

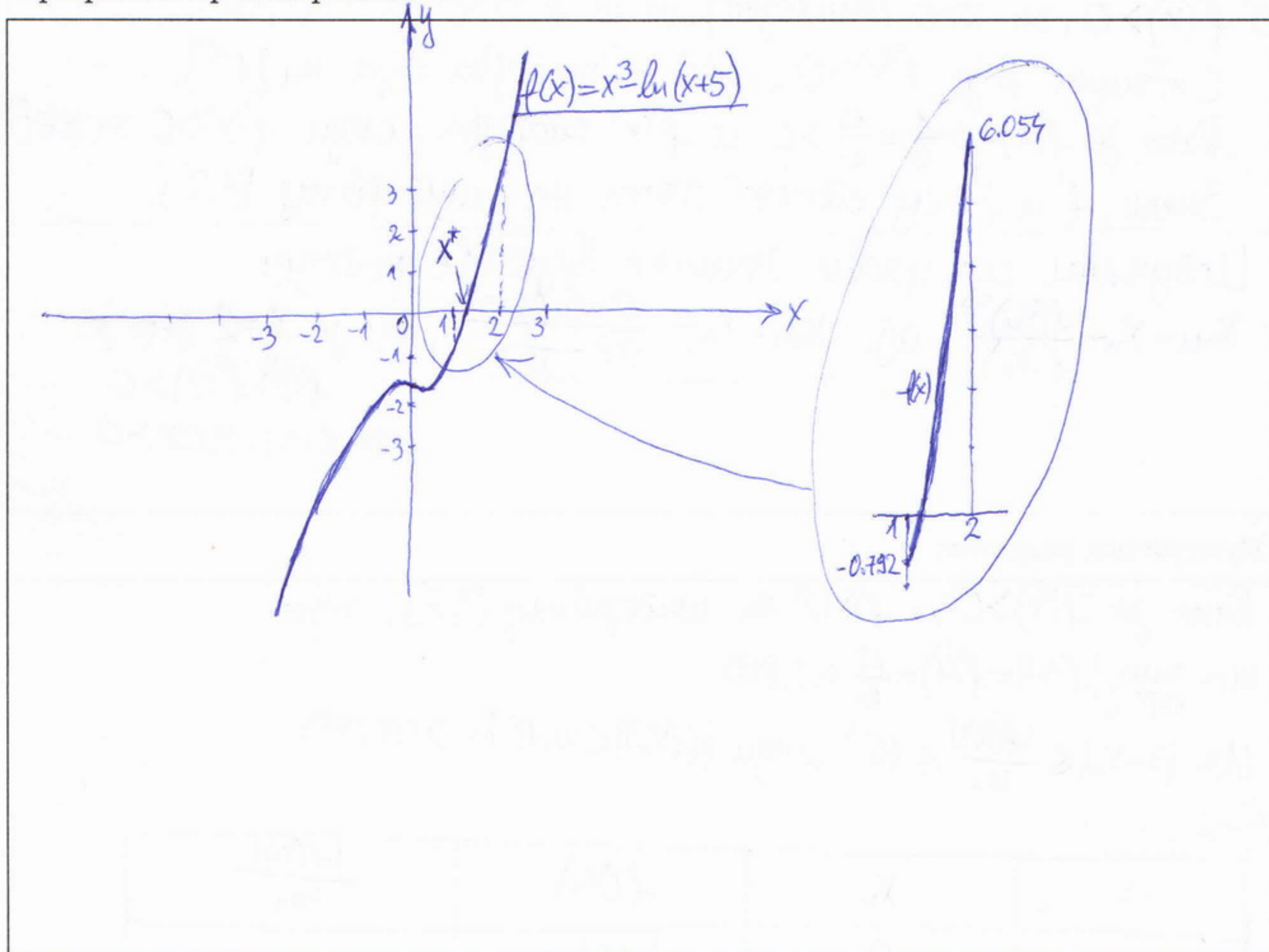
Студент: _____ Индекс: _____

Тема: **Нелинеарне једначине**

Задатак: $x^3 - \ln(x+5) = 0$, $\varepsilon = 10^{-4}$

Метода: ЊУТНОВА (МЕТОДА ТАНГЕНТИ)

Графички приказ решења:



Изолација решења:

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 1 - \ln 6 \approx -0.792 \\ f(2) &= 8 - \ln 7 \approx 6.054 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{f(1) \cdot f(2) < 0}$$

Како је $f(x) = x^3 - \ln(x+5)$ непрекидна на интервалу $[1, 2]$ (доказ на другој страни), због $f(1) \cdot f(2) < 0$ постоји решење ј-не $f(x) = 0$ на $[1, 2]$.

Како је $f(x)$ монотонно растућа на интервалу $[1, 2]$ (доказ на другој страни), постоји тачно једно решење ј-не $f(x) = 0$ на $[1, 2]$, њ.

$[1, 2]$ је интервал изолације решења ј-не $f(x) = 0$.

Провера услова методе:

- 1° $f(1) \cdot f(2) < 0$ (доказано на брешкојој страни)
- 2° $f(x) = x^3 - \ln(x+5)$
 $\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{x+5}$
 $\Rightarrow f''(x) = 6x + \frac{1}{(x+5)^2}$ } бредстављају композиције елементарних
 ф-ја за $x > -5$, па су то непрекидне ф-је
 за $x > -5$, а самим тим и на $[1, 2]$.
- 3° $f''(x) > 0$, за $x > 0$ (очигледно), па је $f''(x) > 0$ за $x \in [1, 2]$.
 С обзира да је $f''(x) > 0$, $f'(x)$ је растућа ф-ја на $[1, 2]$.
 Како је $f'(1) = 3 - \frac{1}{6} = \frac{17}{6} > 0$ и $f'(x)$ растућа, следи $f'(x) > 0$ за $x \in [1, 2]$.
 Значи, f' и f'' су сличног знака на интервалу $[1, 2]$.

Испуњени су услови примене Њутнове методе:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \text{ ој. } x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - \ln(x_n+5)}{3x_n^2 - \frac{1}{x_n+5}}, \text{ где је } x_0 = 2 \text{ јер је}$$

$$f(2) \cdot f''(2) > 0$$

$$\Leftrightarrow 6.054 \cdot 12.020 > 0$$

Нумерички резултат:

Како је $f'(x) > 0$ и $f'(x) \uparrow$ на интервалу $[1, 2]$, следи

$$m_1 = \min_{x \in [1, 2]} |f'(x)| = f'(1) = \frac{17}{6} \approx 2.8333$$

$$\text{Из } |3 - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1} \leq 10^{-4} \text{ следи } |f(x_n)| < m_1 \cdot 10^{-4} \approx 0.0002833$$

n	x_n	$f(x_n)$	$\frac{ f(x_n) }{m_1}$
0	2	6.054	
1	1.4955	1.4736	
2	1.2707	0.2159	
3	1.2246	0.0080	$0.00282 > 10^{-4}$
4	1.2228	0.0000126	$0.00000445 < 10^{-4}$

Значи, тражено решење ~~је~~ $x^* = x_4 = 1.2228$ је достигнуто у 4. итерацији.