1. I колоквијум из Математике 1 1.

1. децембар 2012.

презиме и име студента — број индекса — група за вежбе

1. Нека је $\mathcal{A} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ и нека је операција $\star$ дефинисана на следећи начин:

$$a \star b = 2a + 2b - ab - 2, \qquad a, b \in \mathcal{A}.$$

Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{A}, \star)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{A}, \star)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{A}, \star)$ Абелова група?

2. Одредити ранг матрице

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 8 \\ a & 8 & -2 & 5a-1 \\ 1 & -a & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

у зависности од реалног параметра a.

3. У зависности од реалних параметара a и b решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 3z & = & -4 \\ x & - & y & + & z & = & 1 \\ -x & + & 2y & + & (b+3)z & = & 4 \\ 2x & - & y & & & = & a+2. \end{array}$$

4. Дате су праве $p : \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-1}{-1}$ и $q : \begin{cases} x + 2y - 2z - 3 = 0 \\ 2x + y - 2z - 5 = 0 \end{cases}$.

а) Испитати међусобни положај праве p и праве q.

б) Одредити једначину равни која садржи праву p и паралелна је правој q, као и растојање $d(p, q)$ између правих p и q.

2. I колоквијум из Математике 1 2.

1. децембар 2012.

презиме и име студента	**број индекса**	**група за вежбе**

1. Нека је $\mathcal{A} = \{(a,b) \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, (a,b) \neq (0,0)\}$ и нека је операција $\star$ дефинисана на следећи начин:

$$(a,b) \star (c,d) = (ac - 4bd, ad + bc), \qquad (a,b), (c,d) \in \mathcal{A}.$$

Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{A}, \star)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{A}, \star)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{A}, \star)$ Абелова група?

2. Одредити вредности реалног пареметра m за које важи

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 7 \\ -1 & -2(m+1) & -7 & 0 \\ -4 & -2(3m+4) & m-12 & -6 \\ 2 & 2(3m+2) & 24 & -10 \end{vmatrix} > 0.$$

3. У зависности од реалних параметара a и b решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 1 \\ 2x & - & 3y & + & 4z & = & -3 \\ 3x & - & 3y & + & (b+6)z & = & 3 \\ 4x & - & 3y & + & 2z & = & 2a+3. \end{array}$$

4. Дати су вектори $\vec{e}_1 = (-2,7,0)$, $\vec{e}_2 = (1,-1,-1)$ и $\vec{e}_3 = (-3,5,1)$.

а) Испитати да ли вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ чине базу векторског простора $\mathbb{R}^3$.

б) Уколико чине базу одредити координате вектора $\vec{v} = (2,2,2)$ у тој бази, а у супротном изразити вектор $\vec{e}_1$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$.

I колоквијум из Математике 1

3.

1. децембар 2012.

презиме и име студента | **број индекса** | **група за вежбе**

1. Нека је $\mathcal{A} = \mathbb{Q} \setminus \{3\}$ и нека је операција $\star$ дефинисана на следећи начин:

$$a \star b = 3a + 3b - ab - 6, \qquad a, b \in \mathcal{A}.$$

Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{A}, \star)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{A}, \star)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{A}, \star)$ Абелова група?

2. Нека је матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

а) Одредити све реалне вредности λ, такве да матрична једначина

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

има решења (по v), где је v матрица облика 3×1 и није нула-матрица.

б) За сваки λ одређен у делу под а) наћи све матрице v које задовољавају претходну матричну једначину.

3. У зависности од реалних параметара a и b решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & - & w & = & 1 \\ 2x & - & 3y & + & az & & & = & -3 \\ x & - & 2y & + & (a-1)z & + & (b+3)w & = & 2b. \end{array}$$

4. Нека су дате равни $\alpha : 2x - y + 3 = 0$ и $\beta : x + y + z - 2 = 0$ и тачка $T(1, 1, -1)$.

а) Одредити једначину равни π која садржи пресек равни α и β и тачку T.

б) Одредити нормалну пројекцију тачке T на раван β као и растојање $d(T, \beta)$ тачке T од равни β.

I колоквијум из Математике 1

1. децембар 2012.

презиме и име студента | **број индекса** | **група за вежбе**

1. Нека је у скупу реалних бројева $\mathbb{R}$ операција $*$ дефинисана са

$$a * b = \sqrt[5]{a^5 + b^5}, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Испитати које од следећих особина има структура $(\mathbb{R}, *)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathbb{R}, *)$ група? Да ли је структура $(\mathbb{R}, *)$ Абелова група?

