А # II колоквијум из Математике 1 **А**

17. јануар 2008.

презиме и име студента	број индекса	број поена на I колоквијуму (од 100)

1. (*30 poena*) Дат је низ (a_n) преко формуле општег члана $a_n = \sqrt{n^2+2n-1} - n$.

а) Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

б) Да ли је низ (a_n) конвергентан?

в) Да ли је низ (a_n) монотон?

г) Да ли је низ (a_n) ограничен?

2. (*30 poena*) Дата је функција $g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{4x} - 2\ln(1+2x) - 12x^2 - 1}{x^3}, & x \neq 0 \\ \dfrac{16}{3}, & x = 0 \end{cases}.$

а) Одредити Маклоренове полиноме трећег степена функција e^{4x} и $\ln(1+2x)$.

б) Израчунати $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

в) Да ли је функција $g(x)$ непрекидна у тачки $x=0$?

3. (*40 poena*) Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \dfrac{x^2+4x+4}{x+1}$.

Б # II колоквијум из Математике 1 **Б**

17. јануар 2008.

презиме и име студента	број индекса	број поена на I колоквијуму (од 100)

1. (*30 poena*) Дат је низ (a_n) преко формуле општег члана $a_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$.

а) Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

б) Да ли је низ (a_n) конвергентан?

в) Да ли је низ (a_n) монотон?

г) Да ли је низ (a_n) ограничен?

2. (*30 poena*) Дата је функција $g(x) = \begin{cases} 2, & x = 0 \\ \dfrac{1 - e^{-2x} - \sin 2x + 2x^2}{x^3}, & x \neq 0 \end{cases}.$

а) Одредити Маклоренове полиноме трећег степена функција e^{-2x} и $\sin 2x$.

б) Израчунати $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

в) Да ли је функција $g(x)$ непрекидна у тачки $x=0$?

3. (*40 poena*) Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \dfrac{1}{e^x - 1}$.

Г II колоквијум из Математике 1 Г

17. јануар 2008.

презиме и име студента | **број индекса** | **број поена на I колоквијуму (од 100)**

1. (*30 poena*) Дат је низ (a_n) преко формуле општег члана $a_n = \sqrt{n^2+7n-6} - \sqrt{n^2+3n+1}$.

а) Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

б) Да ли је низ (a_n) конвергентан?

в) Да ли је низ (a_n) монотон?

г) Да ли је низ (a_n) ограничен?

2. (*30 poena*) Дата је функција $g(x) = \sqrt{1+2\sin x}$.

а) Одредити диференцијал $\mathrm{d}g$.

б) Одредити Маклоренов полином трећег степена $T_3(x)$ функције $g(x)$.

в) Проверити да ли важи следећа релација: $g(x) \approx 1 + x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} \quad (x \approx 0)$.

3. (*40 poena*) Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = (x-1)e^{2x}$.

Д II колоквијум из Математике 1 Д

17. јануар 2008.

презиме и име студента | **број индекса** | **број поена на I колоквијуму (од 100)**

1. (*30 poena*) Дат је низ (a_n) преко формуле општег члана $a_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-7n+12}$.

а) Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

б) Да ли је низ (a_n) конвергентан?

в) Да ли је низ (a_n) монотон?

г) Да ли је низ (a_n) ограничен?

2. (*30 poena*) Дата је функција $g(x) = \ln(1+\sin x)$.

а) Одредити диференцијал $\mathrm{d}g$.

б) Одредити Маклоренов полином трећег степена $T_3(x)$ функције $g(x)$.

в) Проверити да ли важи следећа релација: $g(x) \approx x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} \quad (x \approx 0)$.

3. (*40 poena*) Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \dfrac{x^2+6x-7}{2-x}$.

К II колоквијум из Математике 1 К

17. јануар 2008.

презиме и име студента **број индекса** **број поена на I колоквијуму (од 100)**

1. (*30 poena*) Низ (a_n) је дат са $a_n = \dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$.

а) Да ли је низ (a_n) монотон?

б) Да ли је низ (a_n) ограничен?

в) Да ли је низ (a_n) конвергентан?

г) Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2. (*30 poena*) Дата је функција $g(x) = e^{1-\cos x}$.

а) Одредити диференцијал $\mathrm{d}g$.

б) Одредити Маклоренов полином трећег степена $T_3(x)$ функције $g(x)$.

в) Проверити да ли важи следећа релација: $g(x) \approx 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} \quad (x \approx 0)$.

3. (*40 poena*) Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = (x^2 + 4x + 5)e^{x+1}$.

Л II колоквијум из Математике 1 Л

17. јануар 2008.

презиме и име студента **број индекса** **број поена на I колоквијуму (од 100)**

1. (*30 poena*) Низ (a_n) је дат са $a_n = \dfrac{1}{2\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 6} + \dfrac{1}{6\cdot 8} + \ldots + \dfrac{1}{2n\cdot(2n+2)}$.

а) Да ли је низ (a_n) монотон?

б) Да ли је низ (a_n) ограничен?

в) Да ли је низ (a_n) конвергентан?

г) Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2. (*30 poena*) Дата је функција $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos 2x - 1 + 2x^2}{x^4}, & x \neq 0 \\ K, & x = 0 \end{cases}$.

а) Одредити Маклоренов полином четвртог степена функција $\cos 2x$.

