A # II колоквијум из Математике 1 A

9. јануар 2012.

______________________ презиме и име студента

__________ број индекса

__________ број поена на I колоквијуму (од 100)

1. *(20 поена)* Испитати конвергенцију низа (a_n), $n \geqslant 2$, чији је општи члан задат са

$$a_n = \left(\frac{3n^2-2n+3}{3n^2-2n-5}\right)^{\dfrac{n^4-4}{n^2+9}}$$

и одредити граничну вредност $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ако постоји.

2. *(20 поена)* Дата је функција

$$f\colon x \mapsto \frac{x^2}{\ln(x+2)-1}\,.$$

а) Одредити област дефинисаности (домен) D_f ове функције.

б) Испитати понашање функције на рубовима домена D_f (одредити граничне вредности и на основу њих извести закључке везане за вертикалне, хоризонталне и косе асимптоте).

3. *(20 поена)* Дата је функција

$$g\colon x \mapsto \cos 2x - e^x + \ln(1+x).$$

а) Апроксимирати функцију $g(x)$ Маклореновим полиномом $M_3(x)$ (степена 3).

б) Одредити вредност параметра β тако да функција

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)+3x^2}{x^3}, & x \neq 0 \\ \beta, & x = 0 \end{cases}$$

буде непрекидна у $x = 0$.

4. *(40 поена)* Испитати ток и скицирати график функције

$$y(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x-2}}\,.$$

Б **II колоквијум из Математике 1** **Б**

9. јануар 2012.

презиме и име студента **број индекса** **број поена на I колоквијуму (од 100)**

1. *(20 поена)* Испитати конвергенцију низа (a_n), $n \geqslant 1$, чији је општи члан задат са

$$a_n = \left(\frac{5n^2 - 5n + 1}{5n^2 - 5n + 3}\right)^{\dfrac{n^3 + 3n + 1}{2n + 3}}$$

и одредити граничну вредност $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ако постоји.

2. *(20 поена)* Дата је функција

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}, & x \neq 0 \\ \Gamma, & x = 0. \end{cases}$$

Одредити вредност параметра Γ тако да функција $h(x)$ буде непрекидна у $x = 0$.

3. *(20 поена)* Дата је функција

$$g\colon x \mapsto \sqrt{1 + x \sin x} - 1\,.$$

а) Апроксимирати функцију $g(x)$ Маклореновим полиномом $M_3(x)$ (степена 3).

б) Одредити граничну вредност

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{e^{4x^2} - 1}\,.$$

4. *(40 поена)* Испитати ток и скицирати график функције

$$y(x) = \frac{e^{-x}}{x - 4}\,.$$

Г **II колоквијум из Математике 1** Г

9. јануар 2012.

презиме и име студента | **број индекса** | **број поена на I колоквијуму (од 100)**

1. *(20 поена)* Дат је низ (a_n) преко формуле општег члана $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$.

а) Да ли је низ (a_n) монотон?

б) Да ли је низ (a_n) ограничен?

в) Да ли је низ (a_n) конвергентан?

г) Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2. *(20 поена)* Дата је функција

$$f\colon x \mapsto \sqrt[3]{x^3 + 5x^2}\,.$$

а) Одредити област дефинисаности (домен) D_f ове функције.

б) Испитати понашање функције на рубовима домена D_f (одредити граничне вредности и на основу њих извести закључке везане за вертикалне, хоризонталне и косе асимптоте).

3. *(20 поена)* Дата је функција

$$g\colon x \mapsto \ln(1 + x^2) - \sin 2x.$$

а) Апроксимирати функцију $g(x)$ Маклореновим полиномом $M_3(x)$ (степена 3).

б) Одредити вредност параметра D тако да функција

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x) - x^2 + 2x}{x^3}, & x \neq 0 \\ D, & x = 0. \end{cases}$$

тако да функција $h(x)$ буде непрекидна на $\mathbb{R}$.

4. *(40 поена)* Испитати ток и скицирати график функције

$$y(x) = \ln^2 x - 6\ln x + 9\,.$$

Д # II колоквијум из Математике 1 **Д**

9. јануар 2012.

______________________________ презиме и име студента

______________ број индекса

______________ број поена на I колоквијуму (од 100)

1. *(20 поена)* Испитати конвергенцију низа (a_n) чији је општи члан задат са

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^3-2n+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3-2n+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+3n+2}}$$

и одредити граничну вредност $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ако постоји.

2. *(20 поена)* Дата је функција

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{\sin 2x}{x^3}, & x \neq 0 \\ A, & x = 0. \end{cases}$$

Одредити вредност параметра A тако да функција $h(x)$ буде непрекидна у $x = 0$.

