МАТЕМАТИКА 1

2. Колоквијум, јануар 2013 - Група 6

1. Дат је низ (a_n), $n \geq 2$, где је

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[4]{n^8 - 2n^2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{n^8 - 2n^2 + 1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[4]{n^8 + 2n^2}}.$$

(1) Испитати конвергенцију низа (a_n) и у случају да конвергира одредити његову граничну вредност.

(2) Одредити тачке нагомилавања низа (a_n).

Решење: (1) Ако је $b_n = \dfrac{4n^2+1}{\sqrt[4]{n^8+2n^2}}$ и $c_n = \dfrac{4n^2+1}{\sqrt[4]{n^8-2n^2}}$, тада је $b_n < a_n < c_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 4$. На основу *теореме о три низа* следи да је низ (a_n) конвергентан и да је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4$.

(2) Како је низ (a_n) конвергентан, он има само једну тачку нагомилавања - то је број 4 (гранична вредност тог низа).

2. Дат је полинном $P(x) = -x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 3x + 3$.

(1) Развити полином P по степенима од $x + 1$.

(2) Израчунати $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{P(x) - 3}{x^4 + 2x^2 - x}$.

Решење: (1) Нека је $Q(x) = -(x+1)^4 + A(x+1)^3 + (x+1)^2 + C(x+1) + D$. Из услова $P(x) = Q(x)$ можемо да одредимо коефицијенте A, B, C и D (четири линеарне једначине са четири непознате). Међутим, те коефицијенте можемо једноставније да добијемо из услова $P(-1) = Q(-1)$, $P'(-1) = Q'(-1)$, $P''(-1) = Q''(-1)$ и $P'''(-1) = Q'''(-1)$. Како је $P(-1) = 2$, $P'(-1) = 6$, $P''(-1) = -26$, $P'''(-1) = 54$ и $Q(-1) = D$, $Q'(-1) = C$, $Q''(-1) = 2B$, $Q'''(-1) = 6A$, то је $D = 2$, $C = 6$, $B = -13$ и $A = 9$. Према томе,

$$P(x) = 2 + 6(x+1) - 13(x+1)^2 + 9(x+1)3 - (x+1)^4.$$

$$(2)\ \lim_{x\to 0} \frac{P(x) - 3}{x^4 + 2x^2 - x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 3x}{x^4 + 2x^2 - x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x + o(x)}{-x + o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{3 + o(1)}{-1 + o(1)} = -3.$$

3. Одредити вредност реалног параметра F тако да функција g дефинисана са

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{3\tan x - \sin(\sin 3x)}{x^3}, & x \neq 0 \\ F, & x = 0 \end{cases}$$

буде непрекидна у тачки $x = 0$.

Решење: За $x \to 0$ је

$$\tan x = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^{-1} = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

$$\sin 3x = 3x - \frac{27}{6}x^x + o(x^3) = 3x - \frac{9}{2}x^3 + o(x^3),$$

$$\sin(\sin 3x) = 3x - \frac{9}{2}x^3 - \frac{27}{6}x^3 + o(x^3) = 3x - 9x^3 + o(x^3),$$

$$3\tan x - \sin(\sin 3x) = 3x + x^3 - 3x + 9x^3 + o(x^3) = 10x^3 + o(x^3),$$

$$g(x) = \frac{10x^3 + o(x^3)}{x^3} = 10 + o(1) \to 10.$$

Према томе, функција g је непрекидна у тачки $x = 0$ ако је $F = 10$.

4. Испитати ток и скицирати график функције $y(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$.

Решење: (1) Пошто је квадратна функција $f : x \mapsto x^2 + 2x + 2$ позитивна за свако $x \in \mathbb{R}$, то је $D_f = \mathbb{R}$. Из једнакости

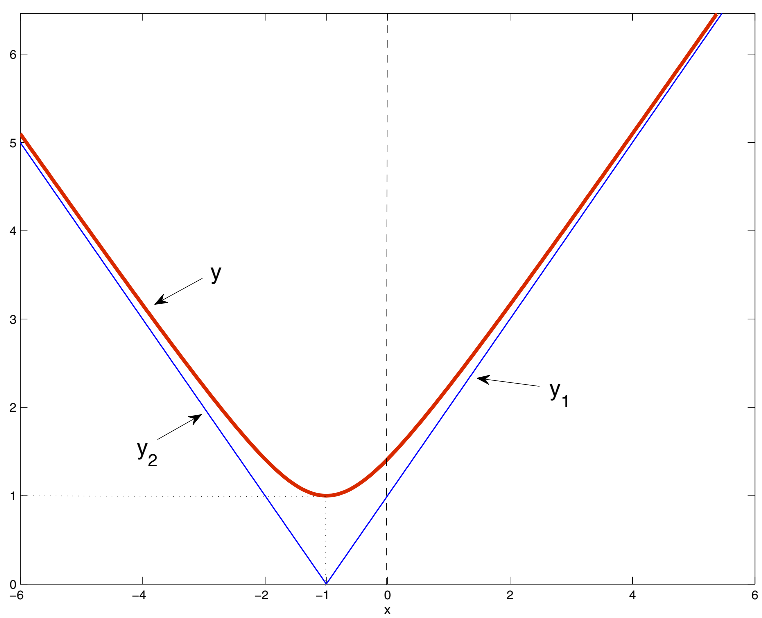
$$y(x) = |x| \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)^{1/2} = |x| \left(1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = |x| + sgn(x) + o(1)$$

која важи за $|x| \to +\infty$, следи да је права $y_1 = x + 1$ коса асимптота (за $x \to +\infty$) и да је права $y_2 = -x - 1$ друга коса асимптота (за $x \to -\infty$).

(2) Како је функција $g : x \mapsto \sqrt{x}$ растућа, а функција f опадајућа на интервалу $(-\infty, -1)$ и растућа на интервалу $(-1, +\infty)$, то је функција y (као композиција функција g и f) опадајућа на интервалу $(-\infty, -1)$ и растућа на интервалу $(-1, +\infty)$. Према томе, функција y у тачки $x = -1$ има минимум, $y_{\min} = y(-1) = 1$. Дакле, за испитивање монотоности и локалних екстремума није био неопходан први извод.

(3) Из $y''(x) = \dfrac{1}{(x^2 + 2x + 2)^{3/2}}$ следи да је функција y конвексна на $\mathbb{R}$, што значи да нема превојних тачака.

На слици је дата скица графика функције y.



Драган Ђорић