. \end{cases}$$



5.

Одредити ранг матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 1 & 2a - 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3a - 2 & b + 1 & b - 2 \end{pmatrix}$$

у зависности од реалних параметара a и b .

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 1 & 2a - 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3a - 2 & b + 1 & b - 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{II} - \text{I} \\ \text{III} - \text{I} \end{array} \sim$$

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 1 & 2a - 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3a - 2 & b + 1 & b - 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{II} - \text{I} \\ \text{III} - \text{I} \end{array} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & a - 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2a - 2 & b - 1 & b - 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \text{III} - 2 \cdot \text{II} \end{array} \sim$$

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 1 & 2a - 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3a - 2 & b + 1 & b - 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{II} - \text{I} \\ \text{III} - \text{I} \end{array} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & a - 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2a - 2 & b - 1 & b - 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \text{III} - 2 \cdot \text{II} \end{array} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & a - 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b - 3 & b - 3 \end{pmatrix}.$$

Решење.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 1 & 2a - 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3a - 2 & b + 1 & b - 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{II} - \text{I} \\ \text{III} - \text{I} \end{array} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & a - 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2a - 2 & b - 1 & b - 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \text{III} - 2 \cdot \text{II} \end{array} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{a - 1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{b - 3} & b - 3 \end{pmatrix}.$$

1° Ако је $a \neq 1$ и $b \neq 3$ онда је $r(A) = 3$.

2° 3a $b = 3$:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & a - 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

2° За $b = 3$:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & a - 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

па је $r(A) = 2$.

3° За $a = 1$ и $b \neq 3$:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b-3 & b-3 \end{pmatrix} \quad \text{III} \cdot \frac{1}{b-3} \quad \sim$$

3° За $a = 1$ и $b \neq 3$:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b-3 & b-3 \end{pmatrix} \quad \text{III} \cdot \frac{1}{b-3} \quad \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{III} - \text{II} \quad \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3° За $a = 1$ и $b \neq 3$:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b-3 & b-3 \end{pmatrix} \quad \text{III} \cdot \frac{1}{b-3} \quad \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{III} - \text{II} \quad \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

па је $r(A) = 3$.

ЗАКЉУЧАК:

$$r(A) = \begin{cases} 3 & \text{за } b \neq 3 \\ 2 & \text{за } b = 3. \end{cases}$$



4. Системи линеарних једначина

Теоријски увод

Решити систем = наћи опште решење,
тј. одредити СВА решења система.

Гаусов систем елиминације

Дозвољене су 3 врсте трансформација
једначина система:

Гаусов систем елиминације

Дозвољене су 3 врсте трансформација једначина система:

1^о замена места две једначине;

Гаусов систем елиминације

Дозвољене су 3 врсте трансформација једначина система:

- 1° замена места две једначине;
- 2° множење једначине бројем $k \neq 0$;

Гаусов систем елиминације

Дозвољене су 3 врсте трансформација једначина система:

- 1° замена места две једначине;
- 2° множење једначине бројем $k \neq 0$;
- 3° додавање једначине помножене са k некој другој једначини.

Гаусов систем елиминације

Дозвољене су 3 врсте трансформација једначина система:

- 1° замена места две једначине;
- 2° множење једначине бројем $k \neq 0$;
- 3° додавање једначине помножене са k некој другој једначини.

Имамо 2 карактеристична случаја:

Имамо 2 карактеристична случаја:

$$0 = b \quad \downarrow$$

где је $b \neq 0$ — тада кажемо да систем *није сагласан*, тј. да *нема решења*;

Имамо 2 карактеристична случаја:

