1. ГРУПА **Писмени испит из МАТЕМАТИКЕ 1** 20.02.2012.

Презиме и име ______________________________ број индекса ______________

1. (*15 поена*) Решити матричну једначину

$$3XB^T + XA = B,$$

при чему је $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 24 \\ -6 & -2 & 9 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -8 & -3 & -1 \end{bmatrix}$.

2. Дата је права $q : \begin{cases} 2x - y + \ z + 2 = 0 \\ \ x + y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$ и тачка $M(1, 2, 1)$.

а) (*5 поена*) Одредити једначину праве p која садржи тачку M и паралелна је правој q.

б) (*5 поена*) Одредити једначину равни коју одређују праве p и q.

3. Дата је функција

$$g\colon x \mapsto \sin^2 2x\,.$$

а) (*5 поена*) Одредити Маклоренов полином четвртог степена функције g.

б) (*5 поена*) Израчунати:

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - 4x^2}{e^{3x^4} - 1}.$$

4. (*15 поена*) Испитати ток и скицирати график функције

$$f : x \mapsto \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 3x}}.$$

НАПОМЕНА: Писмени испит траје 2h и 15min. Првих сат времена није дозвољено напуштање учионице. Забрањен је разговор међу студентима као и употреба калкулатора, мобилних телефона и осталих средстава за комуникацију.
Са мање од 25 поена писмени испит није положен, а услов за усмени испит (уз положен писмени испит) је најмање 30 поена из предиспитних обавеза (писмени испит + активност).

2. ГРУПА **Писмени испит из МАТЕМАТИКЕ 1** 20.02.2012.

Презиме и име ______________________________ број индекса ________________

1. (*15 поена*) Нека је

$$\mathcal{A} = \{x + y\sqrt{3} \mid x, y \in \mathbb{Q},\ (x, y) \neq (0, 0)\}$$

и $a \star b = a \cdot b$, за $a, b \in \mathcal{A}$. Испитати да ли је $(\mathcal{A}, \star)$ група.

2. Дате су тачке $A(1,1,1)$, $B(0,2,2)$, $C(1,3,0)$ и $M(7,3,-2)$.

а) (*5 поена*) Одредити једначину равни α која садржи тачке A, B и C.

б) (*5 поена*) Одредити координате тачке N која је симетрична тачки M у односу на раван α.

3. Дата је функција

$$h\colon x \mapsto \cos(1 - \cos x)\,.$$

а) (*5 поена*) Одредити Маклоренов полином четвртог степена функције h.

б) (*5 поена*) Израчунати:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - h(x)}{\ln(1 + x^4)}.$$

4. (*15 поена*) Испитати ток и скицирати график функције

$$f : x \mapsto (x - 3)e^{\frac{1}{x-3}}.$$

НАПОМЕНА: Писмени испит траје 2h и 15min. Првих сат времена није дозвољено напуштање учионице. Забрањен је разговор међу студентима као и употреба калкулатора, мобилних телефона и осталих средстава за комуникацију.
Са мање од 25 поена писмени испит није положен, а услов за усмени испит (уз положен писмени испит) је најмање 30 поена из предиспитних обавеза (писмени испит + активност).

3. ГРУПА **Писмени испит из МАТЕМАТИКЕ 1** 20.02.2012.

Презиме и име ______________________________ број индекса ________________

1. (*15 поена*) У зависности од реалног параметра a решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & - & y & - & az & & & = & a-1 \\ 2x & + & y & - & az & - & u & = & 4 \\ x & + & 3y & - & 2z & - & 2u & = & 7 \end{array}.$$

2. Дате су праве $p : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+7}{-1} = \dfrac{z-5}{1}$ и $q : \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ x + 2y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$ и тачка $N(1, 0, -1)$.

а) (*5 поена*) Одредити једначину равни α коју одређују праве p и q.

б) (*5 поена*) Одредити нормалну пројекцију тачке N на раван α.

