A I колоквијум из Математике 1 A

24. новембар 2007.

презиме и име студента **број индекса** **група за вежбе**

1. (*30 poena*) Дата је структура $(A, +)$, при чему је

$$A = \{a \cdot x^2 + b \cdot x + c \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$$

и $+$ је операција сабирања полинома.

Испитати које од следећих особина има структура $(A, +)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(A, +)$ група? Да ли је структура $(A, +)$ Абелова група?

2. (*30 poena*) У зависности од реалних параметара a и b решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ -x & - & 2y & - & 2z & = & a \\ 3x & + & 2y & + & b \cdot z & = & 4. \end{array}$$

3. (*40 poena*) Дате су једначине равни α и β:

$$\alpha\colon x - 2y + 2z + 3 = 0 \qquad \text{и} \qquad \beta\colon -2x + 4y - 4z = 0.$$

а) Одредити њихове векторе нормала $\vec{n}_\alpha$ и $\vec{n}_\beta$.

б) Одредити произвољне тачке $A \in \alpha$ и $B \in \beta$.

в) Испитати узајамни положај равни α и β.

г) Уколико се равни α и β секу одредити њихову пресечну праву p (шта је њен вектор правца $\vec{v}_p$ и једна тачка $P \in p$?), а ако се не секу одредити растојање равни α и β.

Б **I колоквијум из Математике 1** Б

24. новембар 2007.

______________________ ______________ __________

презиме и име студента **број индекса** **група за вежбе**

1. (*30 poena*) Дата је структура $(\mathbb{Q}\setminus\{-2\},*)$, при чему је операција $*$ дефинисана са

$$a*b = a\cdot b + 2a + 2b + 2.$$

Испитати које од следећих особина има структура $(\mathbb{Q}\setminus\{-2\},*)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathbb{Q}\setminus\{-2\},*)$ група? Да ли је структура $(\mathbb{Q}\setminus\{-2\},*)$ Абелова група?

2. (*30 poena*) У зависности од реалних параметара b и β решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 1 \\ -x & + & 2y & - & z & = & \beta \\ 3x & - & 2y & + & b\cdot z & = & 4-\beta. \end{array}$$

3. (*40 poena*) Дати су вектори:

$$\vec{v}_1 = (1,4,5), \qquad \vec{v}_2 = (-2,-3,-2), \qquad \vec{v}_3 = (3,4,2) \qquad \text{и} \qquad \vec{w} = (1,2,3).$$

а) Испитати да ли су вектори $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_3$ линеарно независни.

б) Да ли вектори $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_3$ чине базу простора $\mathbb{R}^3$?

в) Изразити вектор $\vec{w}$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_3$.

В I колоквијум из Математике 1 В

24. новембар 2007.

презиме и име студента	**број индекса**	**група за вежбе**

1. (*30 poena*) Дата је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$, при чему је

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{Q}, a \neq 0 \right\}$$

и $\cdot$ означава операцију множења матрица.
Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{M}, \cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ Абелова група?

2. (*30 poena*) У зависности од реалног параметра ν решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & w & = & 2 \\ -x & & & + & z & + & w & = & -3 \\ 3x & + & 2y & + & z & + & \nu \cdot w & = & 7. \end{array}$$

3. (*40 poena*) Дати су вектори:

$$\vec{v}_1 = (1, 2, -3), \qquad \vec{v}_2 = (-2, -3, 0), \qquad \vec{v}_3 = (3, 4, 2) \qquad \text{и} \qquad \vec{w} = (1, 1, 4).$$

а) Испитати да ли су вектори $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_3$ линеарно независни.

б) Да ли вектори $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_3$ чине базу простора $\mathbb{R}^3$?

в) Изразити вектор $\vec{w}$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_3$.

Г I колоквијум из Математике 1 Г

24. новембар 2007.

______________________________ ______________ ________

презиме и име студента | број индекса | група за вежбе

1. (*30 poena*) Дата је структура $(\mathcal{M},\cdot)$, при чему је

$$\mathcal{M}=\left\{\begin{bmatrix} a & 0 & c\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & a\end{bmatrix} : a,b,c\in\mathbb{R}, a>0, b>0, c\geqslant 0\right\}$$

и $\cdot$ означава операцију множења матрица.

Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{M},\cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{M},\cdot)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{M},\cdot)$ Абелова група?

2. (*30 poena*) У зависности од реалног параметра γ решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 3y & + & z & = & 2\\ x & - & 2y & - & 2z & = & 3\\ 3x & - & 10y & + & 6z & = & 5\\ -2x & + & 3y & + & 7z & = & \gamma. \end{array}$$

3. (*40 poena*) Дате су једначине равни α и β:

$$\alpha\colon x+2y-z+2=0 \qquad \text{и} \qquad \beta\colon 2x+3y+z=0.$$

а) Одредити њихове векторе нормала $\vec{n}_\alpha$ и $\vec{n}_\beta$.

б) Одредити произвољне тачке $A\in\alpha$ и $B\in\beta$.

в) Испитати узајамни положај равни α и β.

г) Уколико се равни α и β секу одредити њихову пресечну праву p (шта је њен вектор правца $\vec{v}_p$ и једна тачка $P\in p$?), а ако се не секу одредити растојање равни α и β.

Д # I колоквијум из Математике 1 Д

24. новембар 2007.

презиме и име студента **број индекса** **група за вежбе**

1. (*30 poena*) Дата је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$, при чему је

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & 3a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}$$

и $\cdot$ означава операцију множења матрица.

Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{M}, \cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ Абелова група?

2. (*30 poena*) У зависности од реалног параметра δ решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & + & w & = & 2 \\ 3x & + & y & + & 2z & + & w & = & 7 \\ -x & + & y & & & + & w & = & \delta. \end{array}$$

3. (*40 poena*) Дате су четири тачке у простору:

$$A(-3,1,-3), \qquad B(1,2,0), \qquad C(-7,-1,-6) \qquad \text{и} \qquad D(7,2,-3).$$

а) Одредити једначину равни α која пролази кроз тачке A, B и C.

б) Одредити вектор нормале $\vec{n}_\alpha$ равни α.

в) Одредити произвољну тачку $M \in \alpha$, различиту од задатих тачака.

г) Израчунати површину троугла $\triangle ABC$.

д) Израчунати запремину пирамиде $ABCD$.

е) Одредити дужину висине пирамиде $ABCD$ која полази из темена D.

I колоквијум из Математике 1

E

24. новембар 2007.

презиме и име студента	**број индекса**	**група за вежбе**

1. (*30 poena*) Дата је структура $(S, \cdot)$, при чему је

$$S = \left\{ x + y\sqrt{3} \mid x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}, x^2 + y^2 \neq 0 \right\}$$

и $\cdot$ означава операцију множења реалних бројева.

Испитати које од следећих особина има структура $(S, \cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(S, \cdot)$ група? Да ли је структура $(S, \cdot)$ Абелова група?

2. (*30 poena*) У зависности од реалних параметара e и ε решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & y & + & 3z & + & 3u & = & 1 \\ 3x & + & 4y & + & 6z & + & (2e+1)u & = & \varepsilon^2 + 2 \\ 2x & + & 5y & + & (e-1)z & + & 6u & = & 5. \end{array}$$

3. (*40 poena*) Дате су четири тачке у простору:

$$A(1, -2, 3), \qquad B(0, 2, 2), \qquad C(5, 0, 1) \qquad \text{и} \qquad D(1, 4, 1).$$

а) Одредити једначину равни α која пролази кроз тачке A, B и C.

б) Одредити вектор нормале $\vec{n}_\alpha$ равни α.

в) Да ли тачка D припада равни α?

г) Одредити једначину праве p која пролази кроз тачке A и B.

д) Одредити једначину праве q која пролази кроз тачке C и D.

е) Да ли се праве p и q секу?

К **I колоквијум из Математике 1** К

24. новембар 2007.

презиме и име студента | **број индекса** | **група за вежбе**

1. (*30 poena*) Дата је структура $(\mathcal{M},\cdot)$, при чему је

$$M=\left\{\begin{bmatrix} a & 0 & 0\\ b & a & 0\\ c & 0 & a\end{bmatrix} : a\in\mathbb{R}, a\neq 0\right\}$$

и $\cdot$ означава операцију множења матрица.

Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{M},\cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{M},\cdot)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{M},\cdot)$ Абелова група?