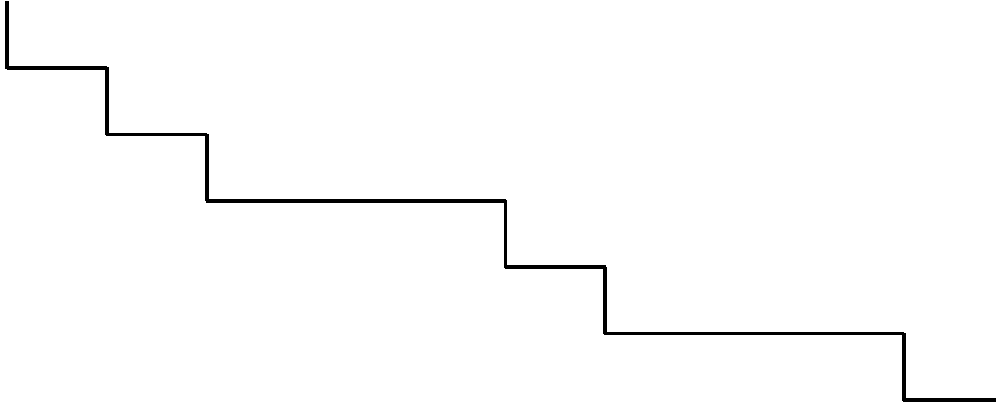
$$0 = b \quad \downarrow$$

где је $b \neq 0$ — тада кажемо да систем *није сагласан*, тј. да *нема решења*;

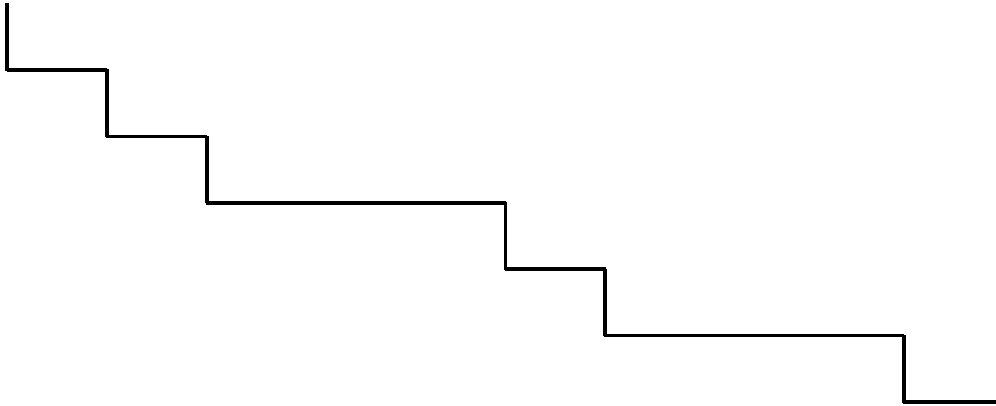
$$\cancel{0 = 0}$$

ову једначину избришемо и наставимо са решавањем система!

Овим трансформацијама полазни систем
сводимо на систем у *степенастом облику*:



Овим трансформацијама полазни систем сводимо на систем у *степенастом облику*:



Ако смо систем свели на систем у степенастом облику тада је он *сагласан*, тј. има решења (једно или више).

Ако смо систем свели на систем у степенас-
том облику тада је он *сагласан*, тј. има решења
(једно или више).

Променљиве које су на почетку једначина су
везане а остале су слободне променљиве
(њима додељујемо вредности параметара).

Степенаст систем са n променљивих:

r везаних и $n - r$ слободних.

Степенаст систем са n променљивих:

r везаних и $n - r$ слободних.

- $r = n$ систем има *јединствено решење*.

Степенаст систем са n променљивих:
 r везаних и $n - r$ слободних.

- $r = n$ систем има *јединствено решење*.
- $r < n$ систем има *вишеструко решење*
(или *бесконачно много решења*)
које зависи од $n - r$ параметара.

Задаци

6. Решити систем

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & - & z & = & -4 \\ 2x & + & y & & & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 6 \end{array}$$

- 1) матричним методом;
- 2) Гаусовим системом елиминације;

Решење 1. МАТРИЧНА МЕТОДА

Матрица система $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(за њу смо одредили A^{-1} на II двочасу).

Решење 1. МАТРИЧНА МЕТОДА

Матрица система $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(за њу смо одредили A^{-1} на II двочасу).

Матрица непознатих $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

Решење 1. МАТРИЧНА МЕТОДА

Матрица система $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(за њу смо одредили A^{-1} на II двочасу).

Матрица непознатих $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

Матрица слободних чланова $B = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$.

Матрична једначина $A \cdot X = B$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Матрична једначина $A \cdot X = B$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x + y - z \\ 2x + y \\ x - y + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

што је наш систем.