3. (*10 поена*) Одредити тачке нагомилавања низа (a_n) чији је општи члан

$$a_n = (-1)^n \left(\frac{3n-2}{3n}\right)^{2n} + \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \sin\frac{n\pi}{2}.$$

4. (*15 поена*) Испитати ток и скицирати график функције

$$f : x \mapsto \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3-1}}.$$

НАПОМЕНА: Писмени испит траје 2h и 15min. Првих сат времена није дозвољено напуштање учионице. Забрањен је разговор међу студентима као и употреба калкулатора, мобилних телефона и осталих средстава за комуникацију.
Са мање од 25 поена писмени испит није положен, а услов за усмени испит (уз положен писмени испит) је најмање 30 поена из предиспитних обавеза (писмени испит + активност).

Резултати I групе

1. $A=\begin{bmatrix}-2&1&24\\-6&-2&9\\4&4&4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&-1\\-8&-3&-1\end{bmatrix}$.

У датој матричној једначини $3XB^T+XA=B$ извучимо X са леве стране: $X(3B^T+A)=B$. Када ову једнакост помножимо са $(3B^T+A)^{-1}$ са десне стране добијамо решење матричне једначине $\boxed{X=B(3B^T+A)^{-1}}$. Даље, приликом израчунавања претходног израза добијамо

$$B^T=\begin{bmatrix}1&0&-8\\2&1&-3\\-1&-1&-1\end{bmatrix},\qquad 3B^T+A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix},\qquad \det(3B^T+A)=1,\qquad (3B^T+A)^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix},$$

што коначно даје $X=\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&-1\\-8&-3&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&-1\\1&1&-1\\-7&5&-1\end{bmatrix}$.

2. $q:\begin{cases}2x-y+\ z+2=0\\ \ x+y+2z-3=0\end{cases}$, $M(1,2,1)$

а) Вектор правца праве q можемо добити као $\vec{v}_q=(2,-1,1)\times(1,1,2)=(-3,-3,3)$. До овог резултата може се доћи и решавањем система од 2 једначине равни којима је права q задата. Како је $p\parallel q$, можемо узети да је $\vec{v}_p=-\frac{1}{3}(-3,-3,3)=(1,1,-1)$ и $M\in p$, па је $p\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$.

б) Прво треба да одредимо једну тачку Q са праве q. Фиксирамо једну координату, нпр. $x=0$ и из система нађимо друге 2: $Q(0,\frac{7}{3},\frac{1}{3})$. За вектор нормале на раван ћемо узети $\vec{n}_\alpha=3\vec{v}_p\times\overrightarrow{MQ}$ (јер је $M\in p$, а $Q\in q$): $\overrightarrow{MQ}=(-1,\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$, па је $\vec{n}_\alpha=3(1,1,-1)\times(-1,\frac{1}{3},-\frac{2}{3})=3(-\frac{1}{3},\frac{5}{3},\frac{4}{3})=(-1,5,4)$ (овде смо све множили са 3 да не бисмо имали разломке). Остаје да одредимо једначину равни α која има вектор нормале $\vec{n}_\alpha$ и садржи тачку M: $\alpha:\ -1\cdot(x-1)+5(y-2)+4(z-1)=0$, тј. $\alpha:\ -x+5y+4z-13=0$.

3. $g\colon x\mapsto \sin^2 2x$

а) *I начин.*

Искористимо познат Маклоренов развој $\sin 2x=\frac{2x}{1!}-\frac{(2x)^3}{3!}+o(x^4)$:

$$\sin^2 2x=\Big(\frac{2x}{1!}-\frac{(2x)^3}{3!}+o(x^4)\Big)^2=4x^2-\frac{16}{3}x^4+o(x^4)$$

(овде члан $\frac{16}{3}x^4$ „улази“ у $o(x^4)$). Тражени Маклоренов полином је $M_4(x)=4x^2-\frac{16}{3}x^4$.

II начин.

$\cos 4x=1-\frac{(4x)^2}{2!}+\frac{(4x)^4}{3!}+o(x^4)=1-8x^2+\frac{128x^4}{3}+o(x^4)$ кад $x\to 0$. Искористимо тригонометријску формулу $\sin^2 2x=\frac{1-\cos 4x}{2}$, па имамо $\sin^2 2x=\frac{1-(1-8x^2+\frac{128x^4}{3})}{2}+o(x^4)$ кад $x\to 0$. Стога је $\sin^2 2x=4x^2-\frac{16}{3}x^4+o(x^4)$ кад $x\to 0$, па је тражени Маклоренов полином $M_4(x)=4x^2-\frac{16}{3}x^4$.

