I # Писмени испит из математике 1 I

20. фебруар 2013.

I група

______________________________ ______________

презиме и име студента **број индекса**

1. (*25 поена*) стр: ______________________

Нека је матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

а) Одредити све реалне вредности λ, такве да матрична једначина

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

има решења (по v), где је v матрица облика 3×1 и није нула-матрица.

б) За сваки λ одређен у делу под а) наћи све матрице v које задовољавају претходну матричну једначину.

Напомена. Ово је практично задатак: „Наћи сопствене вредности λ и векторе v матрице A."

2. (*25 поена*) стр: ______________________

Дате су праве p и q у простору: $p\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-2}{1}$ и $q\colon \begin{cases} x+y-z+4=0 \\ x-y-3z+2=0. \end{cases}$

а) Одредити међусобни положај праве p и праве q.

б) Колики је угао $\sphericalangle(\vec{v}_p, \vec{v}_q)$ између вектора праваца $\vec{v}_p$ и $\vec{v}_q$ правих p и q?

в) Наћи растојање $d(p,q)$ између правих p и q.

г) Одредити тачку $A \in p$ и $B \in q$, такве да је њихово растојање $d(A,B) = d(p,q)$.

3. *(25 поена)* стр: ______________________

Дата је функција

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x} + \ln(1-\sin 3x) + 4x^2 + 4x - 1}{2x^3}, & x \neq 0 \\ B, & x = 0. \end{cases}$$

а) Апроксимирати функције e^{-x} и $\ln(1-\sin 3x)$ Маклореновим полиномима степена 3.

б) Израчунати $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$.

в) Одредити вредност реалног параметра B за који је функција $g(x)$ непрекидна у тачки $x = 0$.

4. (*25 поена*) стр: ______________________

Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = (x - x^2)e^{-1/(x-1)}.$$

У вежбанци означити бројеве страница: 0 је бела страна на корицама (на полеђини оне где сте унели податке), 1 прва страна на квадратиће, ... , 12 је последња страна на квадратиће, а 13 и 14 су последње беле стране (на последњем листу корица).

Код текста сваког задатка унесите бројеве страна на којим сте га радили (или / ако нисте)!

II Писмени испит из математике 1 II

20. фебруар 2013.

II група

презиме и име студента **број индекса**

1. (*25 поена*) стр: ______________________________

У зависности од параметара $a, b \in \mathbb{R}$ решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & -3 \\ -3x & - & 6y & - & 3z & = & b \\ 2x & + & 5y & + & az & = & 2. \end{array}$$

2. (*25 поена*) стр: ______________________________

Дати су вектори:

$$\vec{v}_1 = (1, 4, -5), \qquad \vec{v}_2 = (-2, -3, 2), \qquad \vec{v}_3 = (3, 4, -2) \qquad \text{и} \qquad \vec{v}_4 = (1, 2, -2).$$

а) Испитати да ли су вектори $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ и $\vec{v}_4$ линеарно независни. Ако јесу испитати да ли они чине базу простора $\mathbb{R}^3$, а ако нису изразити вектор $\vec{v}_3$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_4$.

б) Да ли вектори $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_4$ чине базу простора $\mathbb{R}^3$?

3. (*25 поена*) стр: ______________________________

Дата је функција

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{8(e^{x-x^2} + \sqrt{1-x}\,) + 5x^2 - 4x - 16}{x^3}, & x \neq 0 \\ A, & x = 0. \end{cases}$$

а) Апроксимирати функције e^{x-x^2} и $\sqrt{1-x}$ Маклореновим полиномима степена 3.

б) Израчунати $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$.

в) Одредити вредност реалног параметра A за који је функција $g(x)$ непрекидна у тачки $x = 0$.

4. (*25 поена*) стр: ______________________________

Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \ln(\ln^2 x - \ln x + 1)\,.$$

У вежбанци означити бројеве страница: 0 је бела страна на корицама (на полеђини оне где сте унели податке), 1 прва страна на квадратиће, ... , 12 је последња страна на квадратиће, а 13 и 14 су последње беле стране (на последњем листу корица).

Код текста сваког задатка унесите бројеве страна на којим сте га радили (или / ако нисте)!

