МАТЕМАТИКА 1

2. Колоквијум, јануар 2008 - Група Д

1. Дат је низ (a_n) где је $a_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-7n+12}$.

1. Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
2. Да ли је низ (a_n) конвергентан?
3. Да ли је низ (a_n) монотон?
4. Да ли је низ (a_n) ограничен?

Решење: 1. Како је за $n \to \infty$

$$\begin{aligned} a_n &= n\left(1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{1/2} - n\left(1-\frac{7}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{1/2} \\ &= n\left(1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - n\left(1-\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{7}{2}+o(1), \end{aligned}$$

то је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 7/2$. Наравно, ово може да се добије и средњошколском техником, али је добра прилика и да се покаже знање из Математике 1.

2. Да, јер $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ постоји у R (видети дефиницију конвергентног низа).

3. Нека је $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-7x+12}$. Како је

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{x^2-7x+12} - (2x-7)\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2-7x+!2}},$$

функција f је опадајућа ако је

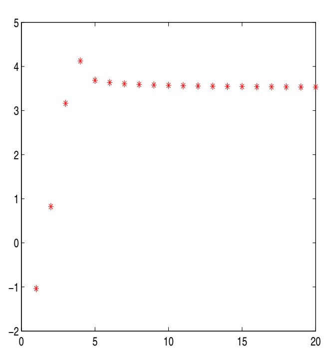
$$2x\sqrt{x^2-7x+12} < (2x-7)\sqrt{x^2+1}.$$

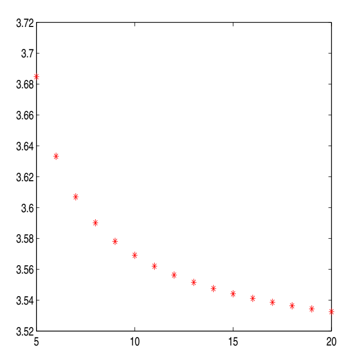
За $x > 4$ ова неједнакост је еквивалнтна са тачном неједнакошћу

$$0 < 7x^2 - 4x + 7.$$

Према томе, функција f је опадајућа за $x > 4$. Обзиром да је $a_n = f(n)$, то је и низ (a_n) опадајући за $n > 4$.

На следећим сликама је дат график низа (a_n) (на графику лево су све вредности низа, а на графику десно за $n > 4$).





4. Да, јер је конвергентан низ ограничен (теорема са предавања).

2. Дата је функција $g(x) = \ln(1+\sin x)$.

1. Одредити диференцијал dg.
2. Одредити Маклоренов полином трећег степена T_3 за функцију g.
3. Да ли је $g(x) \approx x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$ за $x \approx 0$?

Решење: 1. $dg(x) = g'(x)dx = \dfrac{\cos x\, dx}{1+\sin x}$.

2. Како је

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad x \to 0$$

и

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3), \quad t \to 0,$$

то је (када $x \to 0$)

$$\begin{aligned} g(x) &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + o\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \\ &= x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Према томе, $T_3(x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}x^3$.

3. Да, јер је $g(x) \approx T_3(x)$ у некој околини тачке $x = 0$ (мада у задатку није наведено значење симбола $\approx$).

Напомена. Полином T_3 није једина функција која апроксимира g у околини нуле. На пример, важи и $g(x) \approx x - x^2 + x^3$ или $g(x) \approx x$, али и $g(x) \approx 0$ $(= g(0))$ у околини нуле. За случај апроксимације полиномом T_3 можемо да проценимо грешку на задатом интервалу.

3. Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \dfrac{x^2+6x-7}{2-x}$.

Решење: Обзиром да је функција средњошколског нивоа овде се дају само основни подаци.

A) $D_f = R \setminus \{2\}$, $f(x) = 0$ за $x \in \{-7, 1\}$. Права $x = 2$ је вертикална асимптота, при чему

$$\lim_{x\to 2_-} = +\infty, \quad \lim_{x \to 2_+} = -\infty.$$

Права $y = -x - 8$ је коса асимптота и за $x \to -\infty$ и за $x \to +\infty$.