III начин.

Задатак се може урадити и преко Маклоренове формуле израчунавањем извода $g'(x)$, $g''(x)$, $g'''(x)$ и $g^{IV}(x)$» Честа грешка је била већ приликом тражења првог извода: како је $g(x)=(\sin 2x)^2$ имамо да је $g'(x)=2\sin 2x\cdot(\sin 2x)'=2\sin 2x\cdot 2\cos 2x$. Израчунавање осталих извода се значајно поједностављује ако овде искористимо тригонометријску формулу за двоструки угао: $g'(x)=2\sin 4x$.

б) Из развоја експоненцијалне функције имамо $e^{3x^4}=1+3x^4+o(x^4)$ кад $x\to 0$, па је тражени лимес: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-4x^2}{e^{3x^4}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{16}{3}x^4+o(x^4)}{3x^4+o(x^4)}=-\dfrac{16}{9}$.

4. $f : x \mapsto \frac{x^2}{\sqrt{x^2+3x}}$

1. $D_f = (-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$.
2. $f(x) > 0, \quad \forall x \in D_f$. Како $0 \notin D_f$ нема ни нуле, ни пресек са y-осом.
3. функција није ни парна, ни непарна, ни периодична.
4. $\lim\limits_{x\to -3-} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+3x}} = +\infty \ \Rightarrow$ права $x = -3$ је вертикална асимптота.

   $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+3x}} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} = 0 \ \Rightarrow$ права $x = 0$ није вертикална асимптота.

   $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+3x}} = +\infty, \ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+3x}} = +\infty \ \Rightarrow$ функција нема хоризонталних асимптота.

   Кад $x \to \pm\infty$ имамо $f(x) = \dfrac{x^2}{|x|} \cdot (1+\frac{3}{x})^{-1/2} = |x|\big(1 - \frac{3}{2x} + o(\frac{1}{x})\big)$.

   Кад $x \to -\infty$: $f(x) = -x\big(1 - \frac{3}{2x} + o(\frac{1}{x})\big) = -x + \frac{3}{2} + o(1) \Rightarrow y = -x + \frac{3}{2}$ је лева коса асимптота.

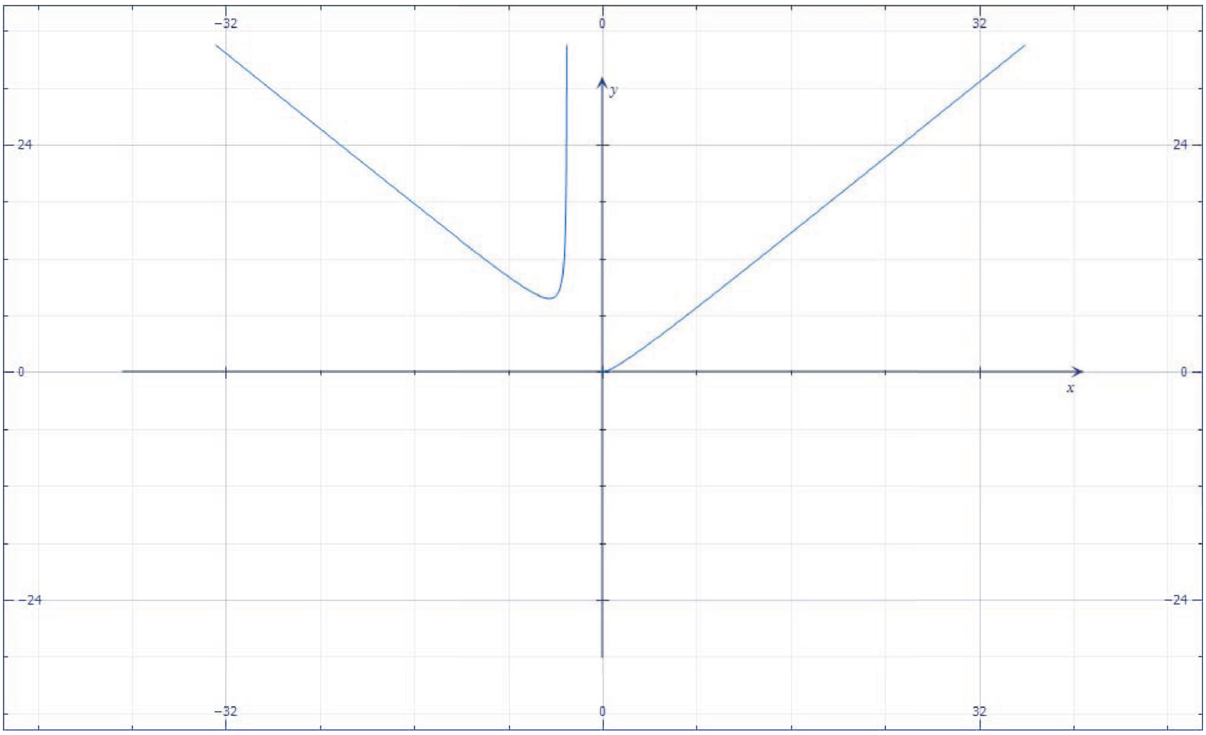
   Кад $x \to +\infty$: $f(x) = x\big(1 - \frac{3}{2x} + o(\frac{1}{x})\big) = x - \frac{3}{2} + o(1) \Rightarrow$ права $y = x - \frac{3}{2}$ је десна коса асимптота.
5. $f'(x) = \dfrac{x^2(x+\frac{9}{2})}{(x^2+3x)^{\frac{3}{2}}}$