2. (*30 poena*) У зависности од реалних параметара k и m решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 3y & + & z & = & 2\\ x & - & 2y & - & 2z & = & 3\\ 3x & - & 10y & + & 6z & = & k\\ -2x & + & 3y & + & 7z & = & m\end{array}$$

3. (*40 poena*) Дате су права a и раван β у простору:

$$a\colon\begin{cases} x+y+z-1=0\\ -x-2y-2z=0\end{cases}\qquad \text{и}\qquad \beta\colon 2x+2y-z+7=0.$$

а) Одредити вектор правца $\vec{v}_a$ праве a.

б) Одредити произвољне тачке $A\in a$ и $B\in\beta$.

в) Одредити вектор нормале $\vec{n}_\beta$ равни β.

г) Одредити међусобни положај праве a и равни β.

д) Наћи пресек праве a и равни β.

е) Израчунати величину угла φ између праве a и равни β.

Л **I колоквијум из Математике 1** **Л**

24. новембар 2007.

презиме и име студента	број индекса	група за вежбе

1. (*30 poena*) Дата је структура $(X, \circ)$, при чему је

$$X = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$$

и операција $\circ$ је задата на следећи начин:

$$(a, b, c) \circ (m, n, p) = (am, b + n, ap + bm + cn).$$

Испитати које од следећих особина има структура $(X, \circ)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(X, \circ)$ група? Да ли је структура $(X, \circ)$ Абелова група?

2. (*30 poena*) У зависности од реалних параметара λ и ℓ решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & \ell \\ 3x & + & 2y & - & z & = & \lambda \\ -3x & - & 2y & + & \lambda \cdot z & = & 0. \end{array}$$

3. (*40 poena*) Дате су права q и раван π у простору:

$$q \colon \frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+4}{3} \qquad \text{и} \qquad \pi \colon 2x + 10y - 2z - 5 = 0.$$

а) Одредити вектор правца $\vec{v}_q$ праве q.

б) Одредити произвољне тачке $Q \in q$ и $P \in \pi$.

в) Одредити вектор нормале $\vec{n}_\pi$ равни π.

г) Одредити међусобни положај праве q и равни π.

д) Израчунати растојање тачке Q до равни π.

е) Израчунати величину угла између вектора $\vec{v}_q$ и $\vec{n}_\pi$.

A Решења I колоквијума из Математике 1 A

1. Затвореност важи:

$$(a\cdot x^2+b\cdot x+c)+(m\cdot x^2+n\cdot x+p)=(a+m)\cdot x^2+(b+n)\cdot x+(c+p)\in A$$

(овде смо користили особине асоцијативности, комутативности и дистрибутивности операција $+$ и $\cdot$ у $\mathbb{Q}$).
Асоцијативност важи: $(a\cdot x^2+b\cdot x+c)+\Big((m\cdot x^2+n\cdot x+p)+(u\cdot x^2+v\cdot x+w)\Big)=\ldots=(a+m+u)\cdot x^2+(b+n+v)\cdot x+(c+p+w)=\ldots=\Big((a\cdot x^2+b\cdot x+c)+(m\cdot x^2+n\cdot x+p)\Big)+(u\cdot x^2+v\cdot x+w)$ (овде смо користили особине асоцијативности, комутативности и дистрибутивности операција $+$ и $\cdot$ у $\mathbb{Q}$).
Неутрални елемент је нула полином $P(x)=0$, а због $P(x)=0\cdot x^2+0\cdot x+0\Rightarrow P(x)=0\in A$.
Инверзни елемент полинома $P(x)=ax^2+bx+c$ је полином $-P(x)=-ax^2-bx-c\in A$.
Комутативност важи: $(a\cdot x^2+b\cdot x+c)+(m\cdot x^2+n\cdot x+p)=(a+m)\cdot x^2+(b+n)\cdot x+(c+p)=(m+a)\cdot x^2+(n+b)\cdot x+(p+c)=(m\cdot x^2+n\cdot x+p)+(a\cdot x^2+b\cdot x+c)$ (овде смо користили комутативност операције $+$ у $\mathbb{Q}$).

На основу свега изложеног добијамо да је структура $(A,+)$ група и то Абелова група.

2. I начин: преко детерминанти.
$\Delta=2-b$, $\Delta_x=-ab+2a-2b+4$, $\Delta_y=ab-3a+b-2$, $\Delta_z=a$.

За $b=2$ је $\Delta=0$, а $\Delta_x=-2a+2a-4+4=0$, $\Delta_y=2a-3a+2-2=-a$, $\Delta_z=a$. Сада смо спремни да уђемо у дискусију по случајевима.

- За $b=2$ и $a\neq 0$ имамо да је $\Delta=0$ и $\Delta_y\neq 0$, па систем нема решења.
- За $b=2$ и $a=0$ је $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$, па у овом случају до решења морамо ићи Гаусовим системом елиминације.

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x&+&y&+&z&=&1&\\ -x&-&2y&-&2z&=&0&\mathrm{II}+\mathrm{I}\\ 3x&+&2y&+&2z&=&4&\mathrm{III}-3\cdot\mathrm{I}\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x&+&y&+&z&=&1&\\ &-&y&-&z&=&1&\\ &-&y&-&z&=&1&\mathrm{III}-\mathrm{II}\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x&+&y&+&z&=&1\\ &-&y&-&z&=&1\\ &&&&0&=&0\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x&+&y&+&z&=&1\\ &-&y&-&z&=&1\end{array}$$

  Овде су x и y везане промењљиве, а z је слободна, те можемо узети да је $z=t$, $t\in\mathbb{R}$. Враћањем уназад добијамо да је $y=-1-t$ и $x=2$. Стога у овом случају имамо вишеструко решење које зависи од 1 параметра: $(x,y,z)=(2,-1-t,t)$, $t\in\mathbb{R}$.

- За $b\neq 2$ је $\Delta\neq 0$ па систем има јединствено решење које добијамо из Крамерових формула: $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}$ и $z=\frac{\Delta_z}{\Delta}$. У овом случају решење је $(x,y,z)=(a+2,\frac{ab-3a+b-2}{2-b},\frac{a}{2-b})$.

<u>II начин</u>: Гаусовим системом елиминације.

$$\begin{array}{rcrcrcll} x & + & y & + & z & = & 1 & \\ -x & - & 2y & - & 2z & = & a & \mathrm{II}+\mathrm{I} \\ 3x & + & 2y & + & bz & = & 4 & \mathrm{III}-3\cdot\mathrm{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcll} x & + & y & + & z & = & 1 & \\ & - & y & - & z & = & a+1 & \\ & - & y & + & (b-3)z & = & 1 & \mathrm{III}-\mathrm{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & - & y & - & z & = & a+1 \\ & & & & (b-2)z & = & -a \end{array}$$

За $b=2$ и $a\neq 0$ последња једначина је једнака $0=-a\neq 0$, па у овом случају систем нема решења.

За $b=2$ и $a=0$ систем решавамо потпуно аналогно као и у претходном начину.

За $b\neq 2$ систем у степенастом облику има 3 једначине, па су све променљиве x,y,z везане, те систем има јединствено решење. Враћањем уназад добијамо решење $(x,y,z)=(a+2,\frac{ab-3a+b-2}{2-b},\frac{a}{2-b})$.

Коначан закључак је:

- За $b=2$ и $a\neq 0$ систем нема решења.
- За $b=2$ и $a=0$ систем има вишеструко решење: $(x,y,z)=(2,-1-t,t)$, $t\in\mathbb{R}$.
- За $b\neq 2$ систем има јединствено решење: $(x,y,z)=(a+2,\frac{ab-3a+b-2}{2-b},\frac{a}{2-b})$.

3. $\alpha\colon x-2y+2z+3=0$ и $\beta\colon -2x+4y-4z=0$.

а) Вектори нормала су $\vec{n}_\alpha=(1,-2,2)$ и $\vec{n}_\beta=(-2,4,-4)$.

б) Произвољну тачку $A\in\alpha$ добијамо када у једначини равни $\alpha\colon x-2y+2z+3=0$ узмемо 2 координате произвољно и онда израчунамо трећу. Нпр. $y=z=0\Rightarrow x=-3$, па је $A(-3,0,0)$.

Слично из $\beta\colon -2x+4y-4z=0$ за $y=z=0\Rightarrow x=0$, па добијамо $B(0,0,0)$.

в) Како су вектори равни колинеарни, тј. важи $\vec{n}_\beta=-2\vec{n}_\alpha$ добијамо да су равни α и β или паралелне или се поклапају.

Проверимо још да ли произвољна тачка $B(0,0,0)$ из равни β припада равни $\alpha\colon x-2y+2z+3=0$. Из

$$0-2\cdot 0+2\cdot 0+3=3\neq 0$$

добијамо да $B\notin\alpha$.