3. *(20 поена)* Дата је функција

$$g\colon x \mapsto x^3 + \ln(\cos x) \qquad \text{за } x \in (-1,1)\,.$$

а) Апроксимирати функцију $g(x)$ Маклореновим полиномом $M_3(x)$ (степена 3).

б) Одредити граничну вредност

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos 5x)}{\ln(\cos 7x)}\,.$$

4. *(40 поена)* Испитати ток и скицирати график функције

$$y(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}\,.$$

E **II колоквијум из Математике 1** **E**

9. јануар 2012.

______________________ **презиме и име студента**

__________ **број индекса**

__________ **број поена на I колоквијуму (од 100)**

1. *(20 поена)* Испитати конвергенцију низа (a_n) чији је општи члан задат са

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2n}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2n+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2n+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+5n}}$$

и одредити граничну вредност $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ако постоји.

2. *(20 поена)* Дата је функција

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^3}, & x \neq 0 \\ E, & x = 0. \end{cases}$$

Одредити вредност параметра E тако да функција $h(x)$ буде непрекидна на $\mathbb{R}$.

3. *(20 поена)* Дата је функција

$$g\colon x \mapsto (x^2 - 2x + 1)\ln x \qquad \text{за } x \in (0, +\infty)\,.$$

а) Апроксимирати функцију $g(x)$ Тејлоровим полиномом $T_3(x)$ (степена 3) у околини тачке $x_0 = 1$.

б) Одредити граничну вредност

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x^3}\,.$$

4. *(40 поена)* Испитати ток и скицирати график функције

$$y(x) = \sqrt{\frac{x}{x+2}}\,.$$

Решења Д групе са II колоквијума из Математике 1

1. Сви сабирци су облика $\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3-2n+k}}$, где је $1\leqslant k\leqslant 5n+2$, закључујемо да у општем члану низа a_n имамо $5n+2$ сабирака.

Такође из $n^3+3n+2\leqslant n^3-2n+k\leqslant n^3-2n+1 \Rightarrow \sqrt[3]{n^3+3n+2}\leqslant\sqrt[3]{n^3-2n+k}\leqslant\sqrt[3]{n^3-2n+1}$, а одатле и $\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3+3n+2}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3-2n+k}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3-2n+1}}$, за свако k које задовољава $1\leqslant k\leqslant 5n+2$.

Стога имамо да важи $b_n=\dfrac{5n-2}{\sqrt[3]{n^3+3n+2}}\leqslant a_n\leqslant\dfrac{5n-2}{\sqrt[3]{n^3-2n+1}}=c_n$.

$$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{5n-2}{\sqrt[3]{n^3+3n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(5-\frac{2}{n})}{\sqrt[3]{n^3(1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2})}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}\,(5-\frac{2}{n})}{\cancel{n}\,\sqrt[3]{(1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2})}}=5.$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n=\lim_{n\to\infty}\frac{5n-2}{\sqrt[3]{n^3-2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(5-\frac{2}{n})}{\sqrt[3]{n^3(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}\,(5-\frac{2}{n})}{\cancel{n}\,\sqrt[3]{(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}}=5.$$

Како је $b_n\leqslant a_n\leqslant c_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\lim\limits_{n\to\infty} c_n=5$ на основу Леме о 2 полицајца имамо да је и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=5$, па стога низ (a_n) конвергира.

2. $h(x)=\dfrac{2x-\sin 2x}{x^3}$.

I *начин* Маклоренови развоји:

У $\sin t=t-\frac{t^3}{6}+o(t^3)$ када ставимо $t=2x$ добијамо $\sin 2x=2x-\frac{4x^3}{3}+o(x^3)$.

Тражена гранична вредност је $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-(2x-\frac{4x^3}{3}+o(x^3))}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{4x^3}{3}+o(x^3)}{x^3}=\frac{4}{3}$.

II *начин* 3 пута примењујемо Лопиталово правило:

$$\lim_{x\to 0} h(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-\sin 2x}{x^3}\underset{\frac{0}{0}}{\overset{\text{л.п.}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{2-2\cos 2x}{3x^2}\underset{\frac{0}{0}}{\overset{\text{л.п.}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{4\sin 2x}{6x}\underset{\frac{0}{0}}{\overset{\text{л.п.}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{8\cos 2x}{6}=\frac{4}{3}.$$

Како је $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=\frac{4}{3}$ и $h(0)=A$, да би функција $h(x)$ била непрекидна у $x=0$ мора да важи $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=h(0)$, одакле се добија да је за $A=\frac{4}{3}$ функција $h(x)$ непрекидна у $x=0$.

3. а) I *начин* Најбрже се ради помоћу Маклоренових развоја:

$\ln t=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+o(t^3)$, $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)$. У развој за $\ln(1+t)$ ставимо $t=-\frac{x^2}{2}$ и сви степени x-а већи од 3. „упадају“ у $o(x^3)$, па добијамо $\ln(\cos x)=-\frac{x^2}{2}+o(x^3)$.

