МАТЕМАТИКА 1

2. Колоквијум, јануар 2012 - Група Г

1. Дат је низ (a_n), где је $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$.

(1) Да ли је низ (a_n) монотон?

(2) Да ли је низ (a_n) ограничен?

(3) Да ли је низ (a_n) конвергентан?

(4) Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Решење: (1) Како је $a_1 = a_2$ и $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2}{n+1} < 1$ за $n > 1$, низ је монотон (опадајући).

(2) Из (1) следи да је $a_n \le a_1 = 2$. Како је и $a_n > 0$, низ је ограничен.

(3) По *Теореми о монотоном и ограниченом низу*, дати низ је конвергентан.

(4) Нека су (b_n) и (c_n) низови дефинисани са $b_n = 0$ и $c_n = \dfrac{4}{n}$. Из

$$a_n = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{2}{n-1}\cdot\frac{2}{n} < 2\cdot 1\cdot 1\cdots 1\cdot\frac{2}{n} = \frac{4}{n}$$

следи да је $b_n < a_n < c_n$. Како је $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$, према *Теореми о три низа* имамо да је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

2. Одредити асимптоте фукције $f : x \mapsto \sqrt[3]{x^3 + 5x^2}$.

Решење: Функција нема вертиканих асимптота јер је $D_f = \mathbb{R}$. Како је $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, функција нема ни хоризонталних асимптота. За $x \to \pm\infty$ је

$$f(x) = x\left(1 + \frac{5}{x}\right)^{1/3} = x\left(1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x + \frac{5}{3} + o(1).$$

Према томе, $y = x + 5/3$ је коса асимптота и за $x \to -\infty$ и за $x \to +\infty$.

3. Дата је функција $g : x \mapsto \ln(1 + x^2) - \sin 2x$.

а) Одредити Маклоренов полином M_3 степена 3 за функцију g.

б) Одредити вредност параметра D тако да функција h дефинисана са

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x) - x^2 + 2x}{x^3}, & x \neq 0 \\ D, & x = 0 \end{cases}$$

буде непрекидна на $\mathbb{R}$.

Решење: а) За M_3 довољно је узети Маклоренов полином P_2 (степена 2) за функцију $x \mapsto \ln(1+x^2)$ и Маклоренов полином Q_3 (степена 3) за функцију $x \mapsto \sin 2x$. Према познатим Маклореновим полиномима за функције $t \mapsto \ln(1 + t)$ и $t \mapsto \sin t$ имамо да је $P_2(x) = x^2$ и $Q_3(x) = 2x - \dfrac{4}{3}x^3$. Према томе, $M_3(x) = P_2(x) - Q_3(x) = -2x + x^2 + \dfrac{4}{3}x^3$.

б) За $x \neq 0$ функција h је непрекидна као количник две непрекидне функције. Како за $x \to 0$ важи $g(x) = M_3(x) + o(x^3)$, то је

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} \frac{M_3(x) - x^2 + 2x + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{4/3x^3 + o(x^3)}{x^3} = \frac{4}{3},$$

па је функција h је непрекидна у тачки $x = 0$ једино за $D = 4/3$. Према томе, за $D = 4/3$ функција h је непрекидна на $\mathbb{R}$.

4. Испитати ток и скицирати график функције $y(x) = \ln^2 x - 6\ln x + 9$.

Решење: (1) Приметимо најпре да је $y = f^2$, где је $f(x) = \ln x - 3$. То значи да је $D_y = D_f = (0, +\infty)$, да је $y \geq 0$ за $x \in D_y$ и да је $y(x) = 0$ када је $f(x) = 0$, односно за $x = x_1 = e^3$. Како је

$$\lim_{x\to 0_+} y(x) = \lim_{x\to 0_+} f^2(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} y(x) = \lim_{x\to +\infty} f^2(x) = +\infty,$$

права $x = 0$ је вертикална асимптота (с десне стране), а хоризонталних асимптота нема. Из

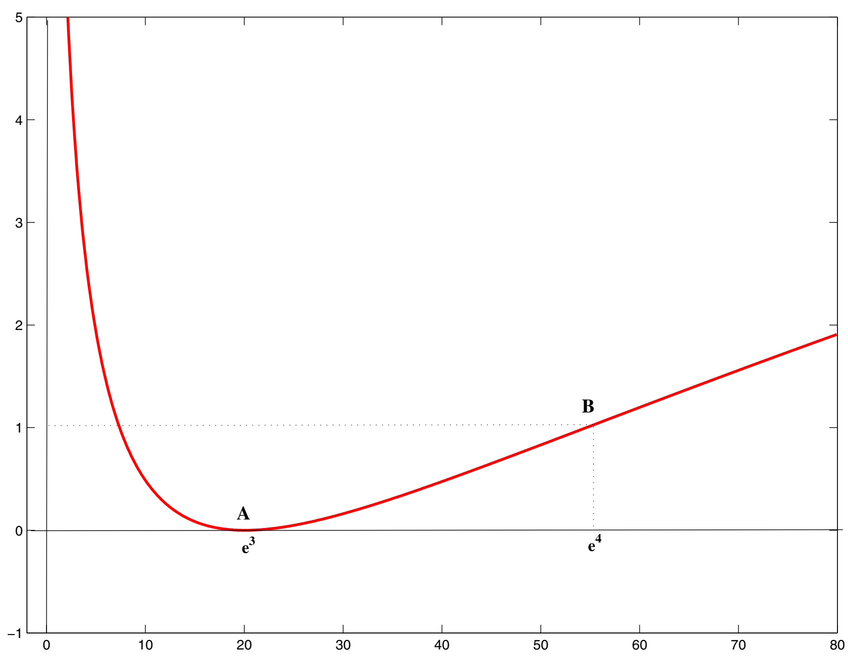
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f^2(x)}{x} = 2\cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)f'(x)}{1} = 2\cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x - 3}{x} = 2\cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