На основу свега овога закључујемо да је $\alpha\parallel\beta$.

г) Равни α и β су паралелне, па се не секу, те треба одредити растојање $d(\alpha,\beta)=d(B,\alpha)$.

Растојање тачке $B(0,0,0)$ до равни $\alpha\colon x-2y+2z+3=0$ тражимо по формули:

$$d(\alpha,\beta)=d(B,\alpha)=\frac{|0-2\cdot 0+2\cdot 0+3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{|3|}{\sqrt{9}}=\frac{3}{3}=1.$$

Б Решења I колоквијума из Математике 1 Б

1. Затвореност важи:

$$a * b = ab + 2a + 2b + 2 \in \mathbb{Q}.$$

Потребно је још да покажемо да је $a*b \neq -2$. Како је $a*b = (a+2)\cdot(b+2)-2$ (овде смо користили особине асоцијативности, комутативности и дистрибутивности операција $+$ и $\cdot$ у $\mathbb{Q}$) имамо да из $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{-2\}$ $\Rightarrow a * b \neq -2$, тј. $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{-2\}$.

Асоцијативност важи: $(a * b) * c = (ab + 2a + 2b + 2) * c = abc + 2ab + 2ac + 2bc + 4a + 4b + 4c + 6$ $a * (b * c) = a * (bc + 2b + 2c + 2) = abc + 2ab + 2ac + 2bc + 4a + 4b + 4c + 6$, тј. важи $(a * b) * c = a * (b * c)$ (овде смо користили особине асоцијативности, комутативности и дистрибутивности операција $+$ и $\cdot$ у $\mathbb{Q}$).

Неутрални елемент је $e = -1 \in \mathbb{Q} \setminus \{-2\}$: $-1 * x = x * -1 = -x - 2 + 2x + 2 = x$.

Инверзни елемент x' елемента x је $x' = \dfrac{-3-2a}{a+2} = -2 + \dfrac{1}{a+2} \in \mathbb{Q} \setminus \{-2\}$.

До овог резултата долазимо тако што решимо једначину $x * x' = e = -1$, тј. $xx' + 2x + 2x' + 2 = -1$, тј. $(x+2)x' = -3 - 2x \Rightarrow x' = \dfrac{-3-2a}{a+2}$. Овако добијено решење задовољава и једначину $x' * x = e$ (проверити).

Комутативност важи: $a * b = ab + 2a + 2b + 2 = ba + 2b + 2a + 2 = b * a$ (овде смо користили комутативност операција $+$ и $\cdot$ у $\mathbb{Q}$).

На основу свега изложеног добијамо да је структура $(\mathbb{Q} \setminus \{-2\}, *)$ група и то Абелова група.

2. I начин: преко детерминанти.
$\Delta = b - 3$, $\Delta_x = b\beta + 2b - \beta - 6$, $\Delta_y = b\beta + b - 3\beta - 3$, $\Delta_z = -2\beta$.

За $b = 3$ је $\Delta = 0$, а $\Delta_x = 3\beta + 6 - \beta - 6 = 2\beta$, $\Delta_y = 3\beta + 3 - 3\beta - 3 = 0$, $\Delta_z = -2\beta$. Сада смо спремни да уђемо у дискусију по случајевима.

- За $b = 3$ и $\beta \neq 0$ имамо да је $\Delta = 0$ и $\Delta_x \neq 0$, па систем нема решења.
- За $b = 3$ и $\beta = 0$ је $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, па у овом случају до решења морамо ићи Гаусовим системом елиминације.

$$\begin{array}{rcrcrcl l} x & - & y & + & z & = & 1 & \\ -x & + & 2y & - & z & = & 0 & \mathrm{II}+\mathrm{I} \\ 3x & - & 2y & + & 3z & = & 4 & \mathrm{III}-3\cdot\mathrm{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcl l} x & - & y & + & z & = & 1 & \\ & & y & & & = & 1 & \\ & & y & & & = & 1 & \mathrm{III}-\mathrm{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 1 \\ & & y & & & = & 1 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 1 \\ & & y & & & = & 1 \end{array}$$

  Овде су x и y везане променљиве, а z је слободна, те можемо узети да је $z = t$, $t \in \mathbb{R}$. Враћањем уназад добијамо да је $y = 1$ и $x = 2 - t$. Стога у овом случају имамо вишеструко решење које зависи од 1 параметра: $(x, y, z) = (2 - t, 1, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

- За $b \neq 3$ је $\Delta \neq 0$ па систем има јединствено решење које добијамо из Крамерових формула: $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$ и $z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$. У овом случају решење је $(x, y, z) = (\frac{b\beta+2b-\beta-6}{b-3}, \beta + 1, \frac{2\beta}{3-\beta})$.

II начин: Гаусовим системом елиминације.

$$\begin{array}{rcrcrcll} x & - & y & + & z & = & 1 & \\ -x & + & 2y & - & z & = & \beta & \mathrm{II}+\mathrm{I} \\ 3x & - & 2y & + & b\cdot z & = & 4-\beta & \mathrm{III}-3\cdot\mathrm{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcll} x & - & y & + & z & = & 1 & \\ & & y & & & = & \beta+1 & \\ & & y & + & (b-3)z & = & 1-\beta & \mathrm{III}-\mathrm{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 1 \\ & & y & & & = & \beta+1 \\ & & & & (b-3)z & = & -2\beta \end{array}$$

За $b=3$ и $\beta\neq 0$ последња једначина је једнака $0=-2\beta\neq 0$, па у овом случају систем нема решења.

За $b=3$ и $\beta=0$ систем решавамо потпуно аналогно као и у претходном начину.

За $b\neq 3$ систем у степенастом облику има 3 једначине, па су све промењљиве x,y,z везане, те систем има јединствено решење. Враћањем уназад добијамо решење $(x,y,z)=(\frac{b\beta+2b-\beta-6}{b-3},\beta+1,\frac{2\beta}{3-\beta})$.

Коначан закључак је:

- За $b=3$ и $\beta\neq 0$ систем нема решења.
- За $b=3$ и $\beta=0$ систем има вишеструко решење: $(x,y,z)=(2-t,1,t)$, $t\in\mathbb{R}$.
- За $b\neq 3$ систем има јединствено решење: $(x,y,z)=(\frac{b\beta+2b-\beta-6}{b-3},\beta+1,\frac{2\beta}{3-\beta})$.

3. а) Линеарну зависност 3 вектора у $\mathbb{R}^3$ можемо испитати преко детерминанте која ће имати по врстама координате тих вектора:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -2 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -1\neq 0$$

$\Rightarrow$ вектори $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_3$ су линеарно независни.

б) Како је векторски простор $\mathbb{R}^3$ тродимензионалан, тј. $\dim(\mathbb{R}^3)=3$, то било која 3 линеарно независна вектора чине базу тог простора. Стога, вектори $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_3$ чине базу простора $\mathbb{R}^3$.

в) Изразимо вектор $\vec{w}$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_3$:

$$\vec{w}=\alpha\cdot\vec{v}_1+\beta\cdot\vec{v}_2+\gamma\cdot\vec{v}_3$$

$$(1,2,3)=\alpha\cdot(1,4,5)+\beta\cdot(-2,-3,-2)+\gamma\cdot(3,4,2)$$

$$(1,2,3)=(\alpha-2\beta+3\gamma,4\alpha-3\beta+4\gamma,5\alpha-2\beta+2\gamma)$$

Ова једначина је еквивалентна са системом

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha & - & 2\beta & + & 3\gamma & = & 1 \\ 4\alpha & - & 3\beta & + & 4\gamma & = & 2 \\ 5\alpha & - & 2\beta & + & 2\gamma & = & 3 \end{array}$$

који има јединствено решење $a=-1$, $b=-10$, $c=-6$. Тиме смо добили да је

$$\vec{w}=-\vec{v}_1-10\vec{v}_2-6\vec{v}_3.$$

B Решења I колоквијума из Математике 1 B

1. Затвореност важи:

$$\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b & b \\ b & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2ab & 2ab \\ 2ab & 2ab \end{bmatrix} \in \mathcal{M}$$

јер $a \neq 0, b \neq 0 \Rightarrow 2ab \neq 0$ и $a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow 2ab \in \mathbb{Q}$.

Ради краћег записа можемо означити $M(a) = \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}$ и онда пишемо $M(a) \cdot M(b) = M(2ab)$.

