I Писмени испит из математике 1 I

27. јануар 2013.

I група

презиме и име студента **број индекса**

1. (*25 поена*) стр: ____________________

Нека је $\mathcal{A} = \{(x,y,z)\colon x,y,z \in \mathbb{R},\ x \neq 0,\ x \neq y,\ z > 0\}$ и ако је операција $*$ дефинисана са

$$(x,y,z) * (u,v,w) = (xu + vy, xv + uy, wz).$$

Испитати да ли је структура $(\mathcal{A}, *)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{A}, *)$ Абелова група?

2. (*25 поена*) стр: ____________________

Дате су једначине равни α и β:

$$\alpha\colon x + 3y + z - 7 = 0 \qquad \text{и} \qquad \beta\colon 2x + 3y - z - 8 = 0.$$

а) Одредити њихове векторе нормала $\vec{n}_\alpha$ и $\vec{n}_\beta$.

б) Одредити произвољне тачке $A \in \alpha$ и $B \in \beta$.

в) Испитати узајамни положај равни α и β.

г) Уколико се равни α и β секу одредити једначину њихове пресечне праве p у канонском облику, као и угао $\sphericalangle(\alpha, \beta)$ између равни α и β, а ако се не секу одредити растојање између равни α и β, као и једначину заједничке нормале n на равни α и β која пролази кроз тачку A.

3. (*25 поена*) стр: ____________________

а) Одредити Маклоренове полиноме трећег степена функција $g(x) = e^{-x-x^2}$ и $h(x) = \sqrt{1-3x}$.

б) Израчунати:

$$\lim_{x \to 0} \frac{4e^{-x-x^2} - 8\sqrt{1-3x} + 4 - 8x - 7x^2}{x^3}.$$

4. (*25 поена*) стр: ____________________

Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{2 - \ln(3-x)}{x-3}.$$

У вежбанци означити бројеве страница: 0 је бела страна на корицама (на полеђини оне где сте унели податке), 1 прва страна на квадратиће, ... , 12 је последња страна на квадратиће, а 13 и 14 су последње беле стране (на последњем листу корица).

Код текста сваког задатка унесите бројеве страна на којим сте га радили (или / ако нисте)!

II Писмени испит из математике 1 II

27. јануар 2013.

II група

презиме и име студента **број индекса**

1. (*25 поена*) стр: ______________________

У зависности од реалних параметара a и b решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & + & z & + & 2t & = & -3 \\ 2x & + & 3y & - & (a+2)z & + & t & = & b+4 \\ -x & + & y & + & 2z & - & (b-1)t & = & -6 \end{array}$$

2. (*25 поена*) стр: ______________________

Дате су права $p\colon \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-2}{1}$ и раван $\alpha\colon 2x - 3y + z = 5$ у простору.

а) Одредити међусобни положај праве p и равни α.

б) Наћи праву q симетричну правој p у односу на раван α.

в) Колики је угао између праве p и равни α, $\sphericalangle(p, \alpha)$?

3. (*25 поена*) стр: ______________________

Испитати конвергенцију низа (a_n) задатог са

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+3n-2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+27n+1}}\,.$$

Уколико је низ (a_n) конвергентан израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

4. (*25 поена*) стр: ______________________

Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = (x^2+x)e^{-1/x}\,.$$

У вежбанци означити бројеве страница: 0 је бела страна на корицама (на полеђини оне где сте унели податке), 1 прва страна на квадратиће, ... , 12 је последња страна на квадратиће, а 13 и 14 су последње беле стране (на последњем листу корица).

Код текста сваког задатка унесите бројеве страна на којим сте га радили (или / ако нисте)!

III Писмени испит из математике 1 III

27. јануар 2013.

III група

презиме и име студента **број индекса**

1. (*25 поена*) стр: ____________________

У зависности од реалних параметара c и d решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & & & + & cz & = & c+1 \\ & & y & - & 2z & = & 1 \\ dx & + & 4y & + & z & = & d+1 \end{array}$$

2. (*25 поена*) стр: ____________________

Дате су тачке $A(2,-1,1)$, $B(3,2\alpha,1)$, $C(4,2,\alpha+2)$ и $D(5,1,\alpha)$ у простору.
За вредности параметра 1° $\alpha=0$ и 2° $\alpha=1$, урадити следеће:

а) Одредити једначину равни π одређену тачкама A, B и C.

б) Наћи растојање тачке D од равни π.

в) Уколико су вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ линеарно зависни одредити ту зависност.