Решења I групе

1. Када израчунамо карактеристични полином (најбоље да I једначину одузмемо и од II и од III, па онда 2 пута извучемо фактор $\lambda - 2$) добијамо:

$$k(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ \lambda-2 & 2-\lambda & 0 \\ \lambda-2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2 \cdot \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -(\lambda-5)(\lambda-2)^2.$$

Одатле добијамо да су сопствене вредности $\lambda_1 = 5$, $\lambda_{2,3} = 2$.

Одредимо за $\lambda_1 = 5$ сопствене векторе. Решавамо матричну једначину $(A - \lambda I) \cdot v = O$, тј.

$$\begin{Vmatrix} 3-\lambda_1 & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda_1 & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda_1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \qquad \text{тј.} \qquad \begin{Vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Ова матрична једначина је еквивалентна хомогеном систему

$$\begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & - & 2z & = & 0. \end{array}$$

Решење датог система је $x = t$, $y = t$ и $z = t$, за $t \in \mathbb{R}$.

Одатле добијамо да су за сопствену вредност $\lambda_1 = 5$ сопствени вектори дати са $v_1 = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, за $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (приметимо да смо за разлику од решења система, овде морали да избацимо вредност $t = 0$, јер би за њу добили нула-вектор, а по дефиницији сопственог вектора имамо да је он различит од нула-вектора!).

Одредимо за сопствену вредност $\lambda_{2,3} = 2$ сопствене векторе.
Решавамо матричну једначину $(A - \lambda I) \cdot v = O$, тј.

$$\begin{Vmatrix} 3-\lambda_2 & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda_2 & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda_2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \qquad \text{тј.} \qquad \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Ова матрична једначина је еквивалентна хомогеном систему

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0. \end{array}$$

Како су I и II и III једначина једнаке систем се своди на $x+y+z = 0$. Стога, систем има вишеструко решење које зависи од 2 параметра: $x = -t - p$, $y = p$ и $z = t$, за $t, p \in \mathbb{R}$.

Стога су за сопствену вредност $\lambda_{2,3} = 2$ сопствени вектори дати са $v_2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, за $(p, t) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

2. $\quad p\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{1} \quad$ и $\quad q\colon \begin{cases} x+y-z+4=0 \\ x-y-3z+2=0. \end{cases}$.

а) $\vec{v}_p=(2,-1,1)$, $P(1,-1,2)$. Када се реши систем добија се да је $q\colon z=t,\ y=-t-1,\ x=2t-3,\ t\in\mathbb{R}$, тј. $\vec{v}_q=(2,-1,1)$, $Q(-3,-1,0)$. Како је $\vec{v}_p=\vec{v}_q=(2,-1,1)$ и $P\notin q \ \Rightarrow$ праве су паралелне.

б) Како је $\vec{v}_p=\vec{v}_q$ угао између вектора $\vec{v}_p$ и $\vec{v}_q$ је $\sphericalangle(\vec{v}_p,\vec{v}_q)=0$.

в) Растојање пареления правих је једнако растојању произвољне тачке са једне праве до друге друге праве, тј. $d(p,q)=d(P,q)=\dfrac{|\vec{v}_p\times\overrightarrow{PQ}|}{|\vec{v}_p|}=\dfrac{|(2,0,-4)|}{|(2,-1,1)|}=\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{10}{3}}$.

г) Са праве p можемо узети произвољну тачку, нпр. $A=P(1,-1,2)$.
Конструишемо раван α која је нормална и на p (самим тим и q јер су паралелне) и пролази кроз тачку P. $\vec{n}_\alpha=\vec{v}_p=(2,-1,1)$. Како је $P\in\alpha$ имамо да је $\alpha\colon 2(x-1)-1(y-(-1))+1(z-2)=0$, тј. $\alpha\colon 2x-y+z-5=0$. Пресек праве q и равни α добијамо када параметарски облик праве $q\colon z=t,\ y=-t-1,\ x=2t-3,\ t\in\mathbb{R}$ убацимо у једначину равни $\alpha\colon 2x-y+z-5=0$. Одатле добијамо да је $t=\frac{5}{3}$, тј. $B(\frac{1}{3},-\frac{8}{3},\frac{5}{3})$.