   $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\frac{9}{2}, -3) \cup (0, +\infty)$, те функција $f(x)$ расте на интервалу $(-\frac{9}{2}, -3)$ и на $(0, +\infty)$.

   $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\frac{9}{2})$, те функција $f(x)$ опада на интервалу $(-\infty, -\frac{9}{2})$.

   Локални минимум је тачка $M(-\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\sqrt{3})$.
6. $f''(x) = \dfrac{\frac{27}{4}x^2}{(x^2+3x)^{\frac{5}{2}}} > 0, \ \forall x \in D_f$, те је функција конвексна $(\cup)$ на интервалу $(-\infty, -3)$ и на интервалу $(0, +\infty)$.

   Превојних тачака нема.



Резултати II групе

1. Овај задатак је веома сличан са 1. задатаком са вежби из Алгебарских структура или 1.33.

$A = \{x + y\sqrt{3} \mid x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q},\ (x, y) \neq (0, 0)\}$, $a \star b = a \cdot b$.
1° Проверимо прво затвореност. Нека је $a = x + y\sqrt{3}$ и $b = v + w\sqrt{3}$. Тада је

$$a \star b = (x + y\sqrt{3}) \cdot (v + w\sqrt{3}) = xv + xw\sqrt{3} + yv\sqrt{3} + 3yw = (xv + 3yw) + (xw + yv)\sqrt{3},$$

па како из $x, y, v, w \in \mathbb{Q}$ следи и $xv + 3yw \in \mathbb{Q}$ и $xw + yv \in \mathbb{Q}$ и како $a, b \neq 0 \ \Rightarrow\ a \cdot b \neq 0$, добијамо да је и $a \star b \in A$, тј. да је операција $\star$ затворена у скупу A.

2° На основу чињенице да је множење реалних бројева асоцијативно следи и да је операција $\star$ асоцијативна у скупу $A \subset \mathbb{R}$.

3° Неутралан елемент је $e = 1$ јер важи $1 \star a = 1 \cdot a = a$ и $a \star 1 = a \cdot 1 = a$. Овај елемент припада скупу A јер га можемо записати као $e = 1 + 0 \cdot \sqrt{3}$, а $1, 0 \in \mathbb{Q}$.