Асоцијативност се преноси (како је множење матрица асоцијативна операција у скупу Ω свих матрица облика 2×2 са реалним елементима то је множење матрица асоцијативно и у скупу $\mathcal{M} \subset \Omega$).

Неутрални елемент овде неће бити јединична матрица јер $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \notin \mathcal{M}$, али то не значи да ова структура нема неутрални елемент. Нека је $M(x)$ неутрални елемент. Тада треба да важи

$$M(a) \cdot M(x) = M(2ax) = M(a) \qquad \text{за свако } a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\},$$

одакле добијамо да је $x = \frac{1}{2}$, тј. неутрални елемент је матрица $M(\frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}$ $\big($провером видимо да важи и једнакост $M(\frac{1}{2}) \cdot M(a) = M(a)$, па видимо да матрица $M(\frac{1}{2})$ задовољава оба услова која треба да важе за неутрални елемент).

Инверзни елемент није инверзна матрица! Један разлог је што неутрални елемент није јединична матрица I, а други је што за матрице $M(a)$ не постоји иверзна матрица (зашто?).

Инверзни елемент за матрицу $M(a)$ ће бити матрица $M(y)$ и њу тражимо из једначине

$$M(a) \cdot M(y) = M(2ay) = M(\tfrac{1}{2}),$$

одакле добијамо да је $y = \frac{1}{4a}$, тј. да је $M(\frac{1}{4a}) \in \mathcal{M}$ инверзни елемент матрице $M(a)$ $\big($приметимо да важи и $M(\frac{1}{4a}) \cdot M(a) = M(\frac{1}{2})$, па $M(\frac{1}{4a})$ задовољава оба услова потребна за инверзни елемент$\big)$.

Комутативност важи (иако генерално множење матрица није комутативна операција у скупу $\mathcal{M}$ јесте!):

$$M(a) \cdot M(b) = M(2ab) = M(2ba) = M(b) \cdot M(a)$$

(овде смо користили комутативност и асоцијативност операције $\cdot$ у $\mathbb{Q}$).

На основу свега изложеног добијамо да је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ група и то Абелова група.

2. Ово је систем од 3 једначине са 4 непознате, па га морамо решавати Гаусовим системом елиминације.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl}
x & + & y & + & z & + & w & = & 2 & \\
-x & & & + & z & + & w & = & -3 & \mathrm{II}+\mathrm{I} \\
3x & + & 2y & + & z & + & \nu \cdot w & = & 7 & \mathrm{III}-3\cdot\mathrm{I}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl}
x & + & y & + & z & + & w & = & 2 & \\
 & & y & + & 2z & + & 2w & = & -1 & \\
 & - & y & - & 2z & + & (\nu-3)w & = & 1 & \mathrm{III}+\mathrm{II}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x & + & y & + & z & + & w & = & 2 \\
 & & y & + & 2z & + & 2w & = & -1 \\
 & & & & & & (\nu-1)w & = & 0
\end{array}$$

Сада овде имамо 2 случаја у зависности какво је ν.

- За $\nu \neq 1$ систем је у степенастом облику, па су x, y и w везане променљиве, а z је слободна, те можемо узети да је $z = t$, $t \in \mathbb{R}$.

  Враћањем уназад добијамо да је $w = 0$, $y = -1 - 2t$ и $x = 3 + t$. Стога у овом случају имамо вишеструко решење које зависи од 1 параметра: $(x, y, z, w) = (3 + t, -1 - 2t, t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$.

- За $\nu = 1$ последња једначина постаје $0 = 0$ и њу можемо избрисати па се систем свео на

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & w & = & 2 \\ & & y & + & 2z & + & 2w & = & -1 \end{array}$$

  Ово је систем у степенастом облику, па су x и y везане променљиве, а z и w је слободне, те можемо узети да је $z = t$ и $w = p$, $t, p \in \mathbb{R}$.

  Враћањем уназад добијамо да је $y = -1 - 2t - 2p$ и $x = 3 + t + p$. Стога у овом случају имамо вишеструко решење које зависи од 2 параметра: $(x, y, z, w) = (3 + t + p, -1 - 2t - 2p, t, p)$, $t, p \in \mathbb{R}$.

Коначан закључак је:

- За $\nu \neq 1$ систем има вишеструко решење: $(x, y, z, w) = (3 + t, -1 - 2t, t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$.
- За $\nu = 1$ систем има вишеструко решење: $(x, y, z, w) = (3 + t + p, -1 - 2t - 2p, t, p)$, $t, p \in \mathbb{R}$.

3. а) Линеарну зависност 3 вектора у $\mathbb{R}^3$ можемо испитати преко детерминанте која ће имати по врстама координате тих вектора:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ вектори $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_3$ су линеарно независни.

б) Како је векторски простор $\mathbb{R}^3$ тродимензионалан, тј. $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, то било која 3 линеарно независна вектора чине базу тог простора. Стога, вектори $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_3$ чине базу простора $\mathbb{R}^3$.

в) Изразимо вектор $\vec{w}$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_3$:

$$\vec{w} = \alpha \cdot \vec{v}_1 + \beta \cdot \vec{v}_2 + \gamma \cdot \vec{v}_3$$

$$(1, 1, 4) = \alpha \cdot (1, 2, -3) + \beta \cdot (-2, -3, 0) + \gamma \cdot (3, 4, 2)$$

$$(1, 1, 4) = (\alpha - 2\beta + 3\gamma, 2\alpha - 3\beta + 4\gamma, -3\alpha + 2\gamma)$$

Ова једначина је еквивалентна са системом

$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha & - & 2\beta & + & 3\gamma & = & 1 \\ 2\alpha & - & 3\beta & + & 4\gamma & = & 1 \\ -3\alpha & & & + & 2\gamma & = & 4 \end{array}$$

који има јединствено решење $a = -2$, $b = -3$, $c = -1$. Тиме смо добили да је

$$\vec{w} = -2\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2 - \vec{v}_3.$$

Г Решења I колоквијума из Математике 1 Г

1. Затвореност важи:

$$\begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m & 0 & p \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} am & 0 & ap+cm \\ 0 & bn & 0 \\ 0 & 0 & am \end{bmatrix} \in \mathcal{M}$$

јер $a > 0, m > 0 \;\Rightarrow\; am > 0$, $b > 0, n > 0 \;\Rightarrow\; bn > 0$ и $a > 0, m > 0, c \geqslant 0, p \geqslant 0 \;\Rightarrow\; ap + cm \geqslant 0$.

Асоцијативност се преноси (како је множење матрица асоцијативна операција у скупу Ω свих матрица облика 3×3 са реалним елементима то је множење матрица асоцијативно и у скупу $\mathcal{M} \subset \Omega$).

Неутрални елемент ће бити јединична матрица $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}$ (за $a = b = 1$ и $c = 0$).

Инверзни елемент не постоји увек!

Нека је инверзни елемент за матрицу $\begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ матрица $\begin{bmatrix} m & 0 & p \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$. Тада треба да важи

$$\begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m & 0 & p \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} am & 0 & ap+cm \\ 0 & bn & 0 \\ 0 & 0 & am \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

одакле добијамо да је $m = \frac{1}{a}$, $n = \frac{1}{b}$ и $ap + cm = 0$, тј. $ap + c \cdot \frac{1}{a} = 0 \Rightarrow p = \frac{-c}{a^2}$. Али тада кад је $c \neq 0$ (тј. $c > 0$) за p не важи услов $p \geqslant 0$.

Дакле, за све матрице код којих је $c > 0$ не постоји инверзан елемент који припада скупу $\mathcal{M}$.

Комутативност важи (иако генерално множење матрица није комутативна операција у скупу $\mathcal{M}$ јесте!):

$$\begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m & 0 & p \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} am & 0 & ap+cm \\ 0 & bn & 0 \\ 0 & 0 & am \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ma & 0 & mc+pa \\ 0 & nb & 0 \\ 0 & 0 & ma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 & p \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

(овде смо користили комутативност операција $+$ и $\cdot$ у $\mathbb{R}$).

На основу свега изложеног добијамо да структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ није група, те није ни Абелова група.
Ова структура је комутативан моноид.