3. **а)** Тражене апроксимације Маклореновим полиномима су $e^{-x}\approx 1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3\ (x\approx 0)$ и $\ln(1-\sin 3x)\approx -3x-\frac{9}{2}x^2-\frac{9}{2}x^3\ (x\approx 0)$.

б) Када у тражени лимес $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}+\ln(1-\sin 3x)+4x^2+4x-1}{2x^3}$ убацимо горње развоје добијамо

$L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)-3x-\frac{9}{2}x^2-\frac{9}{2}x^3+o(x^3)+4x^2+4x-1}{2x^3}$, тј. кад средимо

$L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{6}x^3-\frac{9}{2}x^3+o(x^3)}{2x^3}=\lim\limits_{x\to 0}-\dfrac{7}{3}+o(1)=-\dfrac{7}{3}$.

Напомена. До резултата 3. под б) могло се доћи и помоћу 3 пута примењеног Лопиталовог правила:

$$L=\lim_{x\to 0}g(x)\ \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}\ \lim_{x\to 0}\frac{-e^{-x}+\dfrac{3\cos 3x}{\sin 3x-1}+8x+4}{6x^2}\ \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}+\dfrac{9}{\sin 3x-1}+8}{12x}$$

$$\overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}\ \lim_{x\to 0}\frac{-e^{-x}+\dfrac{-27\cos 3x}{(\sin 3x-1)^2}}{12}=\frac{-1-27}{12}=-\frac{7}{3}.$$

в) За $B=-\frac{7}{3}$ функција $g(x)$ је непрекидна у тачки $x=0$, јер је тада $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=g(0)$.

4. Функција
$$f(x) = (x - x^2)e^{-1/(x-1)}\,.$$

1° Домен је $D_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

2° Нула је за $x = 0$. Знак: $-\ [0]\ +\ (1)\ -$. Пресек са y-осом је $Y(0,0)$.

3° Функција није ни парна ни непарна (јер домен D_f није симетричан у односу на $x = 0$), ни периодична (јер се нуле не понављају периодично).

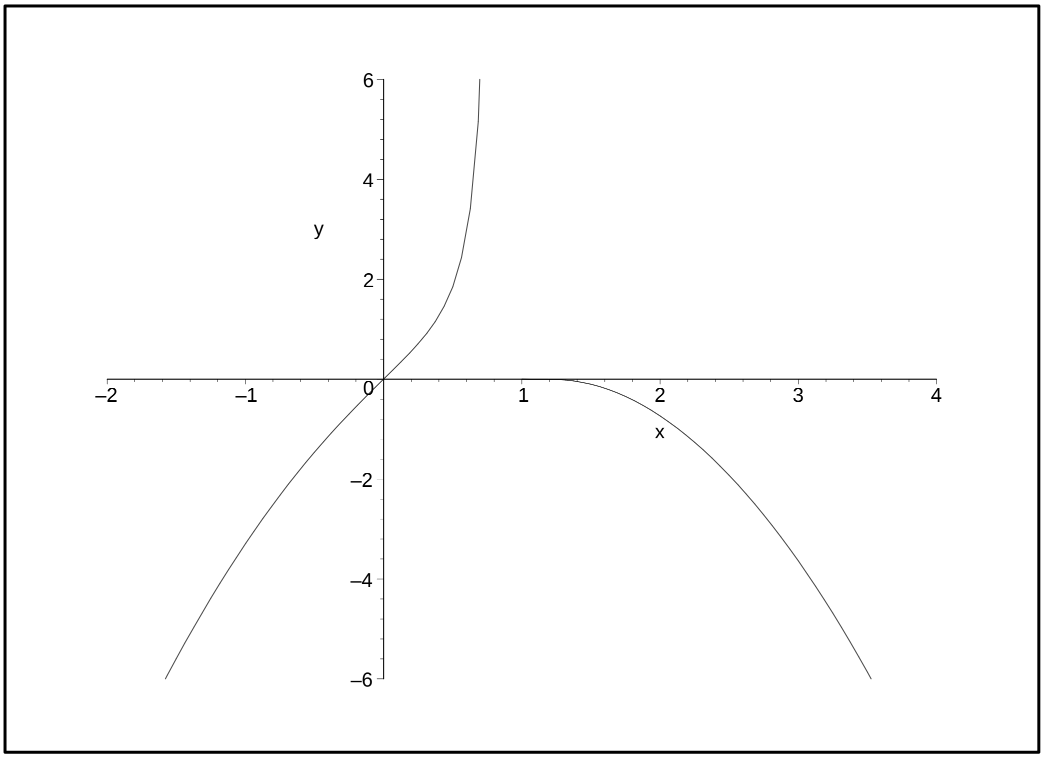
4° $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty \Rightarrow$ права $x = 1$ је вертикална асимптота.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty \ \Rightarrow$ нема хоризонталних асимптота.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty \ \Rightarrow$ нема косих асимптота.