2. Решити матричну једначину

$$XM - 4A^T = 2X,$$

при чему је $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ и $M = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

3. У зависности од реалних параметара a и b решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & 2z & - & 3w & = & 1 \\ 3x & - & 4y & + & (a+2)z & - & 3w & = & -2 \\ x & - & 2y & + & (a-2)z & + & (b+4)w & = & 2b-2. \end{array}$$

4. Дати су вектори $\vec{e}_1 = (-2, 1, 1)$, $\vec{e}_2 = (1, -2, 0)$ и $\vec{e}_3 = (3, -2, 4)$.

а) Испитати да ли вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ чине базу векторског простора $\mathbb{R}^3$.

б) Уколико чине базу одредити координате вектора $\vec{v} = (1, -1, 3)$ у тој бази, а у супротном изразити вектор $\vec{e}_1$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$.

I колоквијум из Математике 1

1. децембар 2012.

презиме и име студента **број индекса** **група за вежбе**

1. Нека је $\mathcal{B} = (-4, +\infty)$ и операција $\circ$ дефинисана на следећи начин:

$$x \circ y = xy + 4x + 4y + 12, \qquad x, y \in \mathcal{B}.$$

Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{B}, \circ)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{B}, \circ)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{B}, \circ)$ Абелова група?

2. Решити матричну једначину

$$XA = 2X + A^{\top},$$

при чему је $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -4 & 5 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

3. У зависности од реалног параметра c решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 2x & + & cy & + & 3z & = & 3 \\ x & - & cy & + & (c-1)z & = & 1. \end{array}$$

4. Дати су вектори $\vec{e}_1 = (-1, -2, 4)$, $\vec{e}_2 = (-4, 3, 0)$ и $\vec{e}_3 = (1, -2, 2)$.

а) Испитати да ли вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ чине базу векторског простора $\mathbb{R}^3$.

б) Уколико чине базу одредити координате вектора $\vec{v} = (5, 0, -3)$ у тој бази, а у супротном изразити вектор $\vec{e}_1$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$.

6. I колоквијум из Математике 1 6.

1. децембар 2012.

презиме и име студента **број индекса** **група за вежбе**

1. Нека је $\mathcal{S} = (3, +\infty)$ и операција $\circ$ дефинисана на следећи начин:

$$x \circ y = xy - 3x - 3y + 12, \qquad x, y \in \mathcal{S}.$$

Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{S}, \circ)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{S}, \circ)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{S}, \circ)$ Абелова група?

2. Одредити вредности реалног параметра p за које важи

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 & 7 \\ -2 & p+9 & -5 & 16 \\ -3 & p+11 & p-8 & 20 \\ 1 & -2(p+6) & 1 & -3 \end{vmatrix} \leqslant 0.$$

3. У зависности од реалних параметара a и b решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & & & & & - & 5w & = & 2 \\ x & + & y & & & - & 5w & = & 4 \\ 2x & - & 5y & + & (a+2)z & - & 10w & = & -6 \\ 2x & - & y & & & + & (b-3)w & = & 1. \end{array}$$

4. Нека су дате праве $p: \frac{x-6}{m} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{-1}$ и $q\colon \begin{cases} x - z - 2 = 0 \\ x - 2y + 5z = 0 \end{cases}$, при чему је m реалан параметар.

а) Одредити вредност параметра m тако да се праве p и q секу, а затим за тако одређену вредност параметра израчунати координате пресечне тачке датих правих.

б) За вредност параметра m одређену у делу а), одредити једначину равни α коју образују праве p и q.

I колоквијум из Математике 1

7.

1. децембар 2012.

презиме и име студента **број индекса** **група за вежбе**

1. Нека је $\mathcal{A} = \{(a,b) : a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ b \neq 0\}$ и нека је операција $\star$ дефинисана на следећи начин:

$$(a,b) * (c,d) = (ad + c + d, bd), \qquad (a,b),(c,d) \in \mathcal{A}.$$

Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{A}, *)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{A}, *)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{A}, *)$ Абелова група?

2. Одредити ранг матрице у зависности од реалног параметра a:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 14 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 5 & 7 & a \end{bmatrix}.$$

3. У зависности од реалног параметра a решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & a\,y & + & 4z & = & 3 \\ -x & + & (-a-1)y & + & az & = & -2. \end{array}$$

4. Дате су праве $p : \dfrac{x-2}{\lambda} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ и $q : \begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0 \\ 2x + y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$ и тачка $M(4,0,1)$.