2. Ово је систем од 4 једначине са 3 непознате, па га морамо решавати Гаусовим системом елиминације.

$$\begin{array}{rcrcrcll} x & - & 3y & + & z & = & 2 & \\ x & - & 2y & - & 2z & = & 3 & \mathrm{II} - \mathrm{I} \\ 3x & - & 10y & + & 6z & = & 5 & \mathrm{III} - 3 \cdot \mathrm{I} \\ -2x & + & 3y & + & 7z & = & \gamma & \mathrm{IV} + 2 \cdot \mathrm{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x & - & 3y & + & z & = & 2 & \\ & & y & - & 3z & = & 1 & \\ & - & y & + & 3z & = & -1 & \mathrm{III} + \mathrm{II} \\ & - & 3y & + & 9z & = & \gamma + 4 & \mathrm{IV} + 3 \cdot \mathrm{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & z & = & 2 \\ & & y & - & 3z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & \gamma + 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & z & = & 2 \\ & & y & - & 3z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & \gamma+7 \end{array}$$

Сада овде имамо 2 случаја у зависности какво је γ.

- За $\gamma \neq -7$ систем нема решења.
- За $\gamma = -7$ последња једначина постаје $0 = 0$ и њу можемо избрисати па се систем свео на

  $$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & z & = & 2 \\ & & y & - & 3z & = & 1 \end{array}$$

  Ово је систем у степенастом облику, па су x и y везане променљиве, а z је слободна, те можемо узети да је $z = t$, $t \in \mathbb{R}$.

  Враћањем уназад добијамо да је $y = 1 + 3t$ и $x = 5 + 8t$. Стога у овом случају имамо вишеструко решење које зависи од 1 параметра: $(x, y, z) = (5 + 8t, 1 + 3t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

3. $\alpha\colon x + 2y - z + 2 = 0$ и $\beta\colon 2x + 3y + z = 0$.

а) Њихове векторе нормала су $\vec{n}_\alpha = (1, 2, -1)$ и $\vec{n}_\beta = (2, 3, 1)$.

б) Произвољну тачку $A \in \alpha$ добијамо када у једначини равни $\alpha\colon x + 2y - z + 2 = 0$ узмемо 2 координате произвољно и онда израчунамо трећу. Нпр. $y = z = 0 \Rightarrow x = -2$, па је $A(-2, 0, 0)$.

Слично из $\beta\colon 2x + 3y + z = 0$ за $y = z = 0 \Rightarrow x = 0$, па добијамо $B(0, 0, 0)$.

в) Како вектори равни нису колинеарни, тј. важи $\vec{n}_\beta \neq k \cdot \vec{n}_\alpha$ добијамо да се равни α и β секу.

г) Равни α и β се секу по правој p. Њу добијамо када решимо слстем

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & 2y & - & z & = & -2 & \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 0 & \mathrm{II} - 2\cdot\mathrm{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & -2 \\ & - & y & + & 3z & = & 4 \end{array}$$

Ово је систем у степенастом облику, па су x и y везане променљиве, а z је слободна, те можемо узети да је $z = t$, $t \in \mathbb{R}$.

Враћањем уназад добијамо да је $y = -4 + 3t$ и $x = 6 - 5t$. Једначина праве p у параметарском облику је

$$x = 6 - 5t, \quad y = -4 + 3t, \quad z = t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

а одавде добијамо и канонски облик

$$p\colon \frac{x-6}{-5} = \frac{y+4}{3} = \frac{z}{1}\,.$$

Њен вектор правца је $\vec{v}_p = (-5, 3, 1)$ и једна тачка $P(6, -4, 0)$.

Решења I колоквијума из Математике 1

Д

1. Затвореност важи:

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\ a & 3a\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 0\\ b & 3b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 3ab & 9ab\end{bmatrix}\in\mathcal{M}$$

јер $a\neq 0, b\neq 0 \ \Rightarrow\ 3ab\neq 0$ и $a,b\in\mathbb{R}\ \Rightarrow\ 3ab\in\mathbb{R}$.

Ради краћег записа можемо означити $M(a)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ a & 3a\end{bmatrix}$ и онда пишемо $M(a)\cdot M(b)=M(3ab)$.

Асоцијативност се преноси (како је множење матрица асоцијативна операција у скупу Ω свих матрица облика 2×2 са реалним елементима то је множење матрица асоцијативно и у скупу $\mathcal{M}\subset\Omega$).

Неутрални елемент овде неће бити јединична матрица јер $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\notin\mathcal{M}$, али то не значи да ова структура нема неутрални елемент. Нека је $M(x)$ неутрални елемент. Тада треба да важи

$$M(a)\cdot M(x)=M(3ax)=M(a)\qquad \text{за свако } a\in\mathbb{Q}\setminus\{0\},$$

одакле добијамо да је $x=\frac{1}{3}$, тј. неутрални елемент је матрица $M(\frac{1}{3})=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \frac{1}{3} & 1\end{bmatrix}\in\mathcal{M}$ $\big($провером видимо да важи и једнакост $M(\frac{1}{3})\cdot M(a)=M(a)$, па видимо да матрица $M(\frac{1}{3})$ задовољава оба услова која треба да важе за неутрални елемент).

Инверзни елемент није инверзна матрица! Један разлог је што неутрални елемент није јединична матрица I, а други је што за матрице $M(a)$ не постоји иверзна матрица (зашто?).

Инверзни елемент за матрицу $M(a)$ ће бити матрица $M(y)$ и њу тражимо из једначине

$$M(a)\cdot M(y)=M(3ay)=M(\tfrac{1}{3}),$$

одакле добијамо да је $y=\frac{1}{9a}$, тј. да је $M(\frac{1}{9a})\in\mathcal{M}$ инверзни елемент матрице $M(a)$ $\big($приметимо да важи и $M(\frac{1}{9a})\cdot M(a)=M(\frac{1}{3})$, па $M(\frac{1}{9a})$ задовољава оба услова потребна за инверзни елемент$\big)$.

Комутативност важи (иако генерално множење матрица није комутативна операција у скупу $\mathcal{M}$ јесте!):

$$M(a)\cdot M(b)=M(3ab)=M(3ba)=M(b)\cdot M(a)$$

(овде смо користили комутативност и асоцијативност операције $\cdot$ у $\mathbb{R}$).

На основу свега изложеног добијамо да је структура $(\mathcal{M},\cdot)$ група и то Абелова група.

2. Ово је систем од 3 једначине са 4 непознате, па га морамо решавати Гаусовим системом елиминације.

$$\begin{array}{rcrcrcrcll}
x & + & y & + & z & + & w & = & 2 & \\
3x & + & y & + & 2z & + & w & = & 7 & \mathrm{II}-3\cdot\mathrm{I}\\
-x & + & y & & & + & w & = & \delta & \mathrm{III}+\cdot\mathrm{I}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcll}
x & + & y & + & z & + & w & = & 2 & \\
 & - & 2y & - & z & - & 2w & = & 1 & \\
 & & 2y & + & z & + & 2w & = & \delta+2 & \mathrm{III}+\mathrm{II}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
x & + & y & + & z & + & w & = & 2\\
 & - & 2y & - & z & - & 2w & = & 1\\
 & & & & & & 0 & = & \delta+3
\end{array}$$

Сада овде имамо 2 случаја у зависности какво је δ.

- За $\delta\neq -3$ систем нема решења.

- За $\delta = -3$ последња једначина постаје $0=0$ и њу можемо избрисати па се систем свео на

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & + & w & = & 2 \\ & - & 2y & - & z & - & 2w & = & 1 \end{array}$$

  Ово је систем у степенастом облику, па су x и y везане променљиве, а z и w је слободне, те можемо узети да је $z=t$ и $w=p$, $t,p\in\mathbb{R}$.

  Враћањем уназад добијамо да је $y=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t-p$ и $x=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}t$. Стога у овом случају имамо вишеструко решење које зависи од 2 параметра: $(x,y,z,w)=(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}t,-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t-p,t,p)$, $t,p\in\mathbb{R}$.

3. $A(-3,1,-3)$, $B(1,2,0)$, $C(-7,-1,-6)$ и $D(7,2,-3)$.

а) Једначину равни α која пролази кроз тачке A, B и C дата је формулом

$$\begin{vmatrix} x-(-3) & y-1 & z-(-3) \\ 1-(-3) & 2-1 & 0-(-3) \\ -7-(-3) & -1-1 & -6-(-3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+3 & y-1 & z+3 \\ 4 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 3x-4z-3=0.$$

б) Вектор нормале равни α је $\vec{n}_\alpha=(3,0,-4)$.

в) Да би одредити произвољну тачку $M\in\alpha$, различиту од задатих тачака фиксираћемо 2 координате и из једначине равни $\alpha\colon 3x-4z-3=0$ одредићемо трећу, нпр. $y=z=0 \;\Rightarrow x=1$, тј. $M(1,0,0)$.