б) Израчунати $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

в) У зависности од параметра K испитати да ли је функција $g(x)$ непрекидна.

3. (*40 poena*) Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x$.

M II колоквијум из Математике 1 M

17. јануар 2008.

презиме и име студента **број индекса** **број поена на I колоквијуму (од 100)**

1. (*30 poena*) Низ (a_n) је дат са $a_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} + \frac{1}{2n\cdot(2n+2)}$.

а) Да ли је низ (a_n) монотон?

б) Да ли је низ (a_n) ограничен?

в) Да ли је низ (a_n) конвергентан?

г) Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2. (*30 poena*) Дата је функција $g(x) = (3-x)\cdot e^{x+2}$.

а) Одредити диференцијал $\mathrm{d}g$.

б) Одредити Тејлоров полином трећег степена $T_3(x)$ функције $g(x)$ у околини тачке $x=-2$.

в) Апроксимирати функцију $g(x)$ Тејлоровим полиномом трећег степена у околини тачке $x=-2$.

3. (*40 poena*) Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = x\cdot \ln^2 x$.

H II колоквијум из Математике 1 H

17. јануар 2008.

презиме и име студента **број индекса** **број поена на I колоквијуму (од 100)**

1. (*30 poena*) Низ (a_n) је дат са $a_n = \frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 7} + \frac{1}{5\cdot 9} + \ldots + \frac{1}{(4n-3)\cdot(4n+1)} + \frac{1}{(4n-1)\cdot(4n+3)}$.

а) Да ли је низ (a_n) монотон?

б) Да ли је низ (a_n) ограничен?

в) Да ли је низ (a_n) конвергентан?

г) Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2. (*30 poena*) Дата је функција $g(x) = (x+3)\cdot e^{1-x}$.

а) Одредити диференцијал $\mathrm{d}g$.

б) Одредити Тејлоров полином трећег степена $T_3(x)$ функције $g(x)$ у околини тачке $x=1$.

в) Апроксимирати функцију $g(x)$ Тејлоровим полиномом трећег степена у околини тачке $x=1$.

3. (*40 poena*) Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = (x-1)\sqrt{10-x}$.

A Решења II колоквијума из Математике 1 A

1. а) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n-1}-n\right)\cdot\dfrac{\sqrt{n^2+2n-1}+n}{\sqrt{n^2+2n-1}+n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n-1-n^2}{\sqrt{n^2+2n-1}+n} =$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{\sqrt{n^2+2n-1}+n}\cdot\dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}=\sqrt{\frac{1}{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}+1} = \dfrac{2-0}{\sqrt{1+0-0}+1} = 1.$

б) Како је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ то низ (a_n) конвергира.

в) Испитајмо монотоност овог низа. Покажимо да је овај низ монотоно растући, тј. $a_{n+1}-a_n>0$.

$a_{n+1}-a_n = \left(\sqrt{n^2+4n+2}-(n+1)\right)-\left(\sqrt{n^2+2n-1}-n\right) = \sqrt{n^2+4n+2}-\sqrt{n^2+2n-1}-1>0.$

$\Leftrightarrow\ \sqrt{n^2+4n+2}>\sqrt{n^2+2n-1}+1.$

Како на обе стране имамо позитивне бројеве ово смемо да квадрирамо.

$\Leftrightarrow\ n^2+4n+2>n^2+2n-1+2\sqrt{n^2+2n-1}+1$, тј. $2n+2>2\sqrt{n^2+2n-1}$, односно $n+1>\sqrt{n^2+2n-1}$. Опет су обе стране позитивне, па кад квадрирамо добијамо $n^2+2n+1>n^2+2n-1$, односно $2>0$, што је тачно, па важи и $a_{n+1}-a_n>0$.

г) Како је $2n-1>0$ за свако $n\in\mathbb{N}$ то је и $n^2+2n-1>n^2$, односно кад коренујемо добијамо да је $\sqrt{n^2+2n-1}>\sqrt{n^2}=|n|=n$, одакле је $a_n=\sqrt{n^2+2n-1}-n>0$.

Са друге стране имамо $n^2+2n-1<n^2+2n+1$, што кад коренујемо $\sqrt{n^2+2n-1}<\sqrt{n^2+2n+1}=n+1$, одакле је $a_n=\sqrt{n^2+2n-1}-n<1$. Тиме смо показали да је $0<a_n<1$, тј. низ a_n је ограничен.

Напомена. Овај део смо могли показати и на основу претходно показаних делова задатка: како је низ (a_n) монотоно растући и конвергира ка 1, то ће бити $a_1\leqslant a_n\leqslant 1$, тј. $\sqrt{2}-1\leqslant a_n\leqslant 1$.

