
презиме и име студента

број индекса

1. У зависности од реалног параметара a решити систем:

$$\begin{array}{rrcrcl} ax & + & (a-1)y & + & z & = & 2a \\ (3a+3)x & + & ay & + & (a+3)z & = & 5 \\ (a+3)x & + & y & + & 2z & = & a. \end{array}$$

2. Дата је права p и тачке A и B :

$$p: \begin{cases} x+2y-5=0 \\ 2x+y+3z-4=0, \end{cases} \quad A(-2, 2, 3), \quad B(4, 2, -3).$$

а) Одредити једначину праве q која пролази кроз тачке A и B .

б) Одредити међусобни положај праве p и праве q .

в) Уколико постоји одредити раван π одређену правима p и q .

г) Одредити све праве r које секу и праву p и праву q под правим углом.

3. а) Израчунати (ако постоји):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n+3} \right)^{2n-3}.$$

б) Одредити тачке нагомилавања низа (a_n) ако је

$$a_n = \left(\frac{2n+1}{2n+3} \right)^{2n-3} + 2 \sin \frac{n\pi}{3}.$$

4. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \ln^2 x - 5 \ln x + 6.$$

презиме и име студента

број индекса

1. У зависности од реалног параметара b решити систем:

$$\begin{array}{rccccccc} (b+4)x & + & y & + & 2z & = & b+1 \\ (b+1)x & + & by & + & z & = & 2b+2 \\ (3b+6)x & + & (b+1)y & + & (b+4)z & = & 5. \end{array}$$

2. Дата је права a и тачке P и Q :

$$a : \begin{cases} x + y - 4z = 0 \\ 2x - y + z - 3 = 0, \end{cases} \quad P(-2, -6, 0), \quad Q(1, 3, 3).$$

а) Одредити једначину праве b која пролази кроз тачке P и Q .

б) Одредити међусобни положај праве a и праве b .

в) Уколико постоји одредити раван α одређену правима a и b .

г) Одредити све праве c које секу и праву a и праву b под правим углом.

3. а) Израчунати (ако постоји):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{2n+3} \right).$$

б) Одредити тачке нагомилавања низа (a_n) ако је

$$a_n = (-1)^n \left(\frac{2n+1}{2n+3} \right) + 4 \cos \frac{n\pi}{4}.$$

4. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = 4 \ln x - \ln^2 x - 3.$$

III Писмени испит из математике 1 – други део III

11. септембар 2011.

III група

презиме и име студента

број индекса

1. а) Израчунати (ако постоји):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{2n+3} \right).$$

б) Одредити тачке нагомилавања низа (a_n) ако је

$$a_n = (-1)^n \left(\frac{2n+1}{2n+3} \right) + 4 \cos \frac{n\pi}{4}.$$

2. Дата је функција

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2e^{e^{-x}} - 1 + \sin 2x - 2 - 2x^2}{x^3}, & x \neq 0 \\ \frac{3}{8}, & x = 0. \end{cases}$$

а) Написати Маклоренове полиноме трећег степена за функције $e^{e^{-x}} - 1$ и $\sin 2x$.

б) Израчунати $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

в) Да ли је функција $f(x)$ непрекидна у тачки $x = 0$?

3. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = 4 \ln x - \ln^2 x - 3.$$

Резултати и упутства за I групу

1. сличан са задатком 2.69 з) из „Методичке збирке решених задатака из Математике 1“

Детерминанте су: $\Delta = a^3 - a^2 = a^2(a - 1)$, $\Delta_x = a^3 + 3a^2 - 19a + 15 = (a - 1) \cdot (a^2 + 4a - 15)$, $\Delta_y = a^3 + 14a - 15 = (a - 1) \cdot (a^2 + a + 15)$ и $\Delta_z = -4a^3 + 5a^2 + 14a - 15 = -(a - 1) \cdot (4a^2 - a - 15)$.

За $a(a - 1) \neq 0$ систем има јединствено решење:

$$(x, y, z) = \left(\frac{a^2 + 4a - 15}{a^2}, \frac{a^2 + a + 15}{a^2}, \frac{-4a^2 + a + 15}{a^2} \right).$$

За $a = 1$ систем има вишеструко решење: $(x, y, z) = (2 - t, -7 + 2t, t) \quad t \in \mathbb{R}$.

За $a = 0$ систем нема решења.