а) Одредити параметар λ тако да се праве p и q секу.

б) За тако добијену вредност λ одредити растојање тачке M од равни одређене правама p и q.

8. I колоквијум из Математике 1 8.

1. децембар 2012.

презиме и име студента | **број индекса** | **група за вежбе**

1. Нека је у скупу рационалних бројева $\mathbb{Q}$ операција $*$ дефинисана са

$$a * b = a^2 + b^2 + a + b, \qquad a, b \in \mathbb{Q}.$$

Испитати које од следећих особина има структура $(\mathbb{Q}, *)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathbb{Q}, *)$ група? Да ли је структура $(\mathbb{Q}, *)$ Абелова група?

2. Нека је матрица

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 9 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \\ 1 & 16 & -3 \end{pmatrix}.$$

а) Одредити све реалне вредности λ, такве да матрична једначина

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

има решења (по v), где је v матрица облика 3×1 и није нула-матрица.

б) За сваки λ одређен у делу под а) наћи све матрице v које задовољавају претходну матричну једначину.

3. У зависности од реалних параметара a и b решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & 2z & - & 3w & = & 0 \\ x & & & + & z & - & 5w & = & 2 \\ 3x & - & 4y & + & (a+2)z & - & 7w & = & -2 \\ x & - & 2y & & & + & (b+4)w & = & b+3. \end{array}$$

4. Нека су дате права a: $\begin{cases} y - 2z + 2 = 0 \\ 2x + 3y + 4 = 0 \end{cases}$ и раван $\pi : 2x + y - z + 5 = 0$.

а) Испитати међусобни положај праве a и равни π. Уколико су паралелелне одредити растојање праве a од равни π, у супротном одредити продорну тачку праве a кроз раван π.

б) Одредити једначину равни α која садржи праву a и нормална је на раван π.

6. Резултати I колоквијума из Математике 1 6.

1. Операцију можемо записати као $x \circ y = (x-3)\cdot(y-3)+3$.

Решење 1:

Како су $x, y \in \mathcal{S} \subset \mathbb{R}$, и како је и разлика и производ и збир реалних бројева такође реалан број, следи да је $x \circ y \in \mathbb{R}$. Даље имамо да из $x, y \in \mathcal{S}$ следи $x-3>0$ и $y-3>0$, па је и $(x-3)\cdot(y-3)>0$, односно $(x-3)\cdot(y-3)+3>3$, чиме смо показали да је $x \circ y \in \mathcal{S}$, тј. важи затвореност операције $\circ$ у $\mathcal{S}$.

Из $x\circ(y\circ z) = x\circ\big((y-3)\cdot(z-3)+3\big) = (x-3)\cdot\big((y-3)\cdot(z-3)\big)+3 = \big((x-3)\cdot(y-3)\big)\cdot(z-3)+3 = \big((x-3)\cdot(y-3)+3\big)\circ z = (x\circ y)\circ z$ (овде смо користили асоцијативност множења у $\mathbb{R}$) следи асоцијативност операције $\circ$ у $\mathcal{S}$.

Неутралан елемент e тражимо из једнакости $x\circ e = x$, тј. $(x-3)\cdot(e-3)+3 = x$, односно $(x-3)\cdot(e-3) = x-3$. Како је $x \in \mathcal{S}$ то је $x-3>0$, па и $x-3\neq 0$, обе стране претходне једнакости можемо да поделимо са $x-3$ и добијамо $e-3=1$, односно $e=4$. Како је $e=4>3$ имамо да је $e\in\mathcal{S}$. Остаје још да проверимо да ли важи и друга једнакост за неутралан елемент: $e\circ x = x$. $4\circ x = (4-3)\cdot(x-3)+3 = x-3+3 = x$ ✓ (овде смо користили асоцијативност $+$ у $\mathbb{R}$). На основу свега претходног следи да у $\mathcal{S}$ постоји неутралан елемент за операцију $\circ$ и то је $e=4$.

