

19. новембар 2009.

презиме и име студента

број индекса

група за
вежбе

1. Нека је $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ и нека је

$$\mathcal{M} = \{aI + bJ \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0\}$$

и \cdot означава операцију множења матрица. Испитати које од следећих особина има структура (\mathcal{M}, \cdot) :
затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура (\mathcal{M}, \cdot) група? Да ли је структура (\mathcal{M}, \cdot) Абелова група?

2. Израчунати детерминанту $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & a & 8 \\ -1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix}$. За које вредности параметра a је $D = 0$?

3. У зависности од реалног параметра α решити систем

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 4 \\ -x - y + z &= -3 \\ 2x + 4y + \alpha \cdot z &= 6 - \alpha \\ -x + 3y - 2z &= 4. \end{aligned}$$

4. Дате су тачке $A(1, 3, -1)$, $B(3, 3, 1)$, $C(2, 1, \alpha)$ и $D(4, 4, -1)$.

- а) Одредити вредности параметра α тако да запремина пирамиде $ABCD$ буде $\frac{5}{3}$.
б) За најмању вредност α одређену под а) израчунати меру угла $\sphericalangle ABC$.

5. Дате су права a и раван β у простору:

$$a: \frac{x-2}{-2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z+3}{1} \quad \text{и} \quad \beta: x - y + 5z + 9 = 0.$$

- а) Одредити вектор правца \vec{v}_a праве a и вектор нормале \vec{n}_β на раван β .
б) Одредити произвољне тачке $A \in a$ и $B \in \beta$.
в) Одредити међусобни положај праве a и равни β .
д) Уколико се права a и раван β секу одредити њихов пресек, а ако се не секу одредити растојање праве a од равни β .

19. новембар 2009.

презиме и име студента

број индекса

група за
вежбе

1. Нека је $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ и нека је

$$\mathcal{M} = \{aX + bY \mid a, b \in \mathbb{R}, ab \neq 0\}$$

и \cdot означава операцију множења матрица. Испитати које од следећих особина има структура (\mathcal{M}, \cdot) :
затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура (\mathcal{M}, \cdot) група? Да ли је структура (\mathcal{M}, \cdot) Абелова група?

2. Израчунати детерминанту $D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & b & 5 \\ 2 & 0 & -2 & b \end{vmatrix}$. За које вредности параметра b је $D \neq 0$?

3. У зависности од реалног параметра β решити систем

$$\begin{aligned} x + y - 2z + w &= 2 \\ 3x + 3y + (\beta - 5)z + (2 - \beta)w &= \beta^2 + 5 \\ -2x - 2y + 4z - 2w &= -4. \end{aligned}$$

4. Дате су тачке $M(3, -1, 1)$, $N(\beta, 0, 2)$, $P(3, -2, 2)$ и $Q(5, -1, 4)$.

а) Одредити вредности параметра β тако да запремина пирамиде $MNPQ$ буде $\frac{4}{3}$.

б) За највећу вредност β одређену под а) израчунати меру угла $\sphericalangle MNP$.

5. Дате су права a и раван β у простору:

$$a: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{1} \quad \text{и} \quad \beta: x + y + 3 = 0.$$

а) Одредити вектор правца \vec{v}_a праве a и вектор нормале \vec{n}_β на раван β .

б) Одредити произвољне тачке $A \in a$ и $B \in \beta$.

в) Одредити међусобни положај праве a и равни β .

д) Уколико се права a и раван β секу одредити величину угла φ између праве a и равни β , а ако се не секу одредити растојање праве a од равни β .

19. новембар 2009.

презиме и име студента

број индекса

група за
вежбе

1. Нека је $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ и нека је $*$ операција дефинисана са

$$(a, b) * (c, d) = (ad + bc, bd - ac).$$

Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{A}, *)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{A}, *)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{A}, *)$ Абелова група?

2. Нека су дате матрице $F = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$ и $G = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ и I означава јединичну матрицу истог реда као и F .

Одредити матрицу

$$2F^{-1} + G \cdot (F - I)^T.$$

3. У зависности од реалног параметра f решити систем

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 3x + 2y - 3z &= 6 \\ -2x - y + f \cdot z &= f. \end{aligned}$$

4. Дате су тачке $M(1, 2, 3)$, $N(3, 1, \phi + 1)$, $P(1, \phi + 2, 2)$ и $Q(3, -1, 4)$.

а) За које вредности параметра ϕ су вектори \overrightarrow{MN} , \overrightarrow{MP} и \overrightarrow{MQ} компланарни.

б) За најмању вредност ϕ одређену под а) изразити вектор \overrightarrow{MN} преко вектора \overrightarrow{MP} и \overrightarrow{MQ} .