следи да функција y нема ни косу асимптоту.

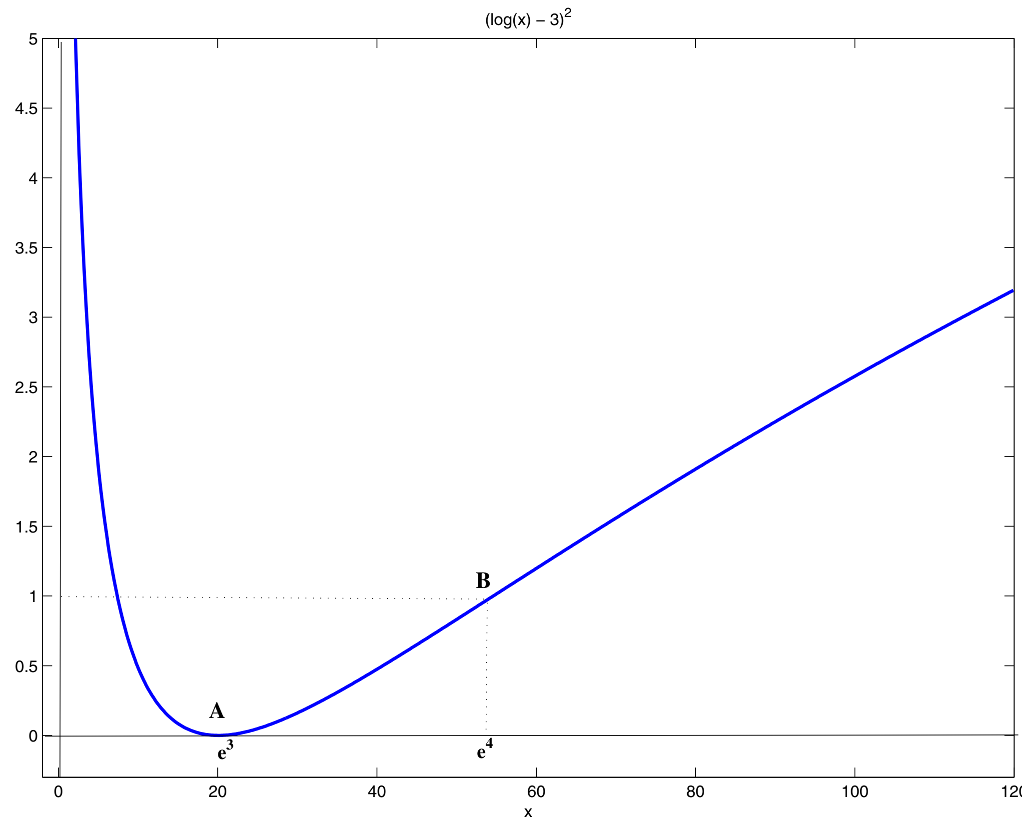
(2) Из $y'(x) = 2f(x)f'(x) = \dfrac{2}{x}(\ln x - 3)$ следи да је функција растућа на интервалу $(x_1, +\infty)$ и опадајућа на интервалу $(0, x_1)$. Према томе, функција y у тачки $x = x_1$ има локални минимум који је истовремено и нула функције.

(3) Из $y''(x) = \dfrac{2}{x^2}(4 - \ln x)$ следи да је функција y конвексна на интервалу $(0, x_2)$, где је $x_2 = e^4$, а конкавна на интервалу $(x_2, +\infty)$. Према томе, график функције y има превојну тачку $B(x_2, 1)$.

На слици је дата скица графика функције y.



Са графика је тешко уочити да је B тачка превоја. На следећој слици се види да се график функције y од тачке B креће 'благо конкавно'.