2. сличан са задацима 4.16, 4.30 и 4.52 из „Методичке збирке решених задатака из Математике 1“

Права p : $\begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ 2x + y + 3z - 4 = 0 \end{cases}$, кад се реши систем је задата са $x = 1 - 2t$, $y = t + 2$, $z = t$, $t \in \mathbb{R}$, па је њен вектор правца $\vec{v}_p = (-2, 1, 1)$, а једна тачка $P(1, 2, 0)$.

а) Права q је дата са $q: \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-1}$, па је њен вектор правца $\vec{v}_q = (1, 0, -1)$, а једна тачка $A(-2, 2, 3)$.

б) Како је $\vec{v}_p \times \vec{v}_q = (1, 1, 1) \neq (0, 0, 0)$ и $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 & -2 & 3 & -0 \\ -2 & & 1 & & 1 & \\ 1 & & 0 & & -1 & \end{vmatrix} = 0$, то се праве p и q секу у тачки.

в) За раван π је $n_\pi = \vec{v}_p \times \vec{v}_q = (1, 1, 1)$, а како она садржи рецимо тачку $P(1, 2, 0)$ њена једначина је $\pi: 1 \cdot (x - 1) + 1 \cdot (y - 2) + 1 \cdot (z - 0) = 0$, тј. $\pi: x + y + z - 3 = 0$.

г) Постоји само једна права r која сече и праву p и праву q под правим углом. Она пролази кроз пресечну тачку ових правих $T(0, 2, 1)$, а вектор правца јој је $\vec{v}_r = \vec{n}_\pi = (1, 1, 1)$, па је њена једначина $r: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{1}$.

3. сличан са задацима 5.13 б) и 5.15 из „Методичке збирке решених задатака из Математике 1“

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n+3} \right)^{2n-3} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$.

б) Тачке нагомилавања низа (a_n) су: e^{-2} , $e^{-2} + \sqrt{3}$ и $e^{-2} - \sqrt{3}$.

4. *сличан са задатком 9.20 из „Методичке збирке решених задатака из Математике 1“*

Функција $f(x) = (\ln x)^2 - 5 \ln x + 6$.

1° Домен је $D_f = (0, +\infty)$.

2° Нуле су $x = e^2$ и $x = e^3$ (увести смену $t = \ln x$). Знак: x 0 $+$ e^2 $-$ e^3 $+$. Нема пресек са y -осом.

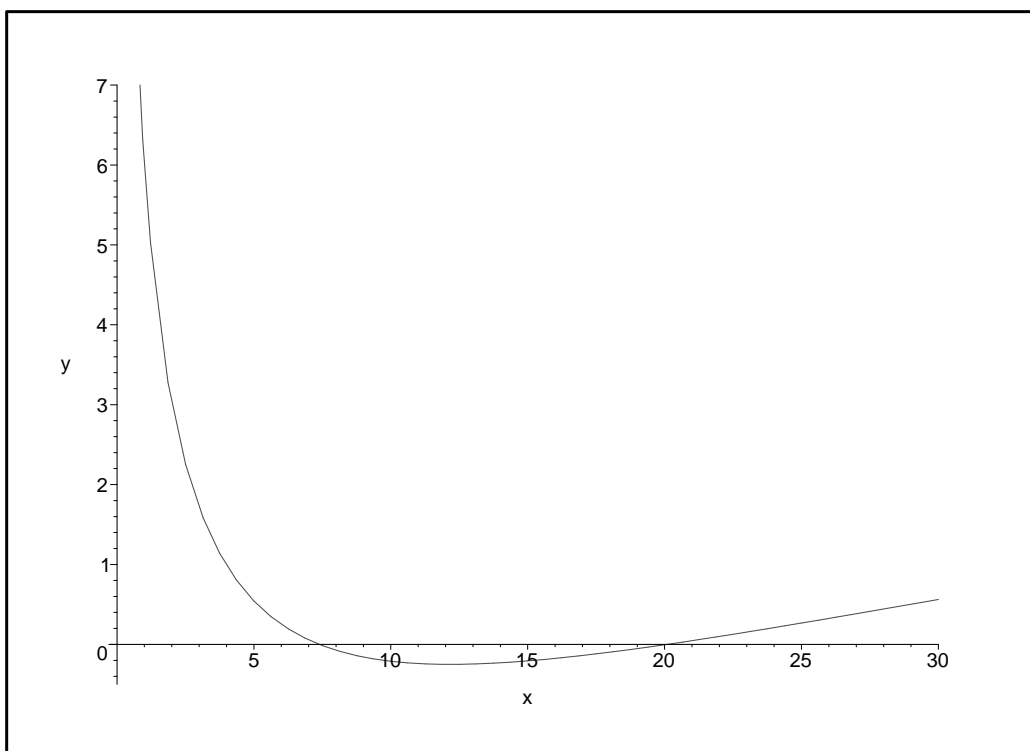
3° Није ни парна, ни непарна (јер домен није симетричан у односу на $x = 0$), ни периодична (јер се нуле не понављају периодично).