4° Потражимо инверзан елемент за $a = x + y\sqrt{2}$. Нека је инверзан елемент $a' = z + t\sqrt{2}$. Тада треба да важи $a \star a' = a' \star a = e$ (где је e неутралан елемент који смо добили у претходној тачки, тј. $e = 1$), па добијамо једначину

$$(x + y\sqrt{3}) \cdot (z + t\sqrt{3}) = (z + t\sqrt{3}) \cdot (x + y\sqrt{3}) = 1.$$

Одавде за $(x, y) \neq (0, 0)$ добијамо да је

$$z + t\sqrt{3} = \frac{1}{x + y\sqrt{3}} = \frac{1}{x + y\sqrt{3}} \cdot \frac{x - y\sqrt{3}}{x - y\sqrt{3}} = \frac{x - y\sqrt{3}}{x^2 - 3y^2} = \frac{x}{x^2 - 3y^2} + \frac{-y}{x^2 - 3y^2}\sqrt{3}.$$

Из чињенице да су $x, y \in \mathbb{Q}$ следи да је $x^2 - 3y^2 \neq 0$ (из $x^2 - 3y^2 = 0$ би следило да је број $\frac{x}{y} = \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ што није тачно), па су и $\frac{x}{x^2-3y^2}, \frac{-y}{x^2-3y^2} \in \mathbb{Q}$, док из $(x, y) \neq (0, 0)$ следи $(\frac{x}{x^2-3y^2}, \frac{-y}{x^2-3y^2}) \neq (0, 0)$. Тиме смо показали и да је инверзан елемент $a' \in A$.

Стога је у овом случају структура $(A, *)$ група.

Напомена. Може се показати (али не треба јер се не тражи у задатку!) да је операција $\star$ и комутативна, па је то и Абелова група.

(2) $A = \{x + y\sqrt{2} \mid x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}, x^2 + y^2 \neq 0\}$.

Аналогно као у делу под (1) добијамо да је операција $*$ на скупу A затворена (треба проверити и да је $a * b \neq 0$), асоцијативна, комутативна и има неутралан елемент $e = 1$.

Код тражења инверзног елемента опет добијамо једначину

$$(x + y\sqrt{2}) \cdot (z + t\sqrt{2}) = (z + t\sqrt{2}) \cdot (x + y\sqrt{2}) = 1.$$

2. а) $A(1, 1, 1)$, $B(0, 2, 2)$, $C(1, 3, 0)$
$\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (0, 2, -1) \Rightarrow \overrightarrow{n}_\alpha = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-3, -1, -2)$.
$\alpha\colon -3(x - 1) - 1(y - 1) - 2(z - 1) = 0$, тј. $\alpha\colon 3x + y + 2z - 6 = 0$.

б) $M(7, 3, -2)$

$n : \frac{x-7}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+2}{2}$ (j-на нормале на α).
Једначина произвољне тачке са нормале n је дата са $M_1(3t + 7, t + 3, 2t - 2)$, за неку вредност параметра $t \in \mathbb{R}$. Даље, како је $n \cap \alpha = \{M_1\}$ имамо $3(3t + 7) + t + 3 + 2(2t - 2) - 6 = 0 \ \Rightarrow\ t = -1$, тј. $M_1(-4, 2, -4)$.

Симетрична тачка је $N(-15, 1, -6)$.