5° $f' = \dfrac{-2x^2 + 2x - 1}{x - 1}e^{-1/(x-1)}$. Монотоност: $\nearrow\ (1)\ \searrow$. Нема локалних екстрема.

6° $f'' = \dfrac{(-x)(2x^2 - 4x + 3)}{(x-1)^3}e^{-1/(x-1)}$. Конвексност: $\cap\ [0]\ \cup\ (1)\ \cap$. Превојна тачка је $P(0,0)$.



Решења II групе

1. Када II једначини додамо I једначину помножену са 3 и од III једначине одузмемо I једначину помножену са 2 добијамо систем:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & -3 \\ & & & & 0 & = & b-9 \\ & & y & + & (a-2)z & = & 8. \end{array}$$

Одатле одмах добијамо да имамо 2 случаја:

1° $b \neq 9$ систем нема решења;

2° $b = 9$ систем има бесконачно много решења која зависе од 1 параметра:

$(x, y, z) = \big((2a-5)t - 19, (2-a)t + 8, t\big),\ t \in \mathbb{R}$.

Напомена. Задатак (сем случаја 2° $b = 9$) се може решити и помоћу детерминанти:

$\Delta = 0,\ \Delta_x = 18a - 45 - 2ab + 5b,\ \Delta_y = ab - 9a - 2b + 18,\ \Delta_z = 9 - b.$

2. а) У векторском простору $\mathbb{R}^3$ димензије 3, било која 4 вектора (па и $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$) су линеарно зависни.

Тражено представљање добијамо решавањем векторске једначине $\vec{v}_3 = a \cdot \vec{v}_1 + b \cdot \vec{v}_2 + c \cdot \vec{v}_4$, односно $(3, 4, -2) = (a - 2b + c, 4a - 3b + 2c, -5a + 2b - 2c)$, која се своди на систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} a & - & 2b & + & c & = & 3 \\ 4a & - & 3b & + & 2c & = & 4 \\ -5a & + & 2b & - & 2c & = & 3. \end{array}$$

Решења овог система су $a = 0$, $b = -2$, $c = -1$, па је $\vec{v}_3 = -2\vec{v}_2 - \vec{v}_4$.

б) Како је детерминанта матрице M у којој су врсте редом координате вектора $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

добијамо да су вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4$ линеарно независни.

Напомена. До овог закључка смо могли да дођемо и преко ранга матрице M ($\mathrm{rang}(M) = 3$, што је једнако броју вектора, па су они линеарно независни).

У векторском простору $\mathbb{R}^3$ димензије 3, било која 3 линеарно независна вектора (па и $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4$) чине базу.

Напомена. До овог закључка смо могли да дођемо и тако што би посматрали векторску једначину $\vec{v} = a \cdot \vec{v}_1 + b \cdot \vec{v}_2 + c \cdot \vec{v}_4$, за произвољан вектор $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, која се своди на систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} a & - & 2b & + & c & = & x \\ 4a & - & 3b & + & 2c & = & y \\ -5a & + & 2b & - & 2c & = & z. \end{array}$$

Детерминанта овог система је:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ -5 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

па овај систем увек има решења, тј. вектор v се увек може представити преко вектора $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4$. Тиме смо показали да вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4$ генеришу векторски простор $\mathbb{R}^3$.

Како су вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4$ линеарно независни и генеришу векторски простор $\mathbb{R}^3$, следи да они чине базу векторског простора $\mathbb{R}^3$.

