

---

презиме и име студента

---

број индекса

1. Решити матричну једначину:

$$AX - B^T = 2X + I$$

где су матрице дате са  $A := \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$  и  $B := \begin{bmatrix} -6 & 7 & 19 \\ 0 & 9 & 10 \\ -6 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ .

2. У зависности од реалног параметара  $a$  решити систем:

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & - & z & + & 2w & = & 4 \\ 2x & + & 4y & - & 2z & + & (5-a)w & = & 2a+6 \\ -3x & - & 6y & + & z & + & (a-7)w & = & -12 \end{array}.$$

3. а) Одредити Маклоренове полиноме трећег степена функција  $g(x) = e^{x-x^2}$  и  $h(x) = \sqrt{1+3x}$ .

б) Израчунати:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4e^{x-x^2} - 8\sqrt{1+3x} + 4 + 8x - 7x^2}{x^3}.$$

4. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 9}.$$



# III Писмени испит из математике 1 – други део III

11. септембар 2011.

III група

---

презиме и име студента

---

број индекса

1. Дата је функција

$$f: x \mapsto \frac{e^{2-x}}{x-x^2}.$$

а) Израчунати

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

б) Који закључак (по питању асимптота) добијамо на основу ових лимеса.

2. а) Одредити Маклоренове полиноме трећег степена функција  $g(x) = \cos(x-x^2)$  и  $h(x) = \ln(1+3x)$ .

б) Израчунати:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x-x^2) - \ln(1+3x) - 1 + 3x - 4x^2}{x^3}.$$

3. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^3 - 5}{x^2 - 3}.$$

## Резултати и упутства за I групу

### 1. задатак 2.130 а) из „Методичке збирке решених задатака из Математике 1“

Када пребацимо  $X$  на једну страну, а остало на другу добијамо  $AX - 2X = B^T + I$ , тј.

$$(A - 2I)X = B^T + I$$

и кад то помножимо са инверзном матрицом  $(A - 2I)^{-1}$  са леве стране (морате водити са које стране је  $X$  и са те стране га извући – овде са десне, а онда кад помножимо инверзна мора да буде уз  $(A - 2I)$  да би се скратили!) добијамо:

$$X = (A - 2I)^{-1} \cdot (I + B^T) = \begin{bmatrix} 10 & -7 & 6 \\ -7 & 5 & -4 \\ -8 & 6 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 0 & -6 \\ 7 & 10 & 0 \\ 19 & 10 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -10 & -24 \\ -6 & 10 & 18 \\ -13 & 10 & 18 \end{bmatrix}.$$

### 2. сличан са задацима 2.77 или 2.78 из „Методичке збирке решених задатака из Математике 1“

Када се систем сведе на степенасти облик (напоменимо да смо променили редослед II и III једначине) добија се:

$$\begin{array}{rclcl} x & + & 2y & - & z & + & 2w & = & 4 \\ & & & - & 2z & + & (a-1)w & = & 0 \\ & & & & & (1-a)w & = & 2a-2 & . \end{array}$$

За одређивање случајева битни су нам само коефицијенти на „почетку степеница“:

$$1 \text{ (уз } x), \quad -2 \text{ (уз } z), \quad 1-a \text{ (уз } w).$$

Зато имамо само 2 случаја: 1°  $a \neq 1$  и 2°  $a = 1$ . У оба случаја систем има вишеструко решење, али само у првом оно зависи од 1 параметра, а у другом од 2:

1°  $a \neq 1$  решење је  $(x, y, z, w) = (9 - a - 2t, t, 1 - a, -2) \quad t \in \mathbb{R}$ ;

2°  $a = 1$  решење је  $(x, y, z, w) = (4 - 2r - 2s, r, 0, s) \quad r, s \in \mathbb{R}$ .