Решење $A \cdot X = B$ је

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot B$$

Решење $A \cdot X = B$ је

$$\begin{aligned} X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= A^{-1} \cdot B \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

Решење $A \cdot X = B$ је

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot B$$
$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

тј. решење система је $x = 1$, $y = -2$, $z = 3$. 

Решение 2. ГАУСОВ СИСТЕМ ЕЛИМИН.

$$\begin{array}{cccccccl} x & + & y & - & z & = & -4 & \\ 2x & + & y & & & = & 0 & \text{II} - 2 \cdot \text{I} \\ x & - & y & + & z & = & 6 & \text{III} - \text{I} \end{array}$$

Решение 2. ГАУСОВ СИСТЕМ ЕЛИМИН.

$$\begin{array}{rrrrrr} x & + & y & - & z & = & -4 \\ 2x & + & y & & & = & 0 & \text{II} - 2 \cdot \text{I} \\ x & - & y & + & z & = & 6 & \text{III} - \text{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrr} x & + & y & - & z & = & -4 \\ & - & y & + & 2z & = & 8 \\ & - & 2y & + & 2z & = & 10 & \text{III} - 2 \cdot \text{II} \end{array}$$

Решение 2. ГАУСОВ СИСТЕМ ЕЛИМИН.

$$\begin{array}{rrrrrr} x & + & y & - & z & = & -4 \\ 2x & + & y & & & = & 0 & \text{II} - 2 \cdot \text{I} \\ x & - & y & + & z & = & 6 & \text{III} - \text{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrr} x & + & y & - & z & = & -4 \\ & - & y & + & 2z & = & 8 \\ & - & 2y & + & 2z & = & 10 & \text{III} - 2 \cdot \text{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrr} x & + & y & - & z & = & -4 \\ & - & y & + & 2z & = & 8 \\ & & & - & 2z & = & -6 \end{array}$$

Решење 2. ГАУСОВ СИСТЕМ ЕЛИМИН.

$$\begin{array}{rrrrrr} x & + & y & - & z & = & -4 \\ 2x & + & y & & & = & 0 & \text{II} - 2 \cdot \text{I} \\ x & - & y & + & z & = & 6 & \text{III} - \text{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrr} x & + & y & - & z & = & -4 \\ & - & y & + & 2z & = & 8 \\ & - & 2y & + & 2z & = & 10 & \text{III} - 2 \cdot \text{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrr} x & + & y & - & z & = & -4 \\ & - & y & + & 2z & = & 8 \\ & & & - & 2z & = & -6 \end{array}$$

x , y и z су везане \Rightarrow сис. има јединствено реш.

$$\begin{array}{cccccc}
 x & + & y & - & z & = & -4 \\
 & - & y & + & 2z & = & 8 \\
 & & & - & 2z & = & -6
 \end{array}$$

ИЗ III:

$$z = \frac{-6}{-2} = 3.$$

$$\begin{array}{rclclcl}
 x & + & y & - & z & = & -4 \\
 & - & y & + & 2z & = & 8 \\
 & & & - & 2z & = & -6
 \end{array}$$

Из III:

$$z = \frac{-6}{-2} = 3.$$

То y II:

$$-y + 2 \cdot 3 = 8 \Rightarrow y = -2.$$

$$\begin{array}{rclclcl}
 x & + & y & - & z & = & -4 \\
 & - & y & + & 2z & = & 8 \\
 & & & - & 2z & = & -6
 \end{array}$$

Из III:

$$z = \frac{-6}{-2} = 3.$$

То у II:

$$-y + 2 \cdot 3 = 8 \Rightarrow y = -2.$$

y и z убацимо у I:

$$x + (-2) - 3 = -4 \Rightarrow x = 1.$$

Из III:

$$z = \frac{-6}{-2} = 3.$$

То у II:

$$-y + 2 \cdot 3 = 8 \Rightarrow y = -2.$$

y и z убацимо у I:

$$x + (-2) - 3 = -4 \Rightarrow x = 1.$$

ЗАКЉУЧАК:

$$(x, y, z) = (1, -2, 3).$$



КРАЈ ЧАСА