г) Површину троугла $\triangle ABC$ тражимо по формули

$$P_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & -3 \end{vmatrix}|=\frac{1}{2}|(3,0,-4)|=\frac{1}{2}\sqrt{3^2+0^2+(-4)^2}=\frac{5}{2}.$$

д) Запремину пирамиде $ABCD$ тражимо по формули

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]|=\frac{1}{6}|\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & -3 \\ 10 & 1 & 0 \end{vmatrix}|=\frac{1}{6}|-30|=5.$$

е) <u>I начин</u>: Како је запремина пирамиде дата и формулом $V_{ABCD}=\frac{P_{\triangle ABC}\cdot h_D}{3}$ дужину висине пирамиде h_D добијамо као

$$h_D=\frac{3V_{ABCD}}{P_{\triangle ABC}}=\frac{15}{5/2}=6.$$

<u>II начин</u>: Дужина висине пирамиде h_D из темена $D(7,2,-3)$ је једнака растојању тачке од D до равни $\alpha\colon 3x-4z-3=0$ (то је раван која садржи тачке A, B и C и коју смо одредили у делу под а):

$$h_D=d(D,\alpha)=\frac{|3\cdot 7-4\cdot(-3)-3|}{\sqrt{3^2+0^2+(-4)^2}}=\frac{30}{5}=6.$$

E Решења I колоквијума из Математике 1 E

1. Прво појаснимо шта значи услов $a^2 + b^2 \neq 0 \ \Rightarrow \ (a, b) \neq (0, 0)$.

Затвореност важи:

$$(a + b \cdot \sqrt{3}) \cdot (c + d \cdot \sqrt{3}) = (ac + 3bd) + (ad + bc) \cdot \sqrt{3}$$

(овде смо користили особине асоцијативности, комутативности и дистрибутивности операција $+$ и $\cdot$ у $\mathbb{R}$). Треба још да покажемо да је $(ac+3bd)+(ad+bc)\cdot\sqrt{3} \in S$, а то се своди на то да је $(ac+3bd, ad+bc) \neq (0, 0)$.

Претпоставимо супротно да је $(ac + 3bd, ad + bc) = (0, 0)$. Због комутативности имамо да је $ad + bc = bc + ad$. Посматрајмо систем $\begin{array}{rcrl} a \cdot c & + & 3b \cdot d & = 0 \\ b \cdot c & + & a \cdot d & = 0. \end{array}$ Да би овај хомоген систем (по промењљивим c и d) имао нетривијално решење (тривијално решење је $c = d = 0$) потребно је да му је детерминанта $\Delta = a^2 - 3b^2 = 0$. Како из услова $a + b\sqrt{3} \in S \ \Rightarrow \ (a, b) \neq (0, 0)$ то важи $a \neq 0$ и $b \neq 0$ (уколико би један од a и b био једнак 0 из $a^2 - 3b^2 = 0$ би следило да је и други). Али тада имамо да је $\frac{a^2}{b^2} = 3 \Rightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{3}$ или $\frac{a}{b} = -\sqrt{3}$ што је немогуће јер $a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$.

Како смо добили контрадикцију полазна претпоставка $(ac + 3bd, ad + bc) = (0, 0)$ не ваља, те важи $(ac + 3bd, ad + bc) \neq (0, 0)$, чиме смо показали да је $(ac + 3bd, ad + bc) \in S$.

Асоцијативност се преноси (како је множење реалних бројева асоцијативна операција у скупу $\mathbb{R}$ то је множење асоцијативно и у скупу $S \subset \mathbb{R}$).

Неутрални елемент је број $e = 1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{3} \in S$.

Инверзни елемент броја $x + y\sqrt{3}$ је број

$$\frac{1}{x + y\sqrt{3}} = \frac{1}{x + y\sqrt{3}} \cdot \frac{x - y\sqrt{3}}{x - y\sqrt{3}} = \frac{x - y\sqrt{3}}{x^2 - 3y^2} = \frac{x}{x^2 - 3y^2} + \frac{-y}{x^2 - 3y^2} \cdot \sqrt{3} \in S$$

јер из $x, y \in \mathbb{Q} \ \Rightarrow \ x^2 - 3y^2 \neq 0$, а из $(x, y) \neq (0, 0) \ \Rightarrow \ (\frac{x}{x^2-3y^2}, \frac{-y}{x^2-3y^2}) \neq (0, 0)$.

Комутативност се преноси (како је множење реалних бројева комутативна операција у скупу $\mathbb{R}$ то је множење комутативно и у скупу $S \subset \mathbb{R}$).

На основу свега изложеног добијамо да је структура $(S, \cdot)$ група и то Абелова група.

2. Ово је систем од 3 једначине са 4 непознате, па га морамо решавати Гаусовим системом елиминације.

$$\begin{array}{rcrcrcrcll}
x & - & y & + & 3z & + & 3u & = & 1 & \\
3x & + & 4y & + & 6z & + & (2e+1)u & = & \varepsilon^2 + 2 & \mathrm{II} - 3 \cdot \mathrm{I} \\
2x & + & 5y & + & (e-1)z & + & 6u & = & 5 & \mathrm{III} - 2 \cdot \mathrm{I}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcll}
x & - & y & + & 3z & + & 3u & = & 1 & \\
 & & 7y & - & 3z & + & (2e-8)u & = & \varepsilon^2 - 1 & \\
 & & 7y & + & (e-7)z & & & = & 3 & \mathrm{III} - \mathrm{I}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
x & - & y & + & 3z & + & 3u & = & 1 \\
 & & 7y & - & 3z & + & (2e-8)u & = & \varepsilon^2 - 1 \\
 & & & & (e-4)z & - & 2(e-4)u & = & 4 - \varepsilon^2
\end{array}$$

Сада овде имамо 3 случаја у зависности какви су e и ε.

- За $e \neq 4$ систем је у степенастом облику, па су x, y и z везане промењљиве, а u је слободна, те можемо узети да је $u = t$, $t \in \mathbb{R}$.
  Враћањем уназад добијамо да је $z = -2t + \frac{\varepsilon^2-4}{e-4} = \frac{4-8t+2et-\varepsilon^2}{e-4}$, $y = \frac{-16+e+56t-22et+7\varepsilon^2+2e^2t-e\varepsilon^2}{7(4-e)}$ и $x = \frac{96-6e-196t+41et-14\varepsilon^2+2e^2t-e\varepsilon^2}{7(4-e)}$. Стога у овом случају имамо вишеструко решење које зависи од 1 параметра: $(x, y, z, w) = (\frac{96-6e-196t+41et-14\varepsilon^2+2e^2t-e\varepsilon^2}{7(4-e)}, \frac{-16+e+56t-22et+7\varepsilon^2+2e^2t-e\varepsilon^2}{7(4-e)}, -2t + \frac{\varepsilon^2-4}{e-4}, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

- За $e = 4$ и $\varepsilon \neq \pm 2$ систем нема решења.
- За $e = 4$ и $\varepsilon = 2$ (или $\varepsilon = -2$) последња једначина постаје $0 = 0$ и њу можемо избрисати па се систем свео на

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & 3z & + & 3u & = & 1 \\ & & 7y & - & 3z & & & = & 3 \end{array}$$

  Ово је систем у степенастом облику, па су x и y везане променљиве, а z и u су слободне, те можемо узети да је $z = t$ и $w = p$, $t, p \in \mathbb{R}$.

  Враћањем уназад добијамо да је $y = \frac{3}{7} + \frac{3}{7}t$ и $x = \frac{10}{7} - \frac{18}{7}t - 3p$. Стога у овом случају имамо вишеструко решење које зависи од 2 параметра: $(x, y, z, w) = (\frac{10}{7} - \frac{18}{7}t - 3p, \frac{3}{7} + \frac{3}{7}t, t, p)$, $t, p \in \mathbb{R}$.

3. $A(1, -2, 3)$, $B(0, 2, 2)$, $C(5, 0, 1)$ и $D(1, 4, 1)$.

а) Једначину равни α која пролази кроз тачке A, B и C дата је формулом

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-(-2) & z-3 \\ 0-1 & 2-(-2) & 2-3 \\ 5-1 & 0-(-2) & 1-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ -1 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -6x - 6y - 18z + 48 = 0.$$

Уместо ове једначине можемо узети и ону која се добија када претходну поделимо са -6. То је $\alpha\colon x + y + 3z - 8 = 0$.

б) Вектор нормале равни α је $\vec{n}_\alpha = (1, 1, 3)$.