Маклоренов полином фаункције $g(x)=x^3+\ln(\cos x)$ је $M_3(x)=x^3-\frac{x^2}{2}$, а тражена апроксимација је $g(x)\approx-\frac{1}{2}x^2\quad(x\approx 0)$.

II *начин* Рачунањем извода:

$g(x)=x^3+\ln(\cos x)\Rightarrow g(0)=0;\qquad g'(x)=3x^2-\dfrac{\sin x}{\cos x}=-\operatorname{tg}x\Rightarrow g'(0)=0;$

$g''(x)=6x+\dfrac{-1}{\cos^2 x}\Rightarrow g''(0)=-1;\qquad g'''(x)=6+\dfrac{-2\sin x}{\cos^3 x}\Rightarrow g'''(0)=6;$

$T_3(x)=-\frac{1}{2}x^2+x^3.$

$g(x)\approx-\frac{1}{2}x^2+x^3\quad(x\approx 0).$

б) Искористимо развој $\ln(\cos x)=-\frac{x^2}{2}+o(x^3)$ добијен у делу под а):

$\ln(\cos 5x)=-\frac{(5x)^2}{2}+o(x^3)=-\frac{25x^2}{2}+o(x^3)$ и $\ln(\cos 7x)=-\frac{(7x)^2}{2}+o(x^3)=-\frac{49x^2}{2}+o(x^3)$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\cos 5x)}{\ln(\cos 7x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{25x^2}{2}+o(x^3)}{-\frac{49x^2}{2}+o(x^3)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{25}{49}+o(1)=\frac{25}{49}.$$

4. $y(x)=\sqrt[3]{x^3-3x^2}$.

1° $D_y=(-\infty,+\infty)$.

2° Нуле су $x=0$ и $x=3$, $y(x)>0$ за $x\in(3,+\infty)$, а $y(x)<0$ за $x\in(-\infty,0)\cup(0,3)$.
Пресек са y-осом је $Y(0,0)$.

3° Како је $y(3)=0\neq y(-3)=-3\sqrt[3]{2}\Rightarrow y(x)$ није парна, а како је $y(3)=0\neq -y(-3)=3\sqrt[3]{2}\Rightarrow y(x)$ није непарна (тј. како нуле нису симетричне у односу на $x=0$ функција $y(x)$ није ни парна ни непарна).
Како се нуле функције $y(x)$ не понављају периодично то ни функција $y(x)$ није периодична.

4° Нема прекида у D_y $\Rightarrow y(x)$ нема вертикалних асимптота.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}y(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^3-3x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^3(1-\frac{3}{x})}=\lim\limits_{x\to-\infty}x\sqrt[3]{1-\frac{3}{x}}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3-3x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3(1-\frac{3}{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}x\sqrt[3]{1-\frac{3}{x}}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \text{нема хор.асимптота.}$$

I *начин* Преко лимеса за k и n:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt[3]{1-\frac{3}{x}}}{\cancel{x}}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{1-\frac{3}{x}}=1.$$

За следећи лимес користимо формулу за разлику кубова: $a^3-b^3=(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$.

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}y(x)-k\cdot x=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{x^3-3x^2}-1\cdot x=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-3x^2}-x\right)\cdot\frac{(\sqrt[3]{x^3-3x^2})^2+\sqrt[3]{x^3-3x^2}\cdot x+x^2}{(\sqrt[3]{x^3-3x^2})^2+\sqrt[3]{x^3-3x^2}\cdot x+x^2}$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-3x^2-x^3}{(\sqrt[3]{x^3-3x^2})^2+\sqrt[3]{x^3-3x^2}\cdot x+x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3x^{\cancel{2}}}{x^{\cancel{2}}\left((\sqrt[3]{1-\frac{3}{x}})^2+\sqrt[3]{1-\frac{3}{x}}+1\right)}=\frac{-3}{3}=-1.$$

$\Rightarrow$ има обострану косу асимптоту $y=x-1$.

II *начин* n се може добити и помоћу Лопиталовог правила:

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{x^3-3x^2}-x=\lim_{x\to\pm\infty}x\cdot\left(\sqrt[3]{1-\frac{3}{x}}-1\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(1-\frac{3}{x})^{1/3}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{3}\cdot(1-\frac{3}{x})^{-2/3}\cdot\frac{3}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=-1.$$