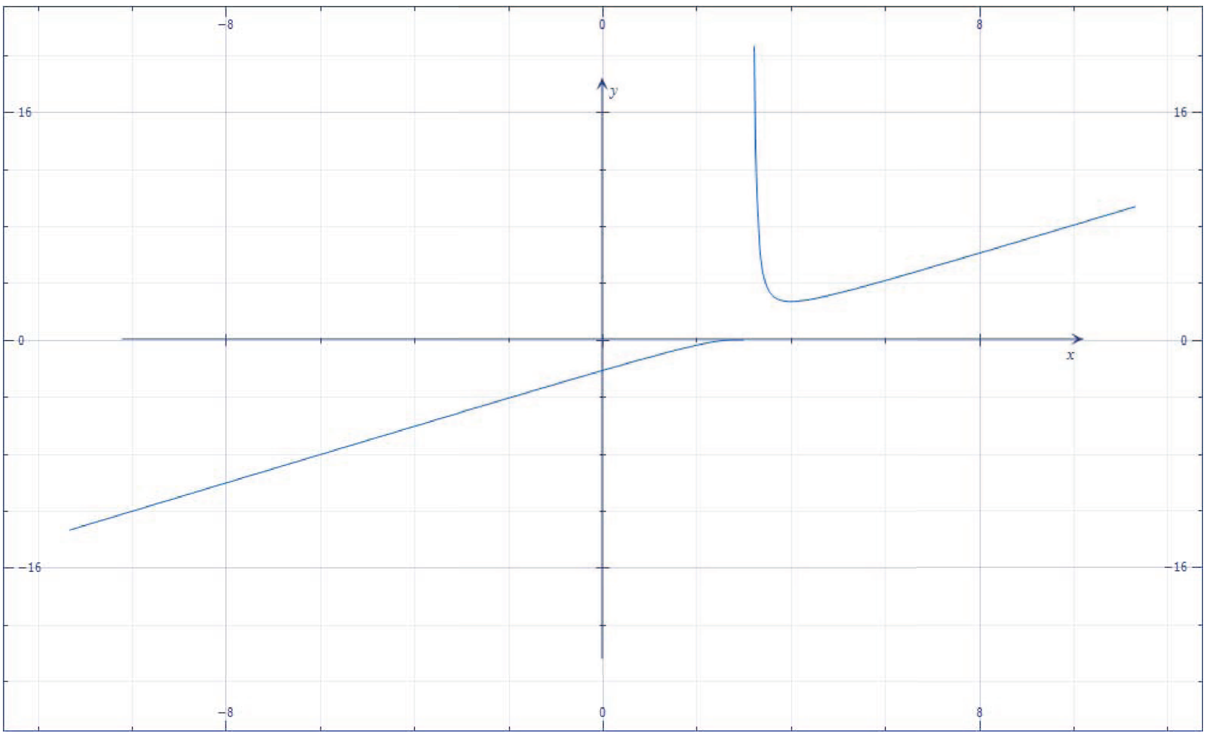
3. $h\colon x \mapsto \cos(1 - \cos x)$
а) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$, кад $x \to 0$, па је $1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, кад $x \to 0$.
$\cos(1 - \cos x) = 1 - \frac{1}{2!}\frac{x^4}{4} + o(x^4)$, кад $x \to 0$, па је $M_4(x) = 1 - \frac{1}{2}x^4$.

б) $\ln(1+x^4) = x^4 + o(x^4)$, кад $x \to 0$, те је тражени лимес:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-h(x)}{\ln(1+x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{8}+o(x^4)}{x^4+o(x^4)} = \frac{1}{8}\,.$$

4. $f : x \mapsto (x-3)e^{\frac{1}{x-3}}$

1. $D_f = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$
2. Функција нема нула. Пресек са y-осом је $Y(0, \frac{-3}{\sqrt[3]{e}})$.
   $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 3$
   $f(x) < 0 \Leftrightarrow x < 3$
3. Функција није ни парна ни непарна, ни периодична
4. $\lim\limits_{x\to 3-} f(x) = 0$, али $\lim\limits_{x\to 3+} f(x) = +\infty$ $\Rightarrow$ права $x = 3$ је вертикална асимптота.
   $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ $\Rightarrow$ функција нема хоризонталних асимптота.
   Права $y = x - 2$ је обострана коса асимптота.
5. $f'(x) = \frac{x-4}{x-3}e^{\frac{1}{x-3}}$
   $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 3) \cup (4, +\infty)$, те функција $f(x)$ расте на интервалу $(-\infty, 3)$ и на $(4, +\infty)$.
   $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (3, 4)$, те функција $f(x)$ опада на интервалу $(3, 4)$.
   Локални минимум је тачка $M(4, e)$.
6. $f''(x) = \frac{1}{(x-3)^3}e^{\frac{1}{x-3}}$
   функција је конвексна на $(3, +\infty)$, конкавна на $(-\infty, 3)$.