в) Да би проверили да ли тачка D припада равни α потребно је да видимо да ли њене координате задовољавају једначину равни $\alpha\colon x + y + 3z - 16 = 0$:

$$1 + 4 + 3 \cdot 1 - 8 = 0,$$

па тачка D припада равни α.

г) За вектор правца праве p кроз A и B можемо узети $\vec{v}_p = \overrightarrow{AB} = \big(0 - 1, 2 - (-2), 2 - 3\big) = (-1, 4, -1)$, а за тачку са те праве узимамо $A(1, -2, 3)$, па је једначина праве p у канонском облику

$$p\colon \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{-1},$$

а одавде добијамо и параметарски облик $p\colon x = 1 - t$, $y = -2 + 4t$, $z = 3 - t$, $\quad t \in \mathbb{R}$.

д) Слично за праву q кроз C и D добијамо

$$q\colon \frac{x-5}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{0},$$

односно у параметарском облику $q\colon x = 5 - s$, $y = s$, $z = 1$, $\quad s \in \mathbb{R}$.

е) <u>I начин</u>: Праве p и q нису паралелне јер им вектори праваца $\vec{v}_p = (-1, 4, -1)$ и $\vec{v}_q = (-1, 1, 0)$ нису пропорционални.

Са тих правих имамо и по једну тачку $A(1, -2, 3) \in p$ и $C(5, 0, 1) \in q$. Како је

$$\begin{vmatrix} 1-5 & -2-0 & 3-1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

непаралелне праве p и q се секу.

<u>II начин</u>: Нађимо пресек праве p и q, тј. решимо систем (по параметрима t и s):

$$x = 1 - t = 5 - s, \qquad y = -2 + 4t = s, \qquad z = 3 - t = 1.$$

Како овај систем има јединствено решење $t = 2$, $s = 6$ добијамо да се дате праве секу. Овим поступком смо одредили и пресечну тачку T праве p и q (њене координате добијамо када заменимо $t = 2$ или $s = 6$ у параметарски облик одговарајуће праве) — то је $T(-1, 6, 1)$.

К Решења I колоквијума из Математике 1 К

1. Затвореност важи:

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & 0 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ n & m & 0 \\ p & 0 & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} am & 0 & 0 \\ bm+an & am & 0 \\ cm+ap & 0 & am \end{bmatrix} \in \mathcal{M}$$

јер $a \neq 0, m \neq 0 \ \Rightarrow \ am \neq 0$ и $a, b, c \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ am, bm+an, cm+ap \in \mathbb{R}$.

Асоцијативност се преноси (како је множење матрица асоцијативна операција у скупу Ω свих матрица облика 3×3 са реалним елементима то је множење матрица асоцијативно и у скупу $\mathcal{M} \subset \Omega$).

Неутрални елемент ће бити јединична матрица $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}$ (за $a = 1$ и $b = c = 0$).

Инверзни елемент. Нека је инверзни елемент матрице $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & 0 & a \end{bmatrix}$ матрица $\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ n & m & 0 \\ p & 0 & m \end{bmatrix}$. Треба да важи

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & 0 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ n & m & 0 \\ p & 0 & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} am & 0 & 0 \\ bm+an & am & 0 \\ cm+ap & 0 & am \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

одакле добијамо да је $am = 1$, $bm + an = 0$, $cm + ap = 0$. Одатле добијамо $m = \frac{1}{a}$, кад то уврстимо у $bm + an = b \cdot \frac{1}{a} + an = 0$ добијамо $n = \frac{-b}{a^2}$ и кад уврстимо у $cm + ap = c \cdot \frac{1}{a} + ap = 0$ добијамо $p = \frac{-c}{a^2}$.
Дакле, инверзни елемент матрице $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & 0 & a \end{bmatrix}$ је матрица $\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ \frac{-b}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \\ \frac{-c}{a^2} & 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$.

Ову матрицу за инверзни елемент смо могли да добијемо и стандардним поступком тражења инверзне матрице!

Комутативност важи (иако генерално множење матрица није комутативна операција у скупу $\mathcal{M}$ јесте!):

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & 0 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ n & m & 0 \\ p & 0 & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} am & 0 & 0 \\ bm+an & am & 0 \\ cm+ap & 0 & am \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ma & 0 & 0 \\ na+mb & ma & 0 \\ pa+mc & 0 & ma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ n & m & 0 \\ p & 0 & m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & 0 & a \end{bmatrix}$$

(овде смо користили комутативност операција $+$ и $\cdot$ у $\mathbb{R}$).

На основу свега изложеног добијамо да је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ група и то Абелова група.

2. Ово је систем од 4 једначине са 3 непознате, па га морамо решавати Гаусовим системом елиминације. Користићемо матрични запис (тј. Кронекер-Капелијеву теорему) и одредићемо ранг матрице система A и ранг проширене матрице система B.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \\ 3 & -10 & 6 & k \\ -2 & 3 & 7 & m \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \mathrm{II} - \mathrm{I} \\ \mathrm{III} - 3 \cdot \mathrm{I} \\ \mathrm{IV} + 2 \cdot \mathrm{I} \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & k-6 \\ 0 & -3 & 9 & m+4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{III} + \mathrm{II} \\ \mathrm{IV} + 3 \cdot \mathrm{II} \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-5 \\ 0 & 0 & 0 & m+7 \end{array}\right]$$

Сада овде имамо 2 случаја у зависности од k и m.

- Када је $k \neq 5$ или када је $m \neq -7$ имамо да је $r(B) > r(A) = 2$, те систем нема решења.
- Када је $k = 5$ и $m = -7$ имамо да је $r(B) = r(A) = 2$ па систем има решења која зависе од $n - r(a) = 3 - 2 = 1$ параметра. Последњој матрици одговара систем

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & z & = & 2 \\ & & y & - & 3z & = & 1 \end{array}$$

Ово је систем у степенастом облику, па су x и y везане променљиве, а z је слободна, те можемо узети да је $z = t$, $t \in \mathbb{R}$.

Враћањем уназад добијамо да је $y = 1 + 3t$ и $x = 5 + 8t$. Стога у овом случају имамо вишеструко решење које зависи од 1 параметра: $(x, y, z) = (5 + 8t, 1 + 3t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

3. $a\colon \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ -x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$ и $\beta\colon 2x + 2y - z + 7 = 0$.

а) Потребно је да праву a која је дата као пресек 2 равни представимо у параметарском (или канонском облику). До параметарског облика долазимо решавањем система

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & y & + & z & = & 1 & \\ -x & - & 2y & - & 2z & = & 0 & \mathrm{II} + \mathrm{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & - & y & - & z & = & 1 \end{array}$$

Ово је систем у степенастом облику, па су x и y везане променљиве, а z је слободна, те можемо узети да је $z = t$, $t \in \mathbb{R}$.

Враћањем уназад добијамо да је $y = -1 - t$ и $x = 2$. Једначина праве p у параметарском облику је

$$x = 2, \quad y = -1 - t, \quad z = t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

а одавде добијамо и канонски облик

$$a\colon \frac{x - 2}{0} = \frac{y + 1}{-1} = \frac{z}{1}\,.$$

Њен вектор правца је $\vec{v}_a = (0, -1, 1)$.

б) Тачку $A \in a$ одређујемо из канонског или параметарског облика (кад заменимо нпр. $t = 0$) — $A(2, -1, 0)$.

Произвољну тачку $B \in \beta$ добијамо када у једначини равни β узмемо 2 координате произвољно и онда израчунамо трећу. Нпр. $x = y = 0 \Rightarrow z = 0$, па је $B(0, 0, 7)$.

в) Вектор нормале равни β је $\vec{n}_\beta = (2, 2, -1)$.

г) Како је $\vec{v}_a \cdot \vec{n}_\beta = (0, -1, 1) \cdot (2, 2, -1) = 0 - 2 - 1 = -3 \neq 0$ добијамо да се права a и раван β секу.

д) Пресек праве a и равни β добијамо када парематарски облик једначине праве $a\colon x = 2,\ y = -1 - t,\ z = t$, добијен у делу под а), заменимо у једначину равни $\beta\colon 2x + 2y - z + 7 = 0$:

$$2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1 - t) - t + 7 = -3t + 9 = 0,$$

па за пресечну тачку P је $t = 3$, тј. добијамо да је $P(2, -4, 3)$.

е) Величину угла φ између праве a и равни β рачунамо по следећој формули

$$\sin \sphericalangle(a, \beta) = \frac{|\vec{v}_a \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{v}_a| \cdot |\vec{n}_\beta|} = \frac{3}{\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Како је $\sin \sphericalangle(a, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ добијамо да је $\sphericalangle(a, \beta) = 45^\circ$ (или $\sphericalangle(a, \beta) = \frac{\pi}{4}$).