3. а) Макоренов развој $e^t = 1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3!}+o(t^3)$ даје $e^{x-x^2} = 1+\frac{x-x^2}{1!}+\frac{(x-x^2)^2}{2!}+\frac{(x-x^2)^3}{3!}+o(x^3) = 1+x-x^2+\frac{1}{2}x^2-x^3+\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}x^5-\frac{1}{2}x^6+o(x^3) = 1+x-x^2+\frac{1}{2}x^2-x^3+\frac{1}{6}x^3+o(x^3) = 1+x-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{6}x^3+o(x^3)$ (овде смо искористили да сви већи степени x^4, x^5, x^6 улазе у остатак $o(x^3)$).

Макоренов развој $\sqrt{1+t} = (1+t)^{1/2} = 1+\binom{1/2}{1}t+\binom{1/2}{2}t^2+\binom{1/2}{3}t^3+o(t^2) = 1+\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+\frac{1}{16}t^3+o(t^3)$ даје $\sqrt{1-x} = 1+\frac{1}{2}(-x)-\frac{1}{8}(-x)^2+\frac{1}{16}(-x)^3+o(x^3) = 1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3+o(x^3)$.

Тражене апроксимације Маклореновим полиномима су:

$e^{x-x^2} \approx 1+x-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{6}x^3\ (x\approx 0)$ и $\sqrt{1-x} \approx 1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3\ (x\approx 0)$.

б) Када у тражени лимес $L = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8(e^{x-x^2}+\sqrt{1-x}\ )+5x^2-4x-16}{x^3}$ убацимо горње развоје добијамо

$L = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8(1+x-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{6}x^3+o(x^3)+1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3+o(x^3))+5x^2-4x-16}{x^3}$, тј. кад средимо

$L = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8(-\frac{5}{6}x^3-\frac{1}{16}x^3)+o(x^3)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{43}{6}+o(1) = -\dfrac{43}{6}$.

Напомена. До резултата 3. под б) могло се доћи и помоћу 3 пута примењеног Лопиталовог правила:

$$L \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{e^{x-x^2}(8-16x)-\dfrac{4}{\sqrt{1-x}}+10x-4}{3x^2} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{e^{x-x^2}(-8-32x+32x^2)-\dfrac{2}{(1-x)^{3/2}}+10}{6x}$$

$$\overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{e^{x-x^2}(-40+48x+96x^2-64x^3)-\dfrac{3}{(1-x)^{5/2}}}{6} = -\frac{43}{6}.$$

в) За $A = -\frac{43}{6}$ функција $g(x)$ је непрекидна у тачки $x=0$, јер је тада $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = g(0)$.

4. Функција
$$f(x)=\ln(\ln^2 x-\ln x+1)\,.$$

1° Домен је $D_f=(0,+\infty)$, јер се неједначина $\ln^2 x-\ln x+1>0$ сменом $t=\ln x$ своди на квадратну неједначину $t^2-t+1>0$, што је тачно (јер је $a=1>0,\ D=-3<0$) када је $\ln x$ дефинисан.

2° Нуле су за $x=1$ и $x=e$. Знак: x (0) + [1] − [e] +. Пресек са y-осом нема, јер $0\notin D_f$.

3° Функција није ни парна ни непарна (јер домен D_f није симетричан у односу на $x=0$), ни периодична (јер се нуле не понављају периодично).

4° $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty \Rightarrow$ права $x=0$ је вертикална асимптота.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\big(\ln x(\ln x-1)+1\big)=+\infty \ \Rightarrow$ нема десну хоризонталну асимптоту.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}\overset{\text{л.п.}}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}0 \ \Rightarrow$ нема десну косу асимптоту.

Како $-\infty$ није у домену $D_f \ \Rightarrow$ функција $f(x)$ нема ни леву хоризонталну, ни леву косу асимптоту.

5° $f'=\dfrac{2\ln x-1}{x(\ln^2 x-\ln x+1)}$. Монотоност: x (0) $\searrow$ [$\sqrt{e}$] $\nearrow$. Локални минимум је $M(\sqrt{e},\ln\frac{3}{4})$.

6° $f''=\dfrac{-2\ln^3 x+\ln^2 x-\ln x+2}{x^2(\ln^2 x-\ln x+1)^2}=-\dfrac{(\ln x-1)(2\ln^2 x+\ln x+2)}{x^2(\ln^2 x-\ln x+1)^2}\,.$

Конвексност: x (0) $\cup$ [e] $\cap$. Превојна тачка је $P(e,0)$.