3. (*25 поена*) стр: ____________________

Дата је функција $g\colon(-\infty,\frac{1}{3})\to\mathbb{R}$ са

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin\big(2\ln(1-3x)\big)+6x+9x^2}{2x^3}, & x\neq 0\\ K, & x=0\end{cases}.$$

а) Одредити Маклоренове полиноме трећег степена функција $\sin(2t)$, $\ln(1-3x)$ и $\sin\big(2\ln(1-3x)\big)$.

б) Израчунати $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

в) У зависности од параметра K испитати да ли је функција $g(x)$ непрекидна.

4. (*25 поена*) стр: ____________________

Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{x+2}}.$$

У вежбанци означити бројеве страница: 0 је бела страна на корицама (на полеђини оне где сте унели податке), 1 прва страна на квадратиће, ... , 12 је последња страна на квадратиће, а 13 и 14 су последње беле стране (на последњем листу корица).

Код текста сваког задатка унесите бројеве страна на којим сте га радили (или / ако нисте)!

IV Писмени испит из математике 1 IV

27. јануар 2013.

IV група

______________________________ ______________

презиме и име студента **број индекса**

1. (*25 поена*) стр: ______________________

Решити матричну једначину:

$$3X = A^T + BX$$

где су матрице дате са $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

2. (*25 поена*) стр: ______________________

Дате су праве p и q у простору:

$$p\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{m} \qquad \text{и} \qquad q\colon \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 2x - y - z = 0. \end{cases}$$

а) Одредити вредност реалног параметра m тако да се праве p и q секу.

б) За вредност параметра m одређеног у делу а) одредити координате пресечне тачке T правих p и q.

в) За вредност параметра m одређеног у делу а) одредити једначину равни π која садржи праве p и q.

г) За вредност параметра m одређеног у делу а) одредити величину угла φ између праве p и q.

3. (*25 поена*) стр: ______________________

Дата је функција

$$f(x) = e^{x^2-2x}.$$

а) Одредити Маклоренов полином другог степена функције $f(x)$.

б) Израчунати:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - \sqrt{1-x^2}}{2x^2+3x}.$$

4. (*25 поена*) стр: ______________________

Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{4-x}}.$$

У вежбанци означити бројеве страница: 0 је бела страна на корицама (на полеђини оне где сте унели податке), 1 прва страна на квадратиће, ... , 12 је последња страна на квадратиће, а 13 и 14 су последње беле стране (на последњем листу корица).

Код текста сваког задатка унесите бројеве страна на којим сте га радили (или / ако нисте)!

Решења I групе

1. Како је нпр.

$$(1,5,2)*(-5,1,3)=(1\cdot(-5)+1\cdot 5, 1\cdot 1+(-5)\cdot 5, 3\cdot 2)=(0,-24,6)$$

и из $1\neq 0$, $1\neq 5$, $2>0 \Rightarrow (1,5,2)\in\mathcal{A}$, као и из $-5\neq 0$, $-5\neq 1$, $3>0 \Rightarrow (-5,1,3)\in\mathcal{A}$, док због прве координате 0 важи $(1,5,2)*(-5,1,3)=(0,-24,6)\notin\mathcal{A}$, па имамо да не важи затвореност операције $*$ у скупу $\mathcal{A}$.

Самим тим $(\mathcal{A},*)$ није ни група, ни Абелова група.

2. $\alpha\colon x+3y+z-7=0$ и $\beta\colon 2x+3y-z-8=0$.

а) $\vec{n}_\alpha=(1,3,1)$ и $\vec{n}_\beta=(2,3,-1)$.

б) Две координате фиксирамо, нпр. $x=y=0$, а трећу израчунамо: $A(0,0,7)$ и $B(0,0,8)$.

в) Равни α и β нису паралелне (нити се поклапају) јер вектори $\vec{n}_\alpha$ и $\vec{n}_\beta$ нису пропорционални (јер не важи $1:2=3:3=1:(-1)$, па није $\vec{n}_\alpha=k\cdot\vec{n}_\beta$), па се равни α и β секу (по правој p).

г) Пресечну праву p добијамо када решимо систем $x+3y+z-7=0$, $2x+3y-z-8=0$: $x=1+2t$, $y=2-t$, $z=t$, $t\in\mathbb{R}$ (што је једначина праве p у параметарском облику). Одатле добијамо (када нађемо t из сваке од тих једначина) канонски облик: $p\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{1}$.