2. а) I начин: Користимо Маклоренове развоја експоненцијалне функције и логаритамске функције:

$$e^t = 1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+o(t^3) \qquad \text{и} \qquad \ln(1+t)=\frac{t}{1}-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+o(t^3),$$

стављајући $t=4x$ у прву формулу и $t=2x$ у другу формулу директно добијамо

$$e^{2x} = 1+4x+8x^2+\frac{32}{3}x^3+o(x^3) \qquad \text{и} \qquad \ln(1+2x)=2x-2x^2+\frac{8}{3}x^3+o(x^3).$$

II начин: Одредимо Маклоренов полином трећег степена функције $g_1(x)=e^{2x}$.

$$\begin{array}{lll} g_1(x)=e^{4x} & \Rightarrow & g_1(0)=1 \\ g_1'(x)=4e^{4x} & \Rightarrow & g_1'(0)=4 \\ g_1''(x)=16e^{4x} & \Rightarrow & g_1''(0)=16 \\ g_1'''(x)=64e^{4x} & \Rightarrow & g_1'''(0)=64 \end{array}$$

Маклоренов полином је $T_3(x)=1+4x+8x^2+\dfrac{32}{3}x^3$, тј. $g_1(x)=1+4x+8x^2+\frac{32}{3}x^3+o(x^3)$.

Одредимо Маклоренов полином трећег степена функције $g_2(x)=\ln(1+2x)$.

$$\begin{array}{lll} g_1(x)=\ln(1+2x) & \Rightarrow & g_1(0)=0 \\ g_1'(x)=\dfrac{2}{1+2x} & \Rightarrow & g_1'(0)=2 \\ g_1''(x)=\dfrac{-4}{(1+2x)^2} & \Rightarrow & g_1''(0)=-4 \\ g_1'''(x)=\dfrac{16}{(1+2x)^3} & \Rightarrow & g_1'''(0)=16 \end{array}$$

Маклоренов полином је $T_3(x)=2x-2x^2+\dfrac{8}{3}x^3$, тј. $g_2(x)=2x-2x^2+\dfrac{8}{3}x^3+o(x^3)$.

б) <u>I начин</u>: Како за $x \neq 0$ имамо да је $\quad g(x) = \dfrac{e^{4x} - 2\ln(1+2x) - 12x^2 - 1}{x^3} =$

$$\frac{\left(1 + 4x + 8x^2 + \frac{32}{3}x^3 + o(x^3)\right) - 2\cdot\left(2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)\right) - 12x^2 - 1}{x^3} = \frac{16}{3} + o(1), \text{ то је } \lim_{x\to 0} g(x) = \frac{16}{3}.$$

<u>II начин</u>: До резултата овог лимеса можемо доћи и са 3 узастопне примене Лопиталовог правила:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{4x} - 2\ln(1+2x) - 12x^2 - 1}{x^3} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{4e^{4x} - \dfrac{4}{1+2x} - 24x}{3x^2} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{16e^{4x} + \dfrac{8}{(1+2x)^2} - 24}{6x} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{64e^{4x} - \dfrac{32}{(1+2x)^3}}{6} = \frac{64-32}{6} = \frac{16}{3}.$$

в) Како је $g(0) = \dfrac{16}{3} = \lim\limits_{x\to 0} g(x)$ добијамо да је функција $g(x)$ непрекидна у тачки $x = 0$.

3. Испитајмо ток функције $f(x) = \dfrac{x^2+4x+4}{x+1}$.

1° Домен је $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, тј. $D = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

2° Пресек са y-осом је $Y(0,4)$. Функција има једну нулу: $N(-2,0)$. Знак:

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,+\infty)$
x^2+4x+4	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	x	$+$
$f(x)$	$-$	0	$-$	x	$+$

3° Није ни парна ни непарна (како домен D није симетричан у односу на $x=0$) ни периодична (како се прекиди у домену не понављају периодично).

4° $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+4x+4}{x+1} \cdot \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+4+\frac{4}{x}}{1+\frac{1}{x}} = -\infty.$

Аналогно се добија и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (а могли смо да користимо и Лопиталово правило).

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{x^2+4x+4}{x+1} = \left[\dfrac{1}{0^-}\right] = -\infty.$

Аналогно се добија и $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$

5° На основу претходно одређених лимеса имамо да је права $x = 1$ је вертикална асимптота, а да $f(x)$ нема хоризонталних асимптота.

Остаје да испитамо косе асимптоте. Како је $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2+4x+4}{x^2+x} \cdot \dfrac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = 1$ и $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - k\cdot x = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2+4x+4}{x+1} - 1\cdot x = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2+4x+4-x^2-x}{x+1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3x+4}{x+1} \cdot \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} =$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3+\frac{4}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 3$. Стога је права $y = x+3$ обострана коса асимптота.

6° $f' = \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$. Монотоност смо испитали помоћу следеће таблице:

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
x^2+2x	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+1)^2$	$+$	$+$	$+$	x	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	x	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	x	$\searrow$	min	$\nearrow$