Л Решења I колоквијума из Математике 1 Л

1. Прво појаснимо шта значи услов $a^2+b^2 \neq 0 \;\Rightarrow\; (a,b) \neq (0,0)$.

Затвореност важи:

$$(a,b,c)\circ(m,n,p) = (am, b+n, ap+bm+cn) \in X$$

јер $a \neq 0, m \neq 0 \;\Rightarrow\; am \neq 0$ и $a,b,c,m,n,p \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; am, b+n, ap+bm+cn \in \mathbb{R}$.

Асоцијативност не важи! Нпр.

$$(1,2,3)\circ\big((1,0,0)\circ(2,2,2)\big) = (1,2,3)\circ(1\cdot 2, 0+2, 1\cdot 2+0\cdot 2+0\cdot 2) = (1,2,3)\circ(2,2,2) = (2,4,12)$$

$$\big((1,2,3)\circ(1,0,0)\big)\circ(2,2,2) = (1\cdot 1, 2+0, 1\cdot 0+2\cdot 1+3\cdot 0)\circ(2,2,2) = (1,2,2)\circ(2,2,2) = (2,4,10)$$

па важи $(1,2,3)\circ\big((1,0,0)\circ(2,2,2)\big) \neq \big((1,2,3)\circ(1,0,0)\big)\circ(2,2,2)$, те операција $\circ$ није асоцијативна у скупу X.

Неутрални елемент не постоји! Претпоставимо да је $(m,n,p) \in X$ неутрални елемент. Требало би да важи

$$(a,b,c)\circ(m,n,p) = (am, b+n, ap+bm+cn) = (a,b,c).$$

Тада добијамо систем $am = a$, $b+n = b$ и $ap+bm+cn = c$. Из прве две једначине добијамо $m=1$ и $n=0$, што кад заменимо у трећу даје $ap+b=c$, одакле би добили да p зависи од a,b,c што не може!

Инверзни елемент не постоји јер немамо ни неутрални елемент.

Комутативност не важи! Нпр.

$$(1,2,3)\circ(1,0,0) = (1\cdot 1, 2+0, 1\cdot 0+2\cdot 1+3\cdot 0) = (1,2,2) \neq (1,0,0)\circ(1,2,3) = (1\cdot 1, 0+2, 1\cdot 3+0\cdot 1+0\cdot 2) = (1,2,3).$$

На основу свега изложеног добијамо да структура $(X,\circ)$ није група, те није ни Абелова група.
Ова структура је групоид.

2. I начин: преко детерминанти.

$\Delta = 4(1-\lambda)$, $\Delta_x = -2\lambda^2+2\ell\lambda+2\lambda-2\ell$, $\Delta_y = \lambda^2-3\ell\lambda+3\lambda-3\ell$, $\Delta_z = 8\lambda-12\ell$.

За $\lambda = 1$ је $\Delta = 0$, а $\Delta_x = -2+2\ell+2-2\ell = 0$, $\Delta_y = 1-3\ell+3-3\ell = 4-6\ell$, $\Delta_z = 8\lambda-12\ell = 8-12\ell$. Сада смо спремни да уђемо у дискусију по случајевима.

- За $\lambda = 1$ и $\ell \neq \frac{2}{3}$ имамо да је $\Delta = 0$ и $\Delta_y \neq 0$, па систем нема решења.
- За $\lambda = 1$ и $\ell = \frac{2}{3}$ је $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, па у овом случају до решења морамо ићи Гаусовим системом елиминације.

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
x & + & 2y & - & z & = & \frac{2}{3} & \\
3x & + & 2y & - & z & = & 1 & \mathrm{II}-3\cdot\mathrm{I} \\
-3x & - & 2y & + & z & = & 0 & \mathrm{III}+3\cdot\mathrm{I}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
x & + & 2y & - & z & = & \frac{2}{3} & \\
 & - & 4y & + & 2z & = & -1 & \\
 & & 4y & - & 2z & = & 2 & \mathrm{III}+\mathrm{II}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x & + & 2y & - & z & = & \frac{2}{3} \\
 & - & 4y & + & 2z & = & -1 \\
 & & & & 0 & = & 1
\end{array}$$

  Због последње једначине добијамо да и у овом случају систем нема решења.

- За $\lambda \neq 1$ је $\Delta \neq 0$ па систем има јединствено решење које добијамо из Крамерових формула: $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$ и $z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$. У овом случају решење је $(x,y,z) = (\frac{\lambda-\ell}{2}, \frac{\lambda^2-3\lambda-3\ell\lambda+3\ell}{4(1-\lambda)}, \frac{\lambda}{\lambda-1})$.

II начин: Гаусовим системом елиминације.

$$\begin{array}{rcrcrcll}
x & + & 2y & - & z & = & \ell & \\
3x & + & 2y & - & z & = & \lambda & \mathrm{II}-3\cdot\mathrm{I} \\
-3x & - & 2y & + & \lambda z & = & 0 & \mathrm{III}+3\cdot\mathrm{I}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcll}
x & + & 2y & - & z & = & \ell & \\
 & - & 4y & + & 2z & = & \lambda-3\ell & \\
 & & 4y & + & (\lambda-3)z & = & 3\ell & \mathrm{III}+\mathrm{II}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcl}
x & + & 2y & - & z & = & \ell \\
 & - & 4y & + & 2z & = & \lambda-3\ell \\
 & & & & (\lambda-1)z & = & \lambda
\end{array}$$

За $\lambda=1$ последња једначина је једнака $0=1$, па у овом случају систем нема решења, док за $\lambda\neq 1$ систем у степенастом облику има 3 једначине, па су све променљиве x,y,z везане, те систем има јединствено решење. Враћањем уназад добијамо решење $(x,y,z)=(\frac{\lambda-\ell}{2},\frac{\lambda^2-3\lambda-3\ell\lambda+3\ell}{4(1-\lambda)},\frac{\lambda}{\lambda-1})$.

Коначан закључак је:

- За $\lambda\neq 1$ систем нема решења.
- За $\lambda=1$ систем има јединствено решење: $(x,y,z)=(\frac{\lambda-\ell}{2},\frac{\lambda^2-3\lambda-3\ell\lambda+3\ell}{4(1-\lambda)},\frac{\lambda}{\lambda-1})$.

3. $q\colon \dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+4}{3}$ и $\pi\colon 2x+10y-2z-5=0$.

а) Вектор правца $\vec{v}_q$ праве q је $\vec{v}_q=(-2,1,3)$.

б) Из канонског облика праве q добијамо тачку $Q(-2,1,-4)$.

Произвољну тачку $P\in\pi$ добијамо када у једначини равни π узмемо 2 координате произвољно и онда израчунамо трећу. Нпр. $y=z=0\Rightarrow x=\frac{5}{2}$, па је $P(\frac{5}{2},0,0)$.

в) Вектор нормале $\vec{n}_\pi$ равни π је $\vec{n}_\pi=(2,10,-2)$.

г) Како је $\vec{v}_q\cdot\vec{n}_\pi=(-2,1,3)\cdot(2,10,-2)=-4+10-6=0$ добијамо да је $\vec{v}_q\perp\vec{n}_\pi$ (на основу овога следи да су права q и раван π или паралелне или права q лежи у равни π). Проверимо још да ли произвољна тачка $Q(-2,1,-4)$ са праве q припада равни $\pi\colon 2x+10y-2z-5=0$. Како је

$$2\cdot(-2)+10\cdot 1-2\cdot(-4)-5=-4+10+8-5=9\neq 0$$

добијамо да $Q\notin\pi$.

На основу свега овога закључујемо да је $q\parallel\pi$.

д) Растојање тачке $Q(-2,1,-4)$ до равни $\pi\colon 2x+10y-2z-5=0$ тражимо по формули:

$$d(Q,\pi)=\frac{|2\cdot(-2)+10\cdot 1-2\cdot(-4)-5|}{\sqrt{2^2+10^2+(-2)^2}}=\frac{|9|}{\sqrt{108}}=\frac{9}{6\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

е) У делу под г) смо добили да је $\vec{v}_q\cdot\vec{n}_\pi=0$, тј. $\vec{v}_q\perp\vec{n}_\pi$, па је угао између вектора $\vec{v}_q$ и $\vec{n}_\pi$ једнак 90° (или $\frac{\pi}{2}$ ко више воли радијане).