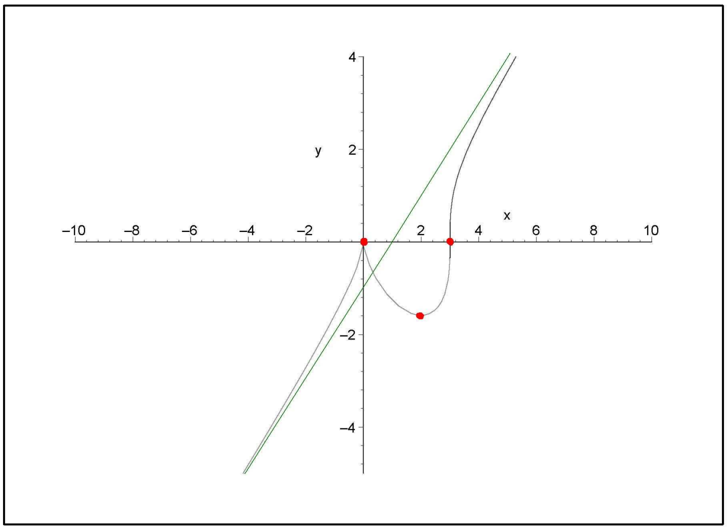
III *начин* Најбрже се ради помоћу Маклоренових развоја:

Већ смо видели да је $y(x)=x\sqrt[3]{1-\frac{3}{x}}=x(1-\frac{3}{x})^(1/3)$. Како је $(1+t)^\alpha=1+\alpha t+o(t)$, са $t=-\frac{3}{x}$ и $\alpha=\frac{1}{3}$ добијамо $y(x)=x(1-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{x}+o(\frac{1}{x}))=x-1+o(1)\Rightarrow$ има обострану косу асимптоту $y=x-1$.

5° $y'(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x^3-3x^2)^{2/3}}\Rightarrow y(x)$ је опадајућа ($\searrow$) на $(0,2)$, а растућа ($\nearrow$) на $(-\infty,0)$ и на $(2,+\infty)$ али **није** $\nearrow$ на $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$!!!

Функција $y(x)$ има лок. максимум $M_1(0,0)$ (ту је шпиц функције!) и локални минимум $M_2(2,-\sqrt[3]{4})$.

6° $y''(x)=\dfrac{-2x^2}{(x^3-3x^2)^{5/3}}\Rightarrow y(x)$ је конвексна ($\cup$) на $(-\infty,0)$ и на $(0,3)$, а конкавна ($\cap$) на $(3,+\infty)$ и превојна тачка је $P(0,0)$.



Резултати Е и Ф групе са II колоквијума из Математике 1

1. На основу Леме о 2 полицајца имамо да је и $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$, па стога низ (a_n) конвергира.

2. Како је $\lim_{x\to 0} h(x) = -\frac{1}{3}$ (може се добити или са 3 Лопиталова правила или коришћењем Маклоренових развоја за функције $\cos x$ и $\sin x$) и $h(0) = E$, да би функција $h(x)$ била непрекидна у $x = 0$ мора да важи $\lim_{x\to 0} h(x) = h(0)$, одакле се добија да је за $E = -\frac{1}{3}$ функција $h(x)$ непрекидна у $x = 0$.

3. Приметимо да је $g(x) = (x-1)^2 \ln x$. Стога је довољно одредити Тејлоров полином 1. степена функције $f(x) = \ln x$ у околини $x = 1$.

$f(x) = \ln x \Rightarrow f(1) = \ln 1 = 0$,

$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = 1$.

Стога је $f(x) = \ln x = x - 1 + o(x-1)$, па је тражена апроксимација

$g(x) = (x-1)^2 \cdot \ln x = (x-1)^2 \cdot (x - 1 + o(x-1)) = (x-1)^3 + o((x-1)^3)$.

4. Приметимо да је $y(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x+2}}$.

1° $D_y = (-\infty, -2) \cup [0, +\infty)$.

2° Има нулу $x = 0$, $y(x) > 0$ за остале $x \in D_y$, пресек са y-осом је $Y(0,0)$.

3° Како је домен D_y није симетричан у односу на $x = 0$ $\Rightarrow y(x)$ није ни парна ни непарна.
Како се нуле функције $y(x)$ не понављају периодично то ни функција $y(x)$ није периодична.

4° $\lim_{x\to -2^-} y(x) = +\infty \Rightarrow$ има вертикалну асимптоту $x = -2$.

$y(0) = 0$.

$\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = 1 \Rightarrow$ има обострану хоризонталну асимптоту $y = 1 \Rightarrow$ нема косе асимптоте.

5° $y'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}(x+2)^{3/2}} \Rightarrow y(x)$ је растућа ($\nearrow$) на $(-\infty, -2)$ и на $(0, +\infty)$ и нема има лок. минимум $M(0,0)$.

6° $y''(x) = \dfrac{-2x-1}{x^{3/2}(x+2)^{7/2}} \Rightarrow y(x)$ је конвексна ($\cup$) на $(-\infty, -2)$, а конкавна на $(0, +\infty)$ и превојних тачака нема.