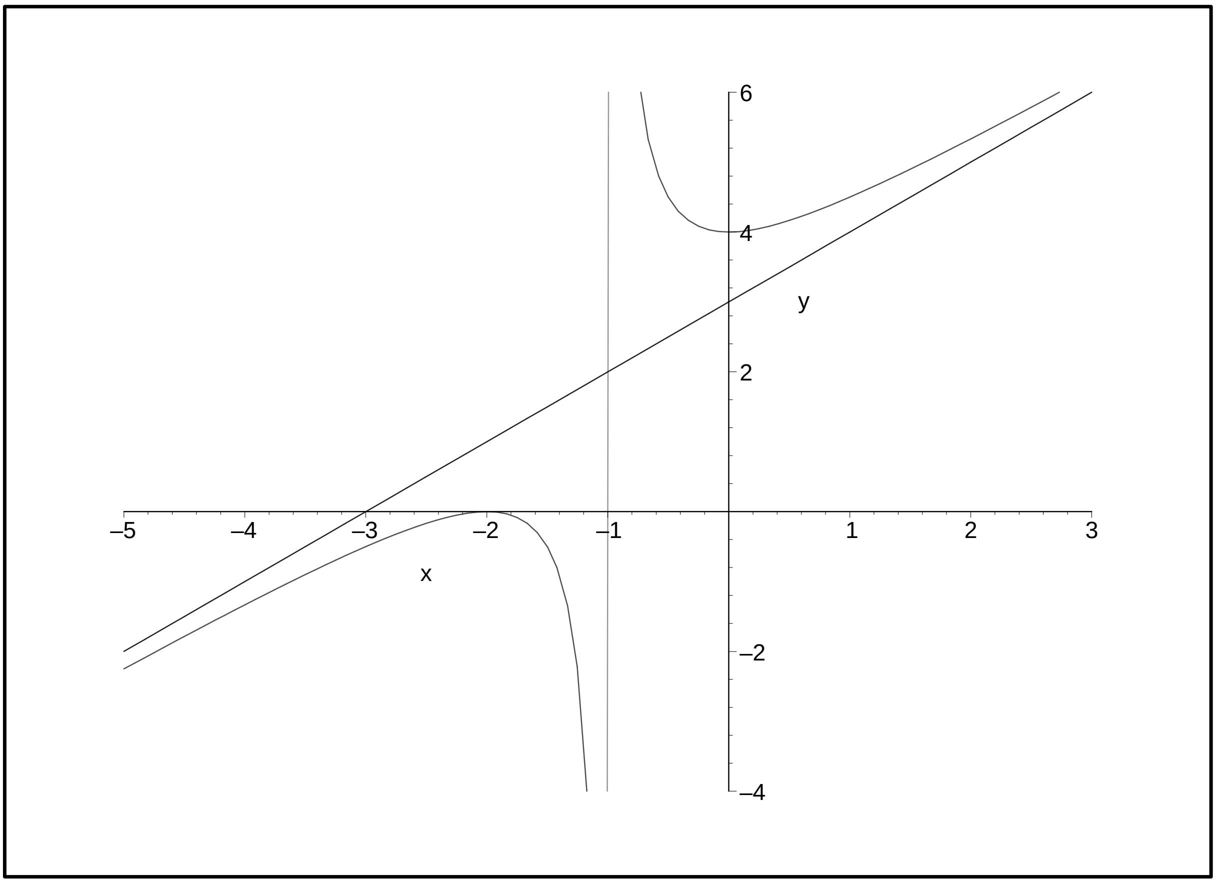
Локални максимум је $M_1(-2,0)$, а локални минимум је $M_2(0,4)$.

7° $f'' = \dfrac{2}{(x+1)^3}$. Конвексност: смо испитали помоћу следеће таблице:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, +\infty)$
2	$+$	$+$	$+$
$(x+1)^3$	$-$	x	$+$
$f''(x)$	$-$	x	$+$
$f(x)$	$\cap$	x	$\cup$

Превојних тачака нема.

На основу свега овога скицирамо график функције:



Б Резултати II колоквијума из Математике 1 Б

1. а) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

б) Низ (a_n) је конвергентан (јер је лимес у делу под а) коначан).

в) Низ (a_n) је монотон (растући).

г) Низ (a_n) је ограничен $(0 < a_n < 1)$.

2. а) $e^{-2x} = 1 - 2x + 2x^2 - \dfrac{4}{3}x^3 + o(x^3) \Rightarrow T_3(x) = 1 - 2x + 2x^2 - \dfrac{4}{3}x^3$.

$\sin 2x = 2x - \dfrac{4}{3}x^3 + o(x^3) \Rightarrow T_3(x) = 2x + -\dfrac{4}{3}x^3$.

б) $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \dfrac{8}{3}$.

в) Како је $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \dfrac{8}{3} \neq 2 = g(0)$ функција није непрекидна у $x = 0$ (тј. ту има прекид).

3. 1° Домен је $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

2° Нема пресек са y-осом. Функција нема нуле. Знак:

	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f(x)$	$-$	x	$+$

3° Није ни парна ни непарна ни периодична.

4° $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{e^x - 1} = \left[\dfrac{1}{0-1}\right] = -1$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x - 1} = \left[\dfrac{1}{+\infty - 1}\right] = 0$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{e^x - 1} = \left[\dfrac{1}{e^{0^-} - 1} = \dfrac{1}{1^- - 1} = \dfrac{1}{0^-}\right] = -\infty$. Аналогно је и $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$.