B) Како је $f'(x) = -\dfrac{x^2-4x-5}{(2-x)^2}$, функција расте на интервалима $(-1, 2)$ и $(2, 5)$, а опада на интервалима $(-\infty, -1)$ и $(5, +\infty)$, при чему је

$$f_{\max} = f(5) = -16, \quad f_{\min} = f(-1) = -4.$$

C) Како је $f''(x) = \dfrac{18}{(2-x)^3}$, функција је конвексна на интервалу $(-\infty, 2)$ и конкавна на интервалу $(2, +\infty)$.

Драган Ђорић

МАТЕМАТИКА 1

2. Колоквијум, јануар 2009 - Група Г

1. Испитати конвергенцију низа (a_n) чији је општи члан задат са

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^3-n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3-n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3-n^2+3n}}$$

Решење: Ако је $b_n = \dfrac{3n}{\sqrt[3]{n^3-n^2+3n}}$ и $c_n = \dfrac{3n}{\sqrt[3]{n^3-n^2+1}}$, тада је

(1) $b_n < a_n < c_n$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 3$.

Из (1) и (2) и *теореме о три низа* следи да је низ (a_n) конвергентан и да је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$.

Коментар. Очекивало се да ово буде најлакши задатак. Међутим, изгледа да су многи пропустили *теорему о три низа* (иначе би је свакако препознали - општи члан датог низа је типичан за ту теорему), тако да је само седам студената решило задатак. Има и оних који нису добро пребројали колико општи члан има сабирака.

2. (а) Израчунати $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{cx}-\sqrt{1+2cx}}{x^2}$ где је $c \in R$.

(б) Одредити вредност параметра γ за коју је функција f дефинисана са

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x}-\sqrt{1+4x}}{x^2}, & x \in (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \setminus \{0\} \\ \gamma & , \quad x = 0 \end{cases}$$

непрекидна у тачки $x = 0$.

Решење: (а) Из једнакости

$$e^{cx} = 1 + cx + \frac{c^2}{2}x^2 + o(x^2), \quad (1+2cx)^{1/2} = 1 + cx - \frac{c^2}{2}x^2 + o(x^2)$$

које важе за $x \to 0$ следи

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{cx}-\sqrt{1+2cx}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{c^2x^2+o(x^2)}{x^2} = c^2.$$

(б) Из (а) следи да је $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 4$ (специјални случај за $c = 2$). Према томе, функција f је непрекидна у тачки $x = 0$ ако је $\gamma = 4$ ($\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$).

Коментар. Већи успех у решавању овог задатка су имали они који су користили Маклоренове развоје него они који су користили Лопиталово правило.

3. За функцију $g:\ x \mapsto \arcsin x$

(а) одредити Тејлоров полином $T_3(x)$ (степен 3) у околино тачке $x = 1/2$,

(б) написати остатак $g(x) - T_3(x)$ у Лагранжовом облику.

Решење: (а) Диференцирањем функције g добијамо једнакости

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ , \quad g''(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\ , \quad g'''(x) = \frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{5/2}}$$

из којих налазимо

$$g'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\ , \quad g''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3\sqrt{3}}\ , \quad g'''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{16}{3\sqrt{3}}.$$

Према томе,

$$\begin{aligned} T_3(x) &= g\left(\frac{1}{2}\right) + g'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}g''\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}g'''\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)^3 \\ &= \frac{\pi}{6} + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{8}{9\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3. \end{aligned}$$

(б) Како је

$$g^{(iv)}(x) = 3\frac{x(2x^2+3)}{(1-x^2)^{7/2}},$$

то је

$$R_3(x) = g(x) - T_3(x) = \frac{g^{(iv)}(c)}{4!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{c}{8}\cdot\frac{2c^2+3}{(1-c^2)^{7/2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^4,$$

где је $c = \dfrac{1}{2} + \theta\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$ за неко $\theta \in (0,1)$.

Коментар. Једини озбиљан проблем у решавању овог задатка је био налажење извода функције g. Техника налажења извода ирационалних функција није довољно увежбана! Наравно, има изузетака - на пример, *Вукићевић Катарина*.

4. Испитати ток и скицирати график функције $y(x) = (x+4)\sqrt[3]{x+1}$.