Инверзан елемент x' тражимо из једнакости $x\circ x' = e$, тј. $(x-3)\cdot(x'-3)+3 = e = 4$, односно $(x-3)\cdot(x'-3) = 1$. Како је $x-3\neq 0$, обе стране можемо да поделимо са $x-3$ и добијамо $x'-3 = \frac{1}{x-3}$, односно $x' = 3+\frac{1}{x-3}$. Како је $\frac{1}{x-3}>0$ следи $x'>3$, тј. $x'\in\mathcal{S}$. Остаје још да проверимо да ли важи и друга једнакост за инверзан елемент: $x'\circ x = e$. $(3+\frac{1}{x-3})\circ x = \frac{1}{x-3}\cdot(x-3)+3 = 1+3 = 4 = e$ ✓ На основу свега претходног следи да у $\mathcal{S}$ за сваки елемент x постоји инверзан елемент у односу на операцију $\circ$ и то је $x' = 3+\frac{1}{x-3}$.
Како операција $\circ$ има претходно показане особине у $\mathcal{S}$, следи да структура $(\mathcal{S},\circ)$ јесте група.

Из $x\circ y = (x-3)\cdot(y-3)+3 = (y-3)\cdot(x-3)+3 = y\circ x$ (овде смо користили комутативност множења у $\mathbb{R}$) следи комутативност операције $\circ$ у $\mathcal{S}$.
Како операција $\circ$ има претходно показане особине у $\mathcal{S}$, следи да структура $(\mathcal{S},\circ)$ јесте Абелова група.

Решење 2:

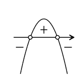
Функција $f(x) = x-3$ слика представља изоморфизам између структуре $(\mathcal{S},\circ)$ и $(\mathbb{R}^+,\cdot)$, где је $\mathbb{R}^+$ скуп позитивних реалних бројева, а $\cdot$ операција множења реалних бројева. Тада инверзно пресликавање $f^{-1}(x) = x+3$ слика $(\mathbb{R}^+,\cdot)$ у $(\mathcal{S},\circ)$.

За структуру $(\mathbb{R}^+,\cdot)$ је познато да је Абелова група (самим тим и група), што повлачи да је и $(\mathcal{S},\circ)$ Абелова група (самим тим и група), а на основу тога следи да је операција $\circ$ у $\mathcal{S}$ затворена, асоцијативна, има неутрални елемент $f^{-1}(1) = 1+3 = 4$, сваки елемент x из $\mathcal{S}$ има инверзан елемент $f^{-1}(\frac{1}{f(x)}) = \frac{1}{x-3}+3$ и комутативна.

2. Задатак се најлакше ради свођењем на детерминанту троугаоне матрице:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 & 7 \\ -2 & p+9 & -5 & 16 \\ -3 & p+11 & p-8 & 20 \\ 1 & -2(p+6) & 1 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ II-2\cdot I \\ III-3\cdot I \\ IV+I \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & p+5 & 1 & 2 \\ 0 & p+5 & p+1 & -1 \\ 0 & -2(p+5) & -2 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ III-II \\ IV+2\cdot II \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & p+5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & p & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -1\cdot(p+5)\cdot p\cdot 8 = -8p^2-40p.$$

Квадратна функција $f(p) = -8p^2-40p$ има $a<0$ и $D>0$, тј. график јој је  одакле је $\Delta \leqslant 0$ за $p\in(-\infty,-5)\cup(0,+\infty)$.

3. Степанасти облик система је:

$$\begin{array}{ccccccc} x & & & - & 5w & = & 2 \\ & y & & & & = & 2 \\ & & (a+2)z & & & = & 0 \\ & & & & (b+7)w & = & -1. \end{array}$$

За $b=-7$ последња једначина је $0=-1$, па у овом случају систем нема решења.

За $b\neq -7$, $a\neq -2$ систем има јединствено решење:

$$(x,y,z,w)=\left(\tfrac{2b+9}{b+7},2,0,\tfrac{-1}{b+7}\right).$$

За $b\neq -7$, $a=-2$ систем има бесконачно моного решења која зависе од 1 параметра α:

$$(x,y,z,w)=\left(\tfrac{2b+9}{b+7},2,\alpha,\tfrac{-1}{b+7}\right),\quad \alpha\in\mathbb{R}.$$

4. а) Оба дела под а) можемо решавати одједном.

Права p је у параметарском облику: $x=m\cdot s+6$, $y=-5s$, $z=-s$, $s\in\mathbb{R}$.

Права q је у параметарском облику (добијамо га решавањем система $x-z-2=0$, $x-2y+5z=0$): $x=t+2$, $y=3t+1$, $z=t$, $t\in\mathbb{R}$.

Изједначавањем израза за x,y,z добијамо систем од 3 једначине са 3 непознате m,s,t

$$\begin{aligned} m\cdot s+6 &= t+2 \\ -5s &= 3t+1 \\ -s &= t \end{aligned}$$

који када решимо добијамо $m=7$ (то је вредност параметра m за коју се праве p и q секу), $t=\frac{1}{2}$ и $s=-\frac{1}{2}$.