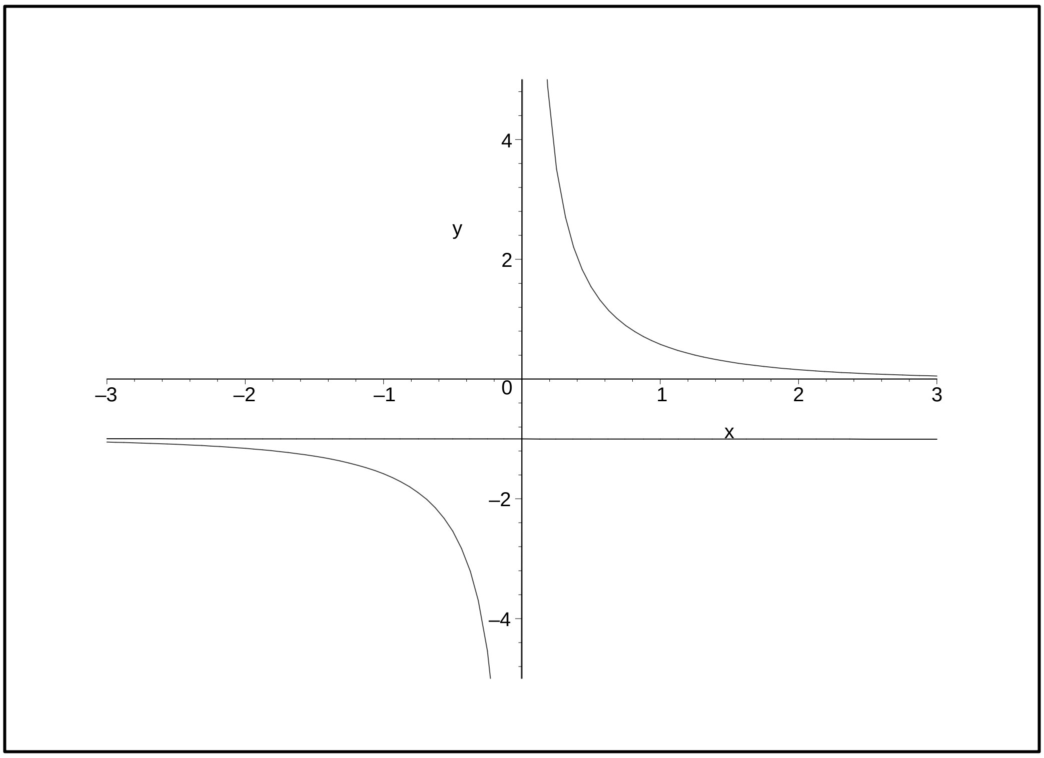
5° $x = 0$ је верт. асимптота, а $y = -1$ је лева хор. асимптота, док је $y = 0$ десна хор. асимптота.

6° $f' = \dfrac{-e^x}{(e^x - 1)^2}$. Нема екстрема. Монотоност:

	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	x	$-$
$f(x)$	$\searrow$	x	$\searrow$

7° $f'' = \dfrac{e^x(e^x + 1)}{(e^x - 1)^3}$. Превојних тачака нема. Конвексност:

	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f''(x)$	$-$	x	$+$
$f(x)$	$\cap$	x	$\cup$



Г Резултати II колоквијума из Математике 1 Г

1. **а)** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{7}{2}$.

б) Низ (a_n) је конвергентан (јер је лимес у делу под а) коначан).

в) Низ (a_n) је монотон (растући).

г) Низ (a_n) је ограничен $(0 < a_n < \dfrac{7}{2})$.

2. **а)** Како је $g'(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{1+2\sin x}} \Rightarrow \mathrm{d}g = \dfrac{\cos x}{\sqrt{1+2\sin x}}\,\mathrm{d}x$.

б) $T_3(x) = 1 + x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3$.

в) Важи дата релација.

3. 1° Домен је $D = (-\infty, +\infty)$.

2° Пресек са y-осом је $Y(0,-1)$. Нула је $N(1,0)$. Знак:

	$(-\infty,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f(x)$	$-$	0	$+$

3° Није ни парна ни непарна ни периодична.

4° $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)e^{2x} = [-\infty\cdot 0] = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{e^{-2x}} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-2e^{-2x}} = \left[\dfrac{1}{-\infty}\right] = 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)e^{2x} = [(+\infty)\cdot(+\infty)] = +\infty$.

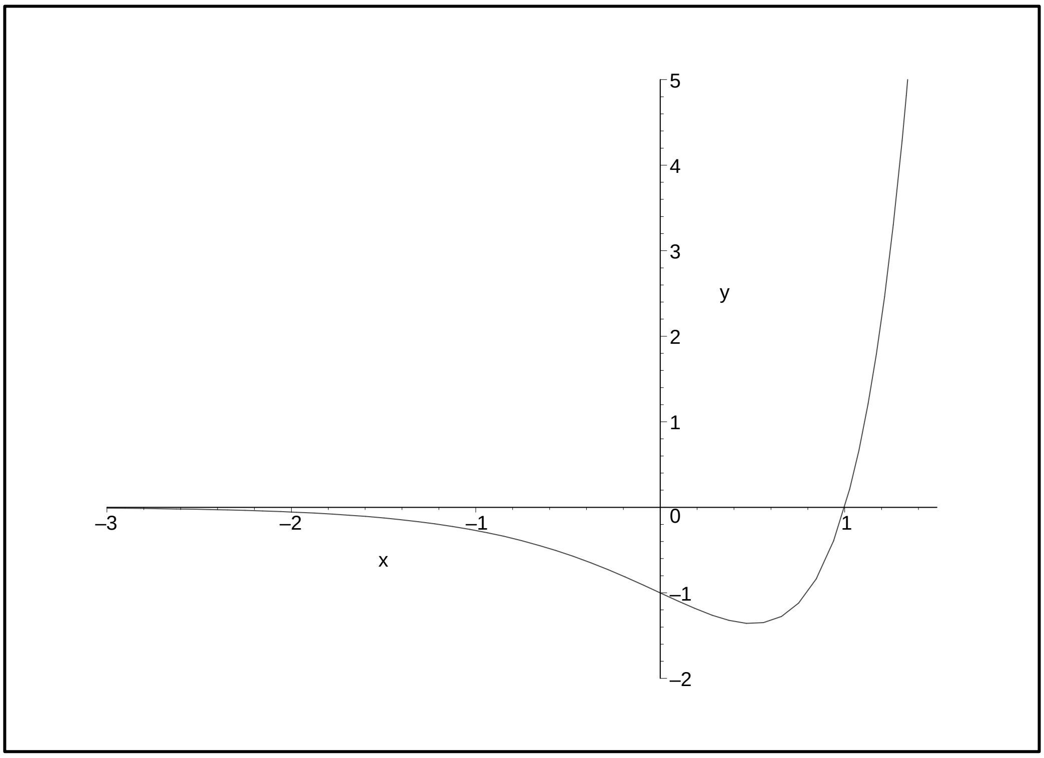
5° Верт. асимптота нема, а $y=0$ је лева хор. асимптота, док нема десну ни хор. ни косу асимптоту.