5. Дате су права a и раван β у простору:

$$a: \begin{cases} x + 2y - z - 4 = 0 \\ -x - y + z + 3 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \beta: -x + 3y - z - 5 = 0.$$

а) Одредити вектор правца \vec{v}_a праве a и вектор нормале \vec{n}_β на раван β .

б) Одредити произвољне тачке $A \in a$ и $B \in \beta$.

в) Одредити међусобни положај праве a и равни β .

д) Уколико се права a и раван β секу одредити њихов пресек, а ако се не секу одредити растојање праве a од равни β .

19. новембар 2009.

презиме и име студента

број индекса

група за
вежбе

1. Нека је $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ и нека је $*$ операција дефинисана са

$$(x, y) * (u, v) = (xu - yv, yu + xv).$$

Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{A}, *)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{A}, *)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{A}, *)$ Абелова група?

2. Нека су дате матрица $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Одредити матрицу

$$A^{-1} + B^T \cdot (A - 2I).$$

3. У зависности од реалног параметра γ решити систем

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 1 \\ 3x + 2y + z &= 6 \\ -2x - y - 3z &= \gamma. \end{aligned}$$

4. Дате су тачке $A(-1, 1, -1)$, $B(\gamma, 1, 0)$, $C(1, -2, -2)$ и $D(-5, \gamma + 2, 0)$.

а) За које вредности параметра γ су вектори \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} и \overrightarrow{CD} линеарно зависни.

б) За највећу вредност γ одређену под а) изразити вектор \overrightarrow{CD} преко вектора \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} .

5. Дате су права a и раван β у простору:

$$a: \begin{cases} x + 3y + 2z - 4 = 0 \\ -x - 4y + z + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \beta: 2x + 7y + z + 2 = 0.$$

а) Одредити вектор правца \vec{v}_a праве a и вектор нормале \vec{n}_β на раван β .

б) Одредити произвољне тачке $A \in a$ и $B \in \beta$.

в) Одредити међусобни положај праве a и равни β .

д) Уколико се права a и раван β секу одредити величину угла φ између праве a и равни β , а ако се не секу одредити растојање праве a од равни β .

19. новембар 2009.

презиме и име студента

број индекса

група за
вежбе

1. Нека је $A = (-2, \infty)$ и нека је операција $*$ дефинисана са

$$x * y = 3xy + 6(x + y) + 10.$$

Испитати које од следећих особина има структура $(A, *)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(A, *)$ група? Да ли је структура $(A, *)$ Абелова група?

2. Дате су матрице $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$.

Решити матричну једначину

$$A \cdot X + 2B \cdot X = C.$$

3. У зависности од реалног параметра d решити систем

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y + (d-6)z &= d+6 \\ -2x - 4y + 6z &= -2. \end{aligned}$$

4. Дати су вектори

$$\vec{m} = (3, 3, -2), \quad \vec{n} = (1, 2\delta, 4), \quad \vec{p} = (3, -3, 2) \quad (\delta \in \mathbb{R}).$$

а) Одредити вредности параметра δ тако да вектори \vec{m} , \vec{n} и \vec{p} буду линеарно зависни.

б) За највећу вредност δ одређену под а) изразити вектор \vec{n} помоћу вектора \vec{m} и \vec{p} .

5. Дате су права a и права b у простору:

$$a: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-5}{4} \quad \text{и} \quad b: \frac{x}{-1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+4}{1}.$$

а) Одредити вектор правца \vec{v}_a праве a и вектор правца \vec{v}_b праве b .

б) Одредити произвољне тачке $A \in a$ и $B \in b$.

в) Одредити међусобни положај праве a и праве b .

д) Уколико се права a и права b секу одредити њихов пресек, а ако се не секу одредити њихово међусобно растојање.

19. новембар 2009.

презиме и име студента

број индекса

група за
вежбе

1. Нека је

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & b & -a \\ 0 & a & b \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$$

и \cdot означава операцију множења матрица. Испитати које од следећих особина има структура (\mathcal{M}, \cdot) :

затвореност, асоцијативност, нултни елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура (\mathcal{M}, \cdot) група? Да ли је структура (\mathcal{M}, \cdot) Абелова група?

2. Испитати ранг матрице

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & \varepsilon & 8 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

у зависности од реалног параметра ε .3. У зависности од реалног параметра e решити систем

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 2 \\ -x + z &= 2 \\ 2x + 4y + (e-4)z &= 10 - e \\ 3x + y - 4z &= 3. \end{aligned}$$

4. Дати су вектори

$$\vec{a} = (4, 2, 3\varepsilon), \quad \vec{b} = (1, -2, 4), \quad \vec{c} = (2, 2, -1) \quad (\varepsilon \in \mathbb{R}).$$

а) Одредити вредности параметра δ тако да вектори \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} буду компланарни.б) За највећу вредност ε одређену под а) изразити вектор \vec{a} помоћу вектора \vec{b} и \vec{c} .