Резултати III групе

1.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
3x & - & y & - & az & & & = & a-1\\
2x & + & y & - & az & - & u & = & 4\\
x & + & 3y & - & 2z & - & 2u & = & 7\\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x & + & 3y & - & 2z- & 2u & = & 7\\
 & & -5y & + & (4-a)z+ & 3u & = & -10\\
 & & -10y & + & (6-a)z+ & 6u & = & a-22\\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x & + & 3y & - & 2z- & 2u & = & 7\\
 & & -5y & + & (4-a)z+ & 3u & = & -10\\
 & & & & (a-2)z & & = & a-2\\
\hline
\end{array}.$$

1. $a=2$ има вишеструко решење које зависи од 2 параметра (α и β):
   $(x,y,z,u) \in \{(1+\frac{\beta+4\alpha}{5}, 2+\frac{2\alpha+3\beta}{5},\ \alpha,\beta),\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}\}$.
2. $a\neq 2$ има вишеструко решење које зависи од 1-ог параметра (α):
   $(x,y,z,u) \in \{(\frac{\alpha+3a+3}{5}, \frac{14+3\alpha-a}{5}, 1, \alpha),\ \alpha,\in\mathbb{R}\}$.

2. $p : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+7}{-1} = \dfrac{z-5}{1}$, $q : \begin{cases} x+\ y+\ z+1=0 \\ x+2y+3z-2=0 \end{cases}$

а)

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{v}_q = (1,1,1)\times(1,2,3) = (1,-2,1),\\
&\overrightarrow{n}_\alpha = \overrightarrow{v}_p \times \overrightarrow{v}_q = (2,-1,1)\times(1,-2,1) = (1,-1,-3),\\
&P(1,-7,5)\in p,\\
&\alpha:\ 1\cdot(x-1) - 1\cdot(y+7) - 3(z-5) = 0,\\
&\alpha:\ x-y-3z+7=0.
\end{aligned}$$

б) $N(1,0,-1)$

$$\begin{aligned}
&n : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{-3},\\
&n\cap\alpha = \{N_1\},\\
&N_1(t+1,-t,-3t-1),\ t\in\mathbb{R}\\
&N_1\in\alpha \Rightarrow t+1+t+9t+3+7=0 \Leftrightarrow t=-1,\\
&N_1(0,1,2)
\end{aligned}$$

3. $a_n = (-1)^n\left(\frac{3n-2}{3n}\right)^{2n} + \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\sin\frac{n\pi}{2}$.

Има 3 тачке нагомилавања: $-e^{-\frac{4}{3}}+1$ (за $n=4k+1$), $e^{-\frac{4}{3}}$ (за $n=2k$) и $-e^{-\frac{4}{3}}-1$ (за $n=4k+3$).

4. $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x^3-1}}$

1. $D_f = (-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.
2. $f(x)=0 \Rightarrow$ нула је $x=0$, а и пресек са y-осом је $Y(0,0)$.
   $f(x)>0\ \Rightarrow\ x>1$
   $f(x)<0\ \Rightarrow\ x<1$.

3. Функција није ни парна ни непарна (домен није симетричан у односу на $x=0$), ни периодична (нуле се не понављају периодично).

4. $\lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x^3-1}} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x^3-1}} = +\infty$
Права $x=1$ је вертикална асимптота.
$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x^3-1}} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x^3-1}} = +\infty$
Нема хоризонталних асимптота.
$f(x) = x + \frac{1}{3x^2} + o(\frac{1}{x^2})$ кад $x \to \pm\infty$.
Права $y = x$ је обострана коса асимптота.

5. $f'(x) = \frac{x(x^3-2)}{\sqrt[3]{(x^3-1)^4}}$
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (\sqrt[3]{2}, +\infty)$, те функција $f(x)$ расте на интервалу $(-\infty, 0)$ и на $(\sqrt[3]{2}, +\infty)$.
$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0,1) \cup (1, \sqrt[3]{2})$, те функција $f(x)$ опада на интервалу $(0,1)$ и на $(1, \sqrt[3]{2})$.
Локални максимум је тачка $M_1(0,0)$, а локални минимум је тачка $M_2(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$.

6. $f''(x) = \frac{2x^3+2}{\sqrt[3]{(x^3-1)^7}}$
Функција је конвексна на $(-\infty, -1)$ и на $(1, +\infty)$, конкавна на $(-1, 1)$.
Превојна тачка је $(-1, -\frac{1}{\sqrt[3]{2}})$.