6° $f' = e^{2x}\cdot(2x-1)$. Локални минимум је $M(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{e}{2}$. Монотоност:

	$(-\infty,\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

7° $f'' = 4xe^{2x}$. Превојна тачка је $P(0,-1)$. Конвексност:

	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	P	$\cup$



Д Резултати II колоквијума из Математике 1 Д

1. а) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{7}{2}$.

б) Низ (a_n) је конвергентан (јер је лимес у делу под а) коначан).

в) Низ (a_n) је монотон (растући).

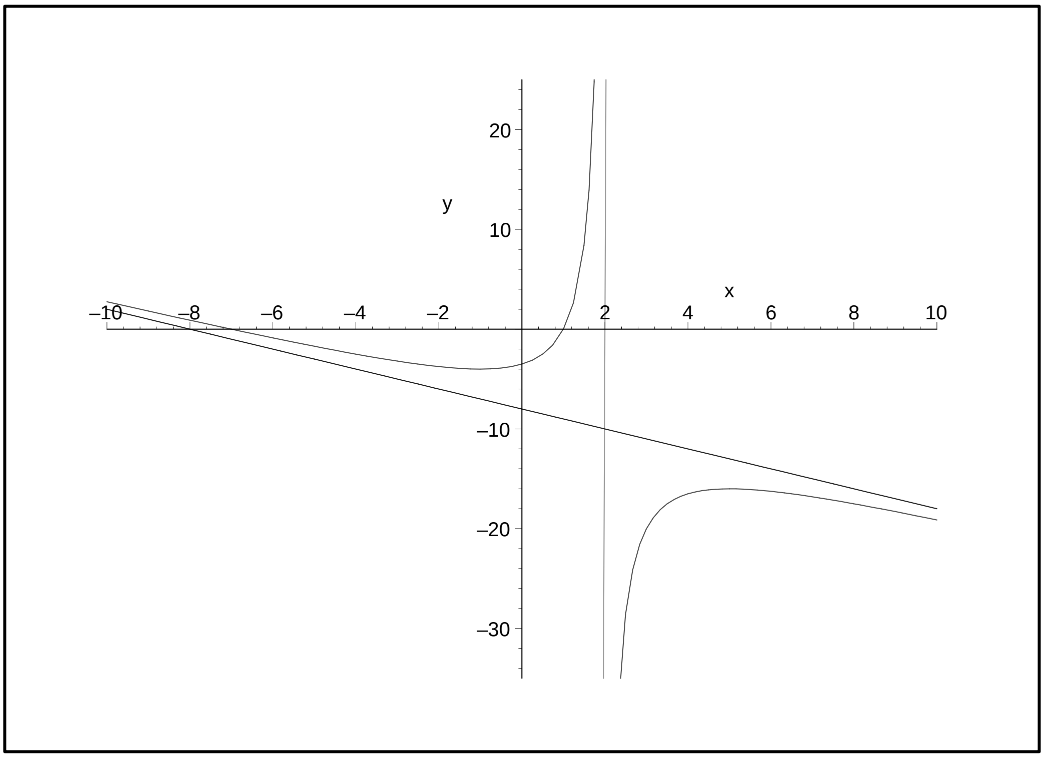
г) Низ (a_n) је ограничен $(0 < a_n < \dfrac{7}{2})$.

2. а) Како је $g'(x) = \dfrac{\cos x}{1+\sin x} \Rightarrow \mathrm{d}g = \dfrac{\cos x}{1+\sin x}\ \mathrm{d}x$.

б) $T_3(x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}x^3$.

в) Важи дата релација.

3.



К Резултати II колоквијума из Математике 1 К

1. а) Низ (a_n) је монотоно растући (јер се следећи члан добија тако што претходном додамо још један позитиван сабирак).

б) Низ (a_n) је ограничен $(0 < a_n < \frac{1}{2})$.

в) Низ (a_n) је конвергентан (јер је монотон и ограничен).