### 3. сличан са задатком 8.30 из „Методичке збирке решених задатака из Математике 1“

а) Из Маклоренових развоја имамо да су  $g(x)$  и  $h(x)$ :

$$\begin{aligned} e^{x-x^2} &= 1 + \frac{(x-x^2)}{1!} + \frac{(x-x^2)^2}{2!} + \frac{(x-x^2)^3}{3!} + o(x^3) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6}x^3 + o(x^3) \\ \sqrt{1+3x} &= (1+3x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot 3x + \left(\frac{1/2}{2}\right) \cdot (3x)^2 + \left(\frac{1/2}{3}\right) \cdot (3x)^3 + o(x^3) = 1 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{8}x^2 + \frac{27}{16}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Одатле су тражени Маклоренови полиноми  $T_{3,g(x)}(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6}x^3$  и  $T_{3,h(x)}(x) = 1 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{8}x^2 + \frac{27}{16}x^3$ .

б) Кад претходне развоје убацимо у лимес добијамо

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4e^{x-x^2} - 8\sqrt{1+3x} + 4 + 8x - 7x^2}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cdot (1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)) - 8 \cdot (1 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{8}x^2 + \frac{27}{16}x^3 + o(x^3)) + 4 + 8x - 7x^2}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 + 4x - 2x^2 - \frac{10}{3}x^3 - 8 - 12x + 9x^2 - \frac{27}{2}x^3 + 4 + 8x - 7x^2 + o(x^3)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{101}{6}x^3 + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{101}{6} + o(1) = -\frac{101}{6}. \end{aligned}$$

4. сличан са задатком 9.14 из „Методичке збирке решених задатака из Математике 1“

Функција  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 9}$ .

1° Домен је  $D_f = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$ .

2° Нула је  $x = 0$ . Знак:  $- \text{ } -3 \text{ } + \text{ } \boxed{0} \text{ } - \text{ } 3 \text{ } +$ . Пресек са  $y$ -осом је  $Y(0, 0)$ .

3° Функција је непарна (јер је  $f(-x) = -f(x)$ ; зато је њен график симетричан у односу на координатни почетак) и није периодична (јер се нуле не понављају периодично).

4°  $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty$  и  $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = +\infty \Rightarrow$  права  $x = -3$  је вертикална асимптота (са обе стране).

$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$  и  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty \Rightarrow$  права  $x = 3$  је вертикална асимптота (са обе стране).

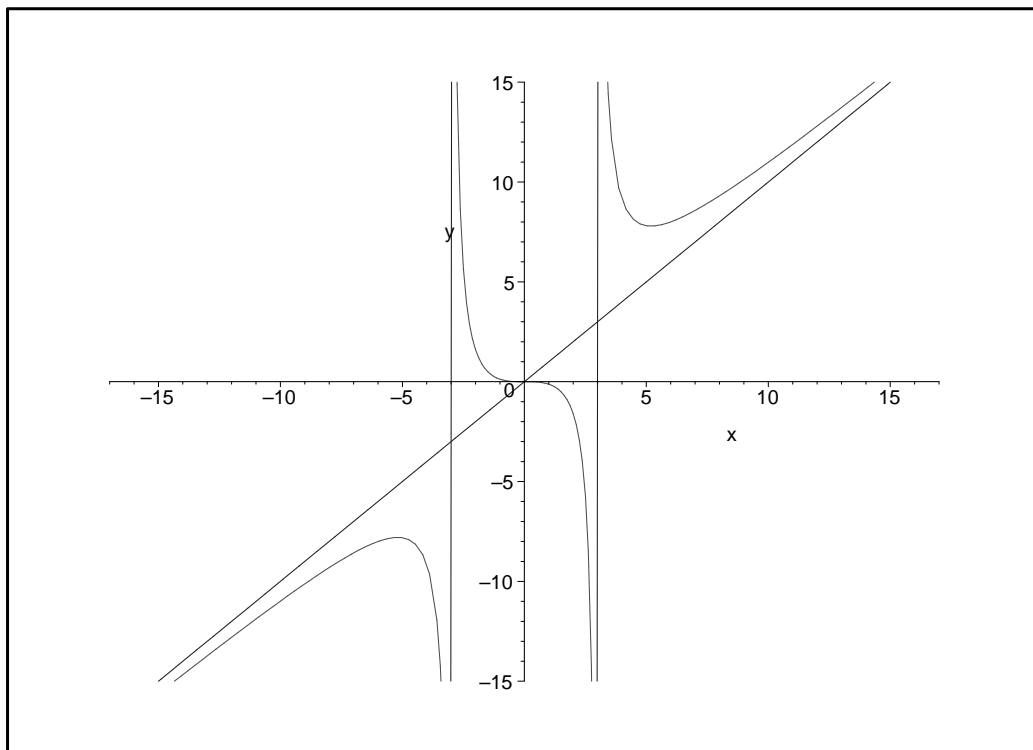
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  и  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow f(x)$  нема хоризонталне асимптоте.