4° $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Вертикална асимптота је $x = 0$, нема десну хоризонталну, ни десну косу асимптоту.

5° $f' = \frac{2 \ln x - 5}{x}$. Монотоност: x 0 \searrow $e^{5/2}$ \nearrow . Лок. минимум је $M(e^{5/2}, -\frac{1}{4})$.

6° $f'' = \frac{7 - 2 \ln x}{x^2}$. Конвексност: x 0 \cup $e^{7/2}$ \cap . Превојна тачка је $P(e^{7/2}, \frac{3}{4})$.



Упутства за II групу

1. сличан са задатком 2.69 з) из „Методичке збирке решених задатака из Математике 1“

Детерминанте су: $\Delta = b^3 + 2b^2 + b = b(b+1)^2$, $\Delta_x = b^3 + 6b^2 - 10b = b \cdot (b^2 + 6b - 10)$, $\Delta_y = b^3 + 3b^2 + 17b = b \cdot (b^2 + 3b + 17)$ и $\Delta_z = -4b^3 - 7b^2 + 12b = b \cdot (-4b^2 - 7b + 12)$.

За $b(b+1) \neq 0$ систем има јединствено решење:

$$(x, y, z) = \left(\frac{b^2 + 6b - 10}{(b+1)^2}, \frac{b^2 + 3b + 17}{(b+1)^2}, \frac{-4b^2 - 7b + 12}{(b+1)^2} \right).$$

За $b = 0$ систем има вишеструко решење: $(x, y, z) = (2 - t, -7 + 2t, t) \quad t \in \mathbb{R}$.

За $b = -1$ систем нема решења.

2. сличан са задацима 4.16, 4.30 и 4.52 из „Методичке збирке решених задатака из Математике 1“

Права a : $\begin{cases} x + y - 4z = 0 \\ 2x - y + z - 3 = 0, \end{cases}$ кад се реши систем је задата са $x = 1 + t$, $y = 3t - 1$, $z = t$, $t \in \mathbb{R}$, па је њен вектор правца $\vec{v}_a = (1, 3, 1)$, а једна тачка $A(1, -1, 0)$.

а) Права b је дата са b : $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-3}{1}$ (доле у разломцима могу бити и 3, 9, 3 или -3, -9, -3), па је њен вектор правца $\vec{v}_b = (1, 3, 1)$, а једна тачка $Q(1, 3, 3)$.

б) Како је $\vec{v}_a = \vec{v}_b$ или $\vec{v}_a \times \vec{v}_b = (0, 0, 0)$ и како $Q \notin a$, то су праве a и b (чисто) паралелне.

в) За раван π можемо узети $\vec{n}_\pi = \vec{v}_p \times \vec{AQ} = (1, -1, 2)$, а како она садржи рецимо тачку $Q(1, 3, 3)$ њена једначина је π : $1 \cdot (x-1) + (-1) \cdot (y-3) + 2 \cdot (z-3) = 0$, тј. π : $x - y + 2z - 4 = 0$.

г) Постоји бесконачно много правих c које секу и праву a и праву b под правим углом. Вектор правца сваке од тих правих је $\vec{v}_c = \vec{n}_\pi \times \vec{v}_a = (-7, 1, 4)$. Тачка сваке од тих правих је нека тачка праве a , тј. $C(1+t, 3t-1, t)$, па је једначина свих тих правих r : $\frac{x-1-t}{-7} = \frac{y-3t+1}{1} = \frac{z-t}{4}$, за $t \in \mathbb{R}$.

3. сличан са задацима 5.13 б) и 5.15 из „Методичке збирке решених задатака из Математике 1“

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{2n+3} \right)$ не постоји јер кад је $n = 2k$ овај подниз тежи 1, а кад је $n = 2k-1$ овај подниз тежи -1.

б) Први сабирак у општем члану низа (a_n) , $(-1)^n \left(\frac{2n+1}{2n+3} \right)$, има 2 тачке нагомилавања:

1 (за $n = 2k$) и -1 (за $n = 2k-1$).

Други сабирак у општем члану низа (a_n) , $4 \cos \frac{n\pi}{4}$, има 5 тачака нагомилавања:

4 (за $n = 8m$), $2\sqrt{2}$ (за $n = 8m \pm 1$), 0 (за $n = 8m \pm 2$), $-2\sqrt{2}$ (за $n = 8m \pm 3$) и -4 (за $n = 8m + 4$).