Заменом t у једначину праве q (или m и s у p) добијамо координате пресечне тачке $T(\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{1}{2})$.

б) Како праве p и q припадају равни α то је $\vec{v}_p\perp\vec{n}_\alpha$ и $\vec{v}_q\perp\vec{n}_\alpha$, па ћемо узети

$$\vec{n}_\alpha=\frac{-1}{2}\vec{v}_p\times\vec{p}_q=\frac{-1}{2}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 7 & -5 & -1\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=\frac{-1}{2}(-2,-8,26)=(1,4,-13).$$

За произвољну тачку те равни можемо узети тачку $P(6,0,0)\in p$. Стога је тражена једначина равни $\alpha\colon 1\cdot(x-6)+4\cdot(y-0)-13\cdot(z-0)=0$, односно $\alpha\colon x+4y-13z-6=0$.

Напомена. Ко тражи m у делу под а) преко мешовитог производа $[\overrightarrow{PQ},\vec{v}_p,\vec{v}_q]=0$ МОРА прво да испита да ли су праве p и q паралелне (тј. да ли је $\vec{v}_p=\lambda\cdot\vec{v}_q$).

8. Резултати I колоквијума из Математике 1 8.

1. Како су $a, b \in \mathbb{Q}$, и како је и збир и производ (треба због a^2 и b^2!) рационалних бројева такође рационалан број, следи да је $a * b \in \mathbb{Q}$, тј. важи затвореност операције $*$ у $\mathbb{Q}$.

Како је $1 * (2 * 3) = 1 * 18 = 344$ и $(1 * 2) * 3 = 8 * 3 = 84$, добијамо да је $1 * (2 * 3) \neq (1 * 2) * 3$, па не важи асоцијативност операције $*$ у $\mathbb{Q}$.

Како не важи асоцијативност, следи да структура $(\mathbb{Q}, *)$ није група, а самим тим није ни Абелова група.

Из $a * b = a^2 + b^2 + a + b = b^2 + a^2 + b + a = b * a$ (овде смо користили асоцијативност и комутативност сабирања у $\mathbb{Q}$) следи комутативност операције $*$ у $\mathbb{Q}$.

Неутралан елемент e тражимо из једнакости $x * e = x$ ($e * x = x$ следи из комутативности коју смо показали), тј. $x^2 + e^2 + x + e = x$, односно $e^2 + e + x^2 = 0$. Нпр. за $x = 1$ квадратна једначина $e^2 + e + 1 = 0$ нема реалних (јер је дискриминанта $D = 1 - 4 < 0$), па ни рационалних решења, тј. у $\mathbb{Q}$ не постоји неутралан елемент за операцију $*$.

Како не постоји неутралан елемент за операцију $*$, нема смисла тражити ни инверзан елемент у односу на операцију $*$.

2. Када израчунамо карактеристични полином (најбоље Лапласовим развојем по III врсти) добијамо:

$$k(\lambda) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 9 & 0 \\ -4 & 8-\lambda & 0 \\ 1 & 16 & -3-\lambda \end{vmatrix} = +0-0+(-3-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} -4-\lambda & 9 \\ -4 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)\cdot(\lambda^2-4\lambda+4) = -(\lambda+3)(\lambda-2)^2.$$

Одатле добијамо да су сопствене вредности $\lambda_1 = -3$, $\lambda_{2,3} = 2$.

Одредимо за $\lambda_1 = -3$ сопствене векторе. Решавамо матричну једначину $(A - \lambda I) \cdot v = O$, тј.

$$\begin{Vmatrix} -4-\lambda & 9 & 0 \\ -4 & 8-\lambda & 0 \\ 1 & 16 & -3-\lambda \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \qquad \text{тј.} \qquad \begin{Vmatrix} -1 & 9 & 0 \\ -4 & 11 & 0 \\ 1 & 16 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Ова матрична једначина је еквивалентна хомогеном систему

$$\begin{aligned} -x &+ 9y = 0 \\ -4x &+ 11y = 0 \\ x &+ 16y = 0. \end{aligned}$$

Добијени систем решимо Гаусовим системом елиминације. Када добијемо систем у степенастом облику, променљиве x и y су везане, док је преостала променљива z слободна (иако ње нема у систему, на почетку код матричне једначине јављала се и z!) и њој додељујемо вредност параметра:

$$z = t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Стога овај систем има вишеструко решење које зависи од 1 параметра. Даље, добијамо $y = 0$ и $x = 0$.