$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$  и  $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - k \cdot x = 0 \Rightarrow$  права  $y = x$  је обострана коса асимптота.

5°  $f' = \frac{x^4 - 27x^2}{(x^2 - 9)^2} = \frac{x^2(x^2 - 27)}{(x^2 - 9)^2}$ . Монотоност:  $\nearrow \boxed{-3\sqrt{3}} \searrow -3 \searrow \boxed{0} \searrow 3 \searrow \boxed{3\sqrt{3}} \nearrow$ .

Лок. максимум је  $M_1(-3\sqrt{3}, -\frac{9\sqrt{3}}{2})$ , а лок. минимум је  $M_2(3\sqrt{3}, \frac{9\sqrt{3}}{2})$ .

6°  $f'' = \frac{18x(x^2 + 27)}{(x^2 - 9)^3}$ . Конвексност:  $\cap -3 \cup \boxed{0} \cap 3 \cup$ . Превојна тачка је  $P(0, 0)$ .



## Упутства за II групу

### 1. задатак 2.130 а) из „Методичке збирке решених задатака из Математике 1“

Када пребацимо  $X$  на једну страну, а остало на другу добијамо  $XA + 3X = I - B^T$ , тј.

$$X(A + 3I) = I - B^T$$

и кад то помножимо са инверзном матрицом  $(A + 3I)^{-1}$  са десне стране (морате водити са које стране је  $X$  и са те стране га извући – овде са леве, а онда кад множимо инверзна мора да буде уз  $(A + 3I)$  да би се скратили!) добијамо:

$$X = (I - B^T) \cdot (A + 3I)^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & -6 & -19 \\ -5 & -1 & -11 \\ -3 & 4 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 29 & -8 & 2 \\ 11 & -3 & 1 \\ -14 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

### 2. сличан са задацима 2.77 или 2.78 из „Методичке збирке решених задатака из Математике 1“

Када се систем сведе на степенасти облик (напоменимо да смо променили редослед II и III једначине) добија се:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} x & - & 3y & + & & z & = & 1 \\ & & y & - & & 3z & = & 1 \\ & & & & (b-5)z & = & b-5 \\ & & & & 0 & = & b+4 \end{array}$$

Имамо само 2 случаја:

1°  $b \neq -4$  због последње једначине систем нема решења;

2°  $b = -4$  (онда је и аутоматски  $b - 5 \neq 0$ , па III једначину можемо да поделимо са  $b - 5$ )

тада има јединствено решење  $(x, y, z) = (12, 4, 1)$ .

**Напомена.** Не може  $b$  истовремено бити и 5 и  $-4!!!$  Стога не постоји случај  $4^\circ b = 5, b = -4$ , а поготово што велики број студената у том случају добије да има бесконачно много решења!!!

### 3. сличан са задатком 8.30 из „Методичке збирке решених задатака из Математике 1“

а) Из Маклоренових развоја имамо да су  $g(x)$  и  $h(x)$ :

$$\begin{aligned} \cos(x - x^2) &= 1 - \frac{(x - x^2)^2}{2!} + o(x^3) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + x^3 + o(x^3) \\ \ln(1 + 3x) &= \frac{3x}{1!} - \frac{(3x)^2}{2} + \frac{(3x)^3}{3} + o(x^3) = 3x - \frac{9}{2}x^2 + 9x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Одатле су тражени Маклоренови полиноми  $T_{3,g(x)}(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + x^3$  и  $T_{3,h(x)}(x) = 3x - \frac{9}{2}x^2 + 9x^3$ .