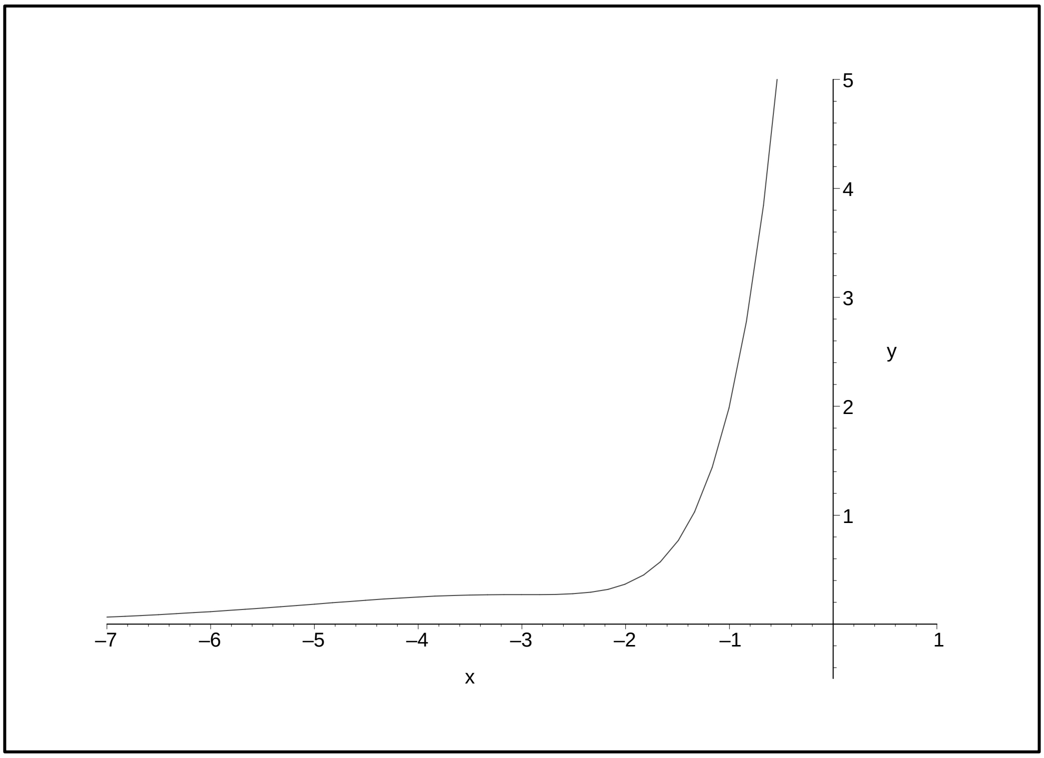
г) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

2. а) Како је $g'(x) = e^{1-\cos x} \cdot \sin x \Rightarrow \mathrm{d}g = e^{1-\cos x} \cdot \sin x \; \mathrm{d}x$.

б) $T_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2$.

в) Не важи дата релација (јер има члан $\frac{x^3}{3}$ вишка).

3.



Л Резултати II колоквијума из Математике 1 Л

1. а) Низ (a_n) је монотоно растући (јер се следећи члан добија тако што претходном додамо још један позитиван сабирак).

б) Низ (a_n) је ограничен $(0 < a_n < \frac{1}{4})$.

в) Низ (a_n) је конвергентан (јер је монотон и ограничен).

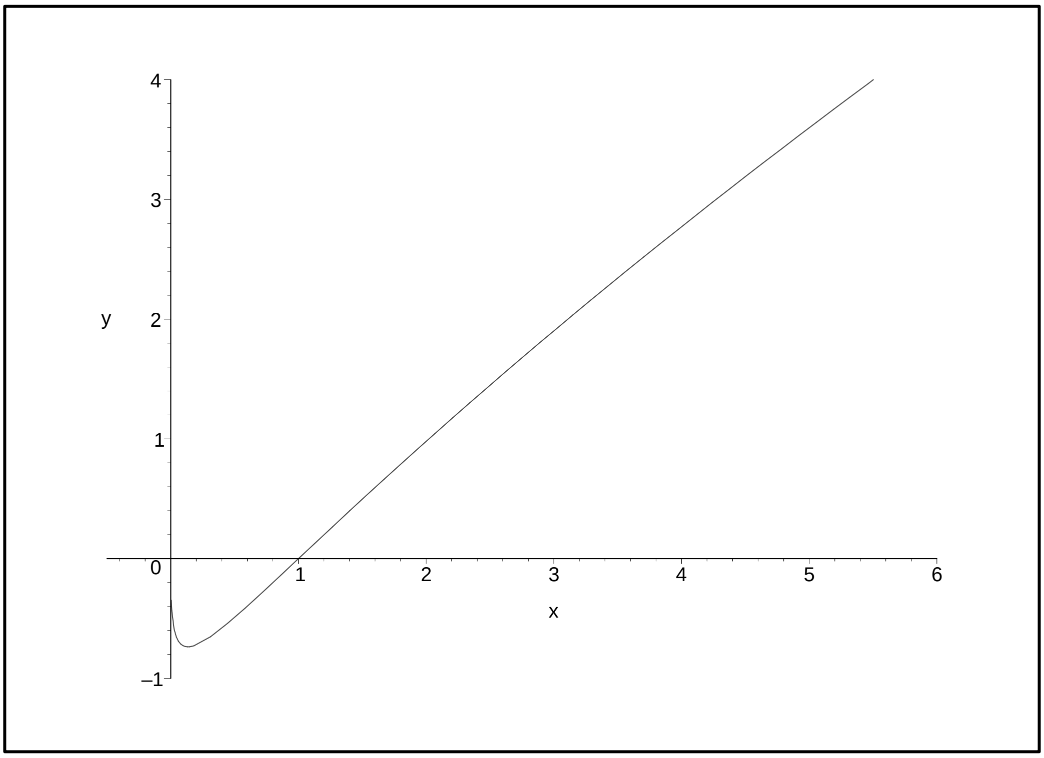
г) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{4}$.