5. Дате су 4 тачке у простору:

$$A(-3, -1, 5), \quad B(5, 5, 1), \quad C(3, 1, 3), \quad D(3, 2, -1).$$

а) Одредити раван α је одређена тачкама A , B и C .б) Одредити једначину нормале n из тачке D на раван α .в) Одредити вектор правца \vec{v}_n праве n и вектор нормале \vec{n}_α на раван α .д) Одредити растојање тачке D од равни α .

19. новембар 2009.

презиме и име студента

број индекса

група за
вежбе

1. Нека је

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} x & -y & x \\ y & x & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \neq 0 \right\}$$

и \cdot означава операцију множења матрица. Испитати које од следећих особина има структура (M, \cdot) :
затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура (M, \cdot) група? Да ли је структура (M, \cdot) Абелова група?

2. Испитати ранг матрице

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & \lambda & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & \lambda \end{bmatrix}$$

у зависности од реалног параметра λ .

3. У зависности од реалног параметра ℓ решити систем

$$\begin{aligned} x - y + 2z + 3u &= 1 \\ 3x - 2y + 4z + 5u &= 1 \\ -2x + (\ell - 2)y + (4 - 2\ell)z + (10 - 4\ell)u &= 2. \end{aligned}$$

4. Дати су вектори

$$\vec{a} = \vec{i} + \vec{k}, \quad \vec{b} = -2\vec{j} + 3\vec{k}, \quad \vec{c} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \lambda\vec{k} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

а) Ако су вектори $\vec{u} = \vec{a} + 3\vec{b}$ и $\vec{v} = \vec{b} - 2\vec{a}$, одредити $\vec{u} \times \vec{v}$.б) За коју вредност реалног параметра λ су вектори \vec{c} и $\vec{u} \times \vec{v}$ колинеарни?5. Дате су раван α и раван β у простору:

$$\alpha: x + 2y - z - 2 = 0 \quad \text{и} \quad \beta: -x + y + z + 2 = 0.$$

а) Одредити вектор нормале \vec{n}_α на раван α и вектор нормале \vec{n}_β на раван β .б) Одредити произвољне тачке $A \in \alpha$ и $B \in \beta$.в) Одредити међусобни положај равни α и равни β .

д) Уколико се раван α и раван β секу одредити њихов пресек, а ако се не секу одредити њихово међусобно растојање.

19. новембар 2009.

 презиме и име студента

 број индекса

 група за
вежбе

1. Нека је $A = (1, \infty)$ и нека је операција $*$ дефинисана са

$$x * y = 3xy - 3(x + y) + 4.$$

Испитати које од следећих особина има структура $(A, *)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(A, *)$ група? Да ли је структура $(A, *)$ Абелова група?

2. Дате су матрице $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Решити матричну једначину

$$A \cdot X = 2B \cdot X + C.$$

3. У зависности од реалног параметра m решити систем

$$\begin{array}{rccccccc} x & + & 2y & - & 3z & = & -2 \\ 2x & + & 4y & + & (m-5)z & = & -2m-6 \\ -2x & - & 3y & + & 4z & = & 2 \end{array}$$

4. Дати су вектори

$$\vec{m} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{n} = \vec{i} - 3\vec{k}, \quad \vec{p} = 6\vec{i} + \mu\vec{j} + 2\vec{k} \quad (\mu \in \mathbb{R}).$$

- а) Ако су вектори $\vec{u} = \vec{m} - 3\vec{n}$ и $\vec{v} = \vec{n} + 2\vec{m}$, одредити $\vec{u} \times \vec{v}$.
 б) За коју вредност реалног параметра μ су вектори \vec{c} и $\vec{u} \times \vec{v}$ линеарно зависни?
5. Дате су раван α и раван β у простору:

$$\alpha: 2x - 4y - 8z + 5 = 0 \quad \text{и} \quad \beta: \frac{x}{-4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 1.$$

- а) Одредити вектор нормале \vec{n}_α на раван α и вектор нормале \vec{n}_β на раван β .
 б) Одредити произвољне тачке $A \in \alpha$ и $B \in \beta$.
 в) Одредити међусобни положај равни α и равни β .
 д) Уколико се раван α и раван β секу одредити њихов пресек, а ако се не секу одредити њихово међусобно растојање.