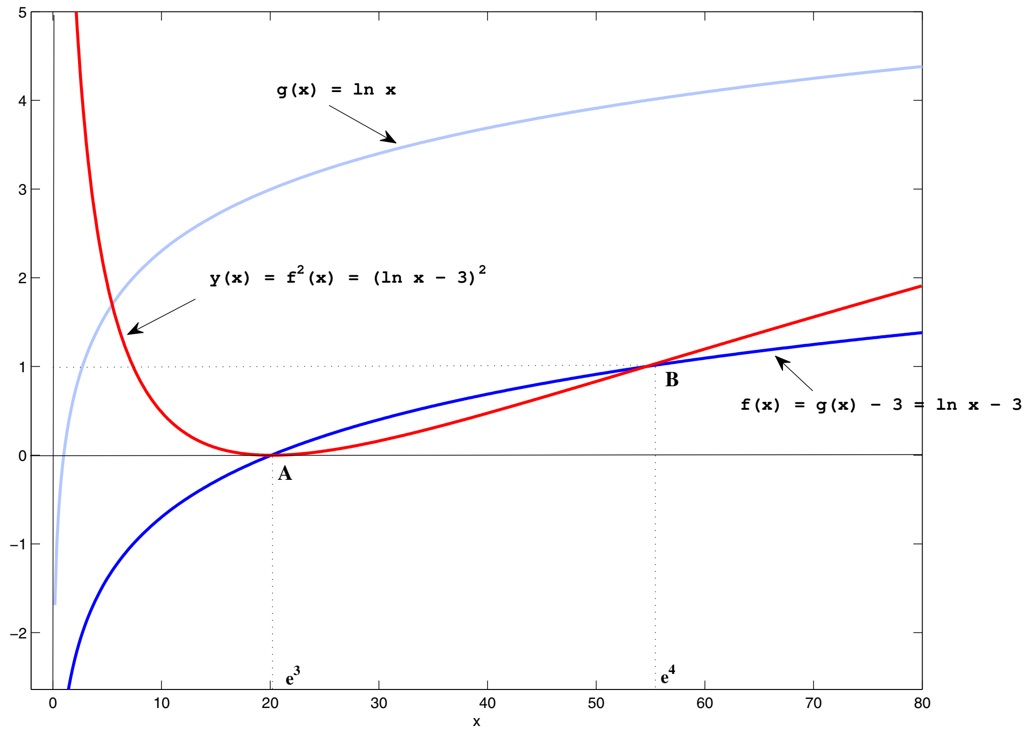


Напомена. Почетна скица графика функције y може да се добије и пре испитивања функције. Довољно је поћи од графика функције $g : x \mapsto \ln x$, затим транслирати график функције g да се добије график функције f и онда 'квадрирати' тај график.

При томе се могу 'видети' практично сви подаци о функцији осим интервала конвексности и превојних тачака. На пример, ако је функција f на неком интервалу позитивна и растућа, таква је и функција f^2 на том интервалу; ако је функција f на неком интервалу негативна и растућа, функција f^2 је на том интервалу опадајућа; нула функције f је тачка локалног минимума функције f^2, итд.

Што се тиче везе конвексности и конкавности функција f и f^2, неки случајеви су једноставнни, а за неке је потребно одређено испитивање. На пример, ако је функција на неком интервалу негативна и конкавна (као што је f из решења задатка на интервалу $(0, x_1)$), онда је њен квадрат конвексна функција на том интервалу (лако се види да је тада други извод од квадрата позитиван на том интервалу). Међутим, ако је функција f конкавна и позитивна на неком интервалу, понашање функције f^2 (у смислу конвексности и конкавности) на том интервалу зависи од знака израза $f'^2 + ff''$. Једноставни примери за експериментисање на ту тему су функције $x \mapsto \ln^a x$.

На слици на следећој страни дати су графици функција g, f и y, где се види како се од графика функције g добија график функције y.



Коментар. Неке грешке у решавању ових задатака су типичне.

У првом задатку је највећи проблем био израчунавање граничне вредности. Већини је било 'јасно' да је гранична вредност једнака нули, али су недостајали прави аргументи. То што је нула доња граница, а низ опадајући није довољан аргумент (осим ако не докажемо да је нула инфимум скупа вредности низа).

У другом задатку се до асимптоте најлакше долази коришћењем асмптотског развоја за функцију $t \mapsto (1+t)^a$, а таквих покушаја скоро да није ни било.

У трећем задатку је масовна појава писање једнакости типа $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$ без навођења услова $x \to 0$. У много радова се могу видети и једнакости типа $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3}$. Није мали број ни оних који за Маклоренов полином, на пример функције $\sin$, проглашавају $x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$. Све су то врло озбиљне грешке!

Најуспешније је урађен четврти задатак, што је и разумљиво јер се изводи дате функције добијају једним потезом, а лако се решавају и одговарајуће неједнакости за одређивање интервала монотоности и конвексности. Ипак, проблема је било код налажења граничних вредности функције y када $x \to 0_+$ и када $x \to +\infty$.

Најчешће виђен 'бисер' у решењима ове групе задатака је следећи

$$\lim_{x\to+\infty} (\ln^2 x - 6\ln x + 9) = 9.$$

Вероватно је објашњење: $\infty - \infty + 9 = 9$!

Драган Ђорић