2. а) $\cos 2x = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) \Rightarrow T_3(x) = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4$.

б) $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \frac{2}{3}$.

в) Када је $K \neq \frac{2}{3}$ због $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \frac{2}{3} \neq K = g(0)$ функција није непрекидна у $x = 0$ (тј. ту има прекид), док је за $K = \frac{2}{3}$ због $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \frac{2}{3} = K = g(0)$ функција непрекидна у $x = 0$.

3.



M Резултати II колоквијума из Математике 1 M

1. а) Низ (a_n) је монотоно растући (јер се следећи члан добија тако што претходном додамо још један позитиван сабирак).

б) Низ (a_n) је ограничен $(0 < a_n < \frac{3}{4})$.

в) Низ (a_n) је конвергентан (јер је монотон и ограничен).

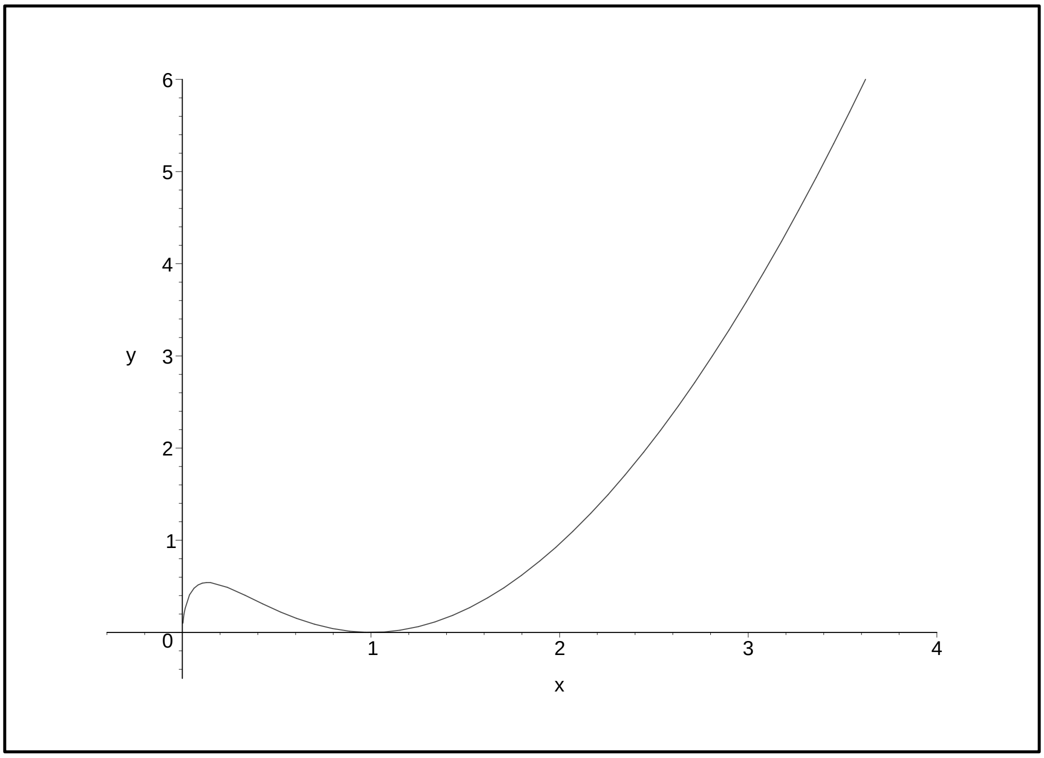
г) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{4}$.

2. а) Како је $g'(x) = -e^{x+2}(x-2) \Rightarrow \mathrm{d}g = -e^{x+2}(x-2)\,\mathrm{d}x$.

б) $T_3(x) = 5 + 4(x+2) + \frac{3}{2}(x+2)^2 + \frac{1}{3}(x+2)^3$.

в) $g(x) \approx 5 + 4(x+2) + \frac{3}{2}(x+2)^2 + \frac{1}{3}(x+2)^3 \quad (x \approx -2)$.

3.



H Резултати II колоквијума из Математике 1 H

1. а) Низ (a_n) је монотоно растући (јер се следећи члан добија тако што претходном додамо још један позитиван сабирак).

б) Низ (a_n) је ограничен $(0 < a_n < \frac{1}{3})$.

в) Низ (a_n) је конвергентан (јер је монотон и ограничен).

г) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}$.

2. а) Како је $g'(x) = -e^{1-x}(x+2) \Rightarrow \ \mathrm{d}g = -e^{1-x}(x+2)\ \mathrm{d}x$.

б) $T_3(x) = 4 - 3(x-1) + (x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3$.

в) $g(x) \approx 4 - 3(x-1) + (x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3 \quad (x \approx 1)$.

3.