За угао имамо да важи $\cos\varphi=\dfrac{|\vec{n}_\alpha\cdot\vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha|\cdot|\vec{n}_\beta|}=\dfrac{|1\cdot 2+3\cdot 3+1\cdot(-1)|}{\sqrt{1^2+3^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{14}}=\dfrac{10}{\sqrt{154}}$, па је $\varphi=\sphericalangle(\alpha,\beta)=\arccos\dfrac{10}{\sqrt{154}}$.

3. а) $g(x)=e^{-x-x^2}$ и $h(x)=\sqrt{1-3x}$.

Макоренов развој $e^t=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3!}+o(t^3)$ даје $g(x)=1+\frac{-x-x^2}{1!}+\frac{(-x-x^2)^2}{2!}+\frac{(-x-x^2)^3}{3!}+o(x^3)=1-x-x^2+\frac{1}{2}x^2+x^3+\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{2}x^5-\frac{1}{2}x^6+o(x^3)=1-x-x^2+\frac{1}{2}x^2+x^3-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)=1-x-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{6}x^3+o(x^3)$ (овде смо искористили да сви већи степени x^4, x^5, x^6 улазе у остатак $o(x^3)$).

Стога је тражени Маклоренов полином $T_3(x)=1-x-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{6}x^3$.

Макоренов развој $\sqrt{1+t}=(1+t)^{1/2}=1+\binom{1/2}{1}t+\binom{1/2}{2}t^2+\binom{1/2}{3}t^3+o(t^2)=1+\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+\frac{1}{16}t^3+o(t^3)$ даје $h(x)=1+\frac{1}{2}(-3x)-\frac{1}{8}(-3x)^2+\frac{1}{16}(-3x)^3+o(x^3)=1-\frac{3}{2}x-\frac{9}{8}x^2-\frac{27}{16}x^3+o(x^3)$, па је тражени Маклоренов полином $T_3(x)=1-\frac{3}{2}x-\frac{9}{8}x^2-\frac{27}{16}x^3$.

б) Када у тражени лимес $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4e^{-x-x^2}-8\sqrt{1-3x}+4-8x-7x^2}{x^3}$ убацимо горње развоје добијамо

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{4\big(1-x-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{6}x^3+o(x^3)\big)-8\big(1-\frac{3}{2}x-\frac{9}{8}x^2-\frac{27}{16}x^3+o(x^3)\big)+4-8x-7x^2}{x^3},$$ тј. кад средимо

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{10}{3}x^3+\frac{27}{2}x^3+o(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{101}{6}+o(1)=\frac{101}{6}.$$

Напомена. До резултата 3. под б) могло се доћи и помоћу 3 пута примењеног Лопиталовог правила:

$$L\overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x-x^2}(-4-8x)+\dfrac{12}{\sqrt{1-3x}}-8-14x}{3x^2}\overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x-x^2}(-4+16x+16x^2)+\dfrac{18}{(1-3x)^{3/2}}-14}{6x}$$

$$\overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x-x^2}(20+24x-48x^2-32x^3)+\dfrac{81}{(1-3x)^{5/2}}}{6}=\frac{101}{6}.$$

4. Функција
$$f(x)=\frac{2-\ln(3-x)}{x-3}\,.$$

1° Домен је $D_f=(-\infty,3)$.

2° Нула је за $x=3-e^2$. Знак: $+\ [3-e^2]\ -\ (3)$ x. Пресек са y-осом је $Y(0,\frac{\ln 3-2}{3})$.

3° Функција није ни парна ни непарна (јер домен D_f није симетричан у односу на $x=0$), ни периодична (јер се нуле не понављају периодично).

4° $\lim\limits_{x\to 3^-} y(x)=-\infty \Rightarrow$ права $x=3$ је вертикална асимптота.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{3-x}}{1}=0\ \Rightarrow$ права $y=0$ је лева хоризонтална асимптота $\Rightarrow$ нема леву косу асимп.

Како $+\infty$ није у домену $D_f\ \Rightarrow$ функција $f(x)$ нема ни десну хоризонталну, ни десну косу асимптоту.

5° $f'=\dfrac{-3+\ln(3-x)}{(x-3)^2}$. Монотоност: $\nearrow\ [3-e^3]\ \searrow\ (3)$ x. Локални максимум је $M(3-e^3,e^{-3})$.

6° $f''=\dfrac{7-2\ln(3-x)}{(x-3)^3}$. Конвексност: $\cup\ [3-e^{7/2}]\ \cap\ (3)$ x. Превојна тачка је $P(3-e^{7/2},\frac{3}{2}e^{-7/2})$.