б) Кад претходне развоје убацимо у лимес добијамо

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x - x^2) - \ln(1 + 3x) - 1 + 3x - 4x^2}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + x^3 + o(x^3) - (3x - \frac{9}{2}x^2 + 9x^3 + o(x^3)) - 1 + 3x - 4x^2}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-8x^3 + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} -8 + o(1) = -8. \end{aligned}$$

4. сличан са задатком 9.14 из „Методичке збирке решених задатака из Математике 1“

Функција  $f(x) = \frac{x^3 - 5}{x^2 - 3}$ .

1° Домен је  $D_f = (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ .

**Напомена.** Велики број студената је добио тачно  $x \neq \pm\sqrt{3}$ , али онда избаци цео сегмент  $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ , уместо само те 2 тачке!!!

2° Нула је  $x = \sqrt[3]{5}$ . Знак:  $- \text{ } -\sqrt{3} + \boxed{\sqrt[3]{5}} - \sqrt{3} +$ . Пресек са  $y$ -осом је  $Y(0, \frac{5}{3})$ .

**Напомена.** Да је  $\sqrt[3]{5} < \sqrt{3}$  најлакше показујемо тако што степењујемо на 6 (сметмо то да радимо јер су оба броја позитивни):

$$(\sqrt[3]{5})^6 < (\sqrt{3})^6, \quad \text{тј.} \quad 25 = 5^2 < 3^3 = 27.$$

3° Функција није ни парна ни непарна (јер је  $f(1) = 2$  и  $f(-1) = 3$  па не важи ни  $f(-x) = f(x)$  ни  $f(-x) = -f(x)$ ) и није периодична (јер се нуле не понављају периодично).

4°  $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}^-} f(x) = -\infty$  и  $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}^+} f(x) = +\infty \Rightarrow$  права  $x = -\sqrt{3}$  је верт. асимптота (са обе стране).

$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^-} f(x) = -\infty$  и  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^+} f(x) = +\infty \Rightarrow$  права  $x = \sqrt{3}$  је вертикална асимптота (са обе стране).

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  и  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow f(x)$  нема хоризонталне асимптоте.

$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$  и  $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - k \cdot x = 0 \Rightarrow$  права  $y = x$  је обострана коса асимптота.

5°  $f' = \frac{x^4 - 9x^2 + 10x}{(x^2 - 3)^2} = \frac{x(x-2)(x^2 + 2x - 5)}{(x^2 - 3)^2}$ . За његове 2 ирационалне нуле (оне су решења квадратне једначине) важи  $-4 < -1 - \sqrt{6} < -3$  и  $1 < -1 + \sqrt{6} < 2$ .

Монотоност:  $\nearrow \boxed{-1 - \sqrt{6}} \searrow -\sqrt{3} \searrow \boxed{0} \nearrow -1 + \sqrt{6} \searrow \sqrt{3} \searrow \boxed{2} \nearrow$ .

Локални максимуми су  $M_1(-1 - \sqrt{6}, -\frac{3(8+3\sqrt{6})}{2(2+\sqrt{6})})$  и  $M_3(-1 + \sqrt{6}, -\frac{3(8-3\sqrt{6})}{2(-2+\sqrt{6})})$ , а локални минимуми су  $M_2(0, \frac{5}{3})$  и  $M_4(2, 3)$ .

6°  $f'' = \frac{6x^3 - 30x^2 + 54x - 30}{(x^2 - 3)^3} = \frac{6(x-1)(x^2 - 4x + 5)}{(x^2 - 3)^3}$ . Конвексност:  $\cap -\sqrt{3} \cup \boxed{1} \cap \sqrt{3} \cup$ . Превојна тачка је  $P(1, 2)$ .