Када то спојимо, добијамо да низа (a_n) има 5 тачака нагомилавања:

5 ($n = 8m$), $2\sqrt{2} - 1$ (за $n = 8m \pm 1$), 1 (за $n = 8m \pm 2$), $-2\sqrt{2} - 1$ (за $n = 8m \pm 3$) и -3 (за $n = 8m + 4$).

4. сличан са задатком 9.20 из „Методичке збирке решених задатака из Математике 1“ – само $f(-x)$

Функција $f(x) = -(\ln x)^2 + 4 \ln x - 3$.

1° Домен је $D_f = (0, +\infty)$.

2° Нуле су $x = e$ и $x = e^3$. Знак: x 0 $-$ e $+$ e^3 $-$. Нема пресек са y -осом.

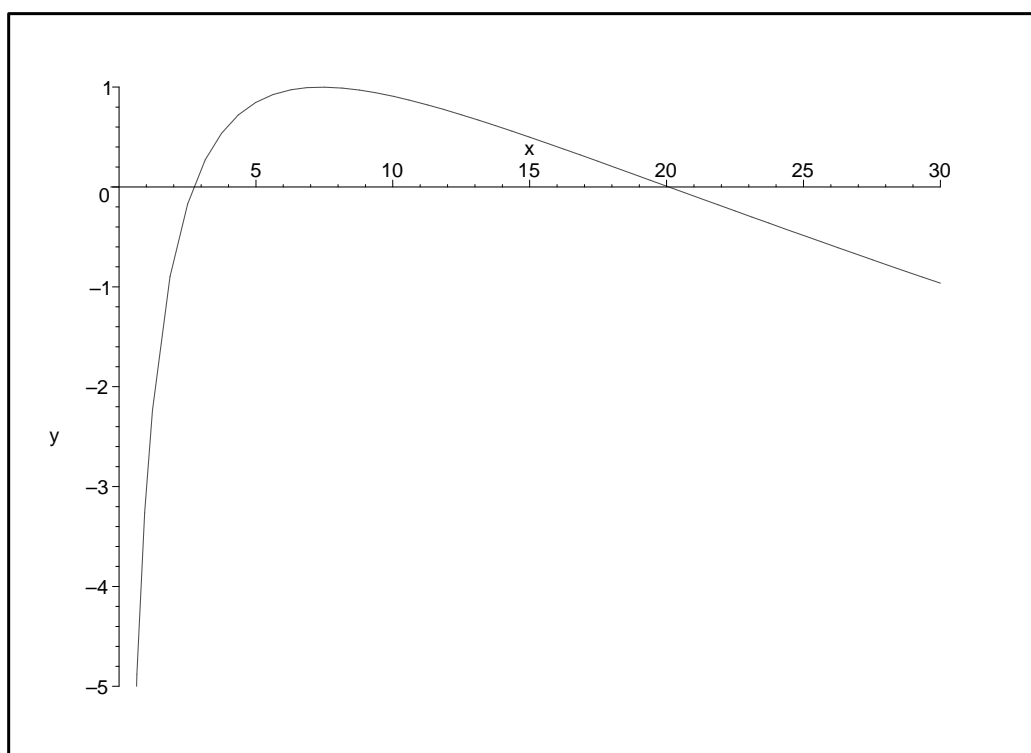
3° Није ни парна, ни непарна (јер домен није симетричан у односу на $x = 0$), ни периодична (јер се нуле не понављају периодично).

4° $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Вертикална асимптота је $x = 0$, нема десну хоризонталну, ни десну косу асимптоту.

5° $f' = \frac{4 - 2 \ln x}{x}$. Монотоност: x 0 \nearrow e^2 \searrow . Лок. минимум је $M(e^2, 1)$.

6° $f'' = \frac{2 \ln x - 6}{x^2}$. Конвексност: x 0 \cap e^3 \cup . Превојна тачка је $P(e^3, 0)$.



Резултати и упутства за III групу – поправни колоквијум

1. *исти као 3. задатак II групе*

2. *сличан са задатком 8.33 из „Методичке збирке решених задатака из Математике 1“*

а) Маклоренови развоји су: $e^{-x} - 1 = 1 - x + x^2 - \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)$, $\sin 2x = 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$.

б) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -3$.

в) Функција $f(x)$ није непрекидна у тачки $x = 0$ јер је $-3 \neq \frac{3}{8}$, тј. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$.

3. *исти као 4. задатак II групе*