Решење: (1) Из $D_y = R$ следи да не постоји вертикална асимптота, из $y(x) \to +\infty$ када $x \to \pm\infty$ следи да не постоји хоризонтална асимптота и из $\dfrac{y(x)}{x} \sim \sqrt[3]{x}$ када $x \to \pm\infty$ следи да не постоји ни коса асимптота функције y. Нуле функције су $x=-4$ и $x=-1$, функција је негативна на интервалу $(-4,-1)$ и позитивна на $D_y \setminus [-4,-1]$.

(2) Из $y'(x) = \dfrac{4x+7}{3(x+1)^{2/3}}$ следи да је функција опадајућа на $(-\infty, -7/4)$, растућа на $(-7/4, +\infty)$ и да има локални минимум у тачки $x = -7/4$.

(3) Из $y''(x) = \dfrac{2}{9}\cdot\dfrac{2x-1}{(x+1)^{5/3}}$ следи да је функција y конвексна на интервалима $(-\infty,-1)$ и $(1/2,+\infty)$, а конкавна на интервалу $(-1,1/2)$. График функције има превојне тачке за $x=-1$ и $x=1/2$.

На основу података из (1)-(3) лако је скицирати график функције y.

Коментар. Студенти *Стојковић Милија, Селаковић Марија, Урошевић Маја, Милошевић Нела и Витошевић Милица* су дали комплетна решења, а има још неколико студената који су само 'заборавили' превојну тачку за $x=-1$. Највећи проблем у решавању овог задатка је био налажење другог извода функције y. Било је и оних који су превидели да је трећи корен дефинисан за сваки реалан број.

Драган Ђорић

МАТЕМАТИКА 1

2. Колоквијум, јануар 2011 - Група Д

1. Испитати конвергенцију низа (a_n) чији је општи члан задат са

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{27n^3+n}} + \frac{1}{\sqrt[3]{27n^3+n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{27n^3+3n}}$$

и у случају да конвергира одредити његову граничну вредност.

Решење: Ако је $b_n = \dfrac{2n+1}{\sqrt[3]{27n^3+3n}}$ и $c_n = \dfrac{2n+1}{\sqrt[3]{27n^3+n}}$, тада је $b_n < a_n < c_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \dfrac{2}{3}$. На основу *теореме о три низа* следи да је низ (a_n) конвергентан и да је

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}.$$

2. Дата је функција $f : x \mapsto (x-1)\cdot e^{1/(x-3)}$.

(а) Одредити област дефинисаности D_f функције f.

(б) Испитати понашање функције на границама домена D_f.

Решење: (а) $D_f = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

(б) Како $f(x) \to 0$ када $x \to 3_-$ и $f(x) \to +\infty$ када $x \to 3_+$, то је права $x = 3$ вертикална асимптота за $x \to 3_+$.

За $x \to \pm\infty$ важи

$$\frac{1}{x-3} = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{3}{x}\right)^{-1} = \frac{1}{x}\left(1 + o(1)\right) = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad e^{1/(x-3)} = 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$f(x) = (x-1)\left(1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x + o(1).$$

Према томе, права $y = x$ је коса асимптота и за $x \to -\infty$ и за $x \to +\infty$.

3. Дата је функција $g : x \mapsto \sqrt{1 - \sin 3x}$.

(а) Одредити Маклоренов полином M_3 степена 3 за функцију g.

(б) Израчунати $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{16g(x) + 18x^2 + 24x - 16}{x^3}$.

Решење: Како је $\sin 3x = 3x - \dfrac{1}{3!}(3x)^3 + o(x^3) = 3x - \dfrac{9}{2}x^3 + o(x^3)$ за $x \to 0$, то је $1 - \sin 3x = 1 + h(x)$, где је $h(x) = -3x + \dfrac{9}{2}x^3 + o(x^3)$. Према томе, за $x \to 0$ је

$$\begin{aligned}
g(x) &= 1 + \frac{1}{2}h(x) + \binom{1/2}{2}h^2(x) + \binom{1/2}{3}h^3(x) + o(h^3(x)) \\
&= 1 + \frac{1}{2}h(x) + \frac{1/2\cdot(-1/2)}{2}\cdot 9x^2 + \frac{1/2\cdot(-1/2)\cdot(-3/2)}{2\cdot 3}\cdot(-27x^3) + o(x^3) \\
&= 1 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}x^3 - \frac{9}{8}x^2 - \frac{27}{16}x^3 + o(x^3) \\
&= 1 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{8}x^2 + \frac{9}{16}x^3 + o(x^3).
\end{aligned}$$