Решење датог система је $x = 0$, $y = 0$ и $z = t$, за $t \in \mathbb{R}$.

Одатле добијамо да су за сопствену вредност $\lambda_1 = -3$ сопствени вектори дати са $v_1 = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, за $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (приметимо да смо за разлику од решења система, овде морали да избацимо вредност $t = 0$, јер би за њу добили нула-вектор, а по дефиницији сопственог вектора имамо да је он различит од нула-вектора!).

Одредимо за сопствену вредност $\lambda_{2,3} = 2$ сопствене векторе.
Решавамо матричну једначину $(A - \lambda I) \cdot v = O$, тј.

$$\begin{Vmatrix} -4-\lambda & 9 & 0 \\ -4 & 8-\lambda & 0 \\ 1 & 16 & -3-\lambda \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \qquad \text{тј.} \qquad \begin{Vmatrix} -6 & 9 & 0 \\ -4 & 6 & 0 \\ 1 & 16 & -5 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Ова матрична једначина је еквивалентна хомогеном систему

$$\begin{array}{rcrcrcl} -6x & + & 9y & & & = & 0 \\ -4x & + & 6y & & & = & 0 \\ x & + & 16y & - & 5z & = & 0. \end{array}$$

Како су I и II једначина пропорционалне (2·I= 3·II) једну од њих можемо обрисати и преостали систем решимо Гаусовим системом елиминације. Овај систем има вишеструко решење које зависи од 1 параметра: $x = 3t$, $y = 2t$ и $z = 7t$, за $t \in \mathbb{R}$.

Стога су за сопствену вредност $\lambda_{2,3} = 2$ сопствени вектори дати са $v_1 = t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$, за $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3. Када кренемо да правимо степанасти облик система долазимо до:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & y & + & 2z & - & 3w & = & 0 \\ & & y & - & z & - & 2w & = & 2 \\ & & & & (a-5)z & & & = & 0 \\ & & & - & 3z & + & (b+5)w & = & b+5. \end{array}$$

За $a \neq 5$, $b \neq -5$ систем има јединствено решење: $(x, y, z, w) = (7, 4, 0, 1)$.

За $a = 5$, $b \neq -5$ III једначина је $0 = 0$ и њу обришемо. У овом случају систем има бесконачно моного решења која зависе од 1 параметра t: $(x, y, z, w) = \left(-bt - b - 3, \frac{-bt+t-b+1}{3}, \frac{-bt-5t-b-5}{3}, t\right)$, $t \in \mathbb{R}$.

За $b = -5$ претходни систем није у степенастом облику (јер и у III и у IV једначини имамо z), па треба урадити још 1 корак. У овом случају систем има бесконачно моного решења која зависе од 1 параметра α: $(x, y, z, w) = (2 + 5\alpha, 2 + 2\alpha, 0, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. а) Када решимо систем a: $\begin{cases} y - 2z + 2 = 0 \\ 2x + 3y + 4 = 0 \end{cases}$ добијамо једначину праве a у параметарском облику: $x = 1 - 3t$, $y = -2 + 2t$, $z = t$, $t \in \mathbb{R}$.

Одатле је њен вектор правца $\vec{v}_a = (-3, 2, 1)$, а једна њена тачка $A(1, -2, 0)$.

Вектор нормале на раван $\pi : 2x + y - z + 5 = 0$ је $\vec{n}_\pi = (2, 1, -1)$.

Како је скаларни производ $\vec{n}_\pi \cdot \vec{v}_a = 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 = -5 \neq 0$, добијамо да се права и раван секу.

Заменом параметарског облика праве a у једначину равни π добијамо $2 \cdot (1 - 3t) + (-2 + 2t) - t + 5 = 0$, тј. $t = 1$, што кад вратимо у параметарски облик праве a даје координате пресечне тачке $T(-2, 0, 1)$.

б) Како права a припада равни α то је $\vec{n}_\alpha \perp \vec{v}_a$. Како је раван α нормална на раван π то је $\vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_\pi$, па ћемо узети

$$\vec{n}_\alpha = \vec{v}_a \times \vec{n}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-3, -1, -7).$$

За произвољну тачку те равни можемо узети тачку $A(1, -2, 0) \in a$. Стога је тражена једначина равни α: $-3 \cdot (x - 1) - 1 \cdot (y - (-2)) - 7 \cdot (z - 0) = 0$, односно α: $3x + y + 7z - 1 = 0$.