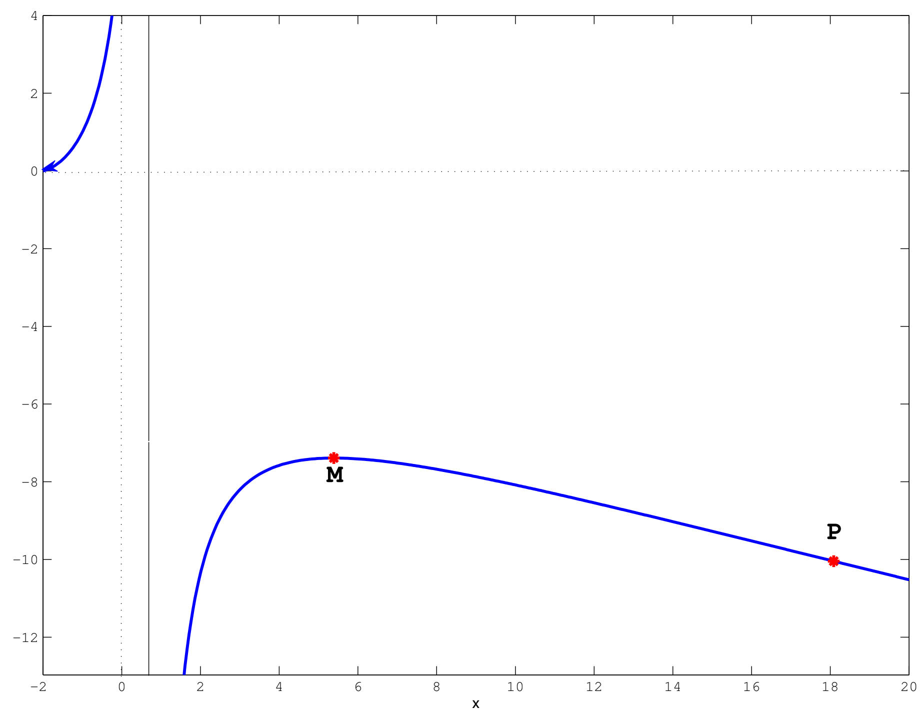
(а) $M_3(x) = 1 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{8}x^2 + \frac{9}{16}x^3$.

(б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{16g(x) + 18x^2 + 24x - 16}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{9x^3 + o(x^3)}{x^3} = 9$.

4. Испитати ток и скицирати график функције $y(x) = \frac{x+2}{1 - \ln(x+2)}$.

Решење: (1) Област дефинисаности $D_y = (-2, x_1) \cup (x_1, +\infty)$, где је $x_1 = e - 2$, добијамо из услова $x+2 > 0$ и $1 - \ln(x+2) \neq 0$. Како $y(x) \to +\infty$ када $x \to x_{1-}$ и $y(x) \to -\infty$ када $x \to x_{1+}$, права $x = x_1$ је вертикална асимптота. За $x \to -2_+$ имамо $y(x) \to 0$, а за $x \to +\infty$ важи $y(x) \to -\infty$. Пошто $y(x)/x \to 0$ када $x \to +\infty$, функција нема косу асимптоту. Функција нема нуле, позитивна је за $x < x_1$, а негативна за $x > x_1$.

(2) Из $y'(x) = \frac{2 - \ln(x+2)}{(1 - \ln(x+2))^2}$ следи да је функција растућа на интервалима $(-2, x_1)$ и (x_1, x_2), где је $x_2 = e^2 - 2$, а опадајућа на интервалу $(x_2, +\infty)$. Према томе, функција у тачки $x = x_2$ има локални максимум једнак $-e^2$ (одговарајућа тачка на графику је означена са M).



(3) Из $y''(x) = \frac{\ln(x+2) - 3}{(x+2)(\ln(x+2) - 1)^3}$ следи да је функција y конвексна на интервалима $(-2, x_1)$ и $(x_3, +\infty)$, где је $x_3 = e^3 - 2$, а конкавна на интервалу (x_1, x_3). Према томе, график функције има превојну тачку P за $x = x_3$.

На слици је дата скица графика функције y.

Драган Ђорић