

Студент: \_\_\_\_\_ Индекс: \_\_\_\_\_

Тема: **Системи линеарних једначина**

Задатак:

Трансформација система у облик  $x = Bx + c$  и/или доказ конвергенције:

ЈАКОБИЋЕВОМ МЕТОДОМ РЕШИТИ СИСТЕМ  $x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 7$   
СА ТАЧНОШЋУ  $10^{-3}$ .  
 $5x_1 + 2x_2 - 8x_3 = -5$ ,  
 $6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5$

Да би добили дијагонално-доминантан систем, заменити смо места једначинама:  $6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5$  }  $\rightarrow |6| > |3| + |2|$   
(\*)  $x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 7$  }  $\rightarrow |1| > |4| + |2|$   
 $5x_1 + 2x_2 - 8x_3 = -5$  }  $\rightarrow |5| > |2| + |8|$  }  $\Rightarrow$  систем је дијагонално-доминантан па Јакобијев итеративни процес конвертира!

$$\Rightarrow \begin{cases} 6x_1 = -3x_2 - 2x_3 + 5 \\ 4x_2 = x_1 + 2x_3 - 7 \\ 8x_3 = 5x_1 + 2x_2 + 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{5}{6} \\ x_2 = \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{7}{4} \\ x_3 = \frac{5}{8}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{5}{8} \end{cases} \quad (\text{облик } X = B \cdot X + C)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0.5x_2^{(k)} - 0.3333x_3^{(k)} + 0.8333 \\ x_2^{(k+1)} = 0.25x_1^{(k)} + 0.5x_3^{(k)} - 1.75 \\ x_3^{(k+1)} = 0.625x_1^{(k)} + 0.25x_2^{(k)} + 0.625 \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1^{(0)} = 0.8333 \\ x_2^{(0)} = -1.75 \\ x_3^{(0)} = 0.625 \end{matrix} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{matrix}} \right\} \text{ је Јакобијев итеративни процес}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & -0.3333 \\ 0.25 & 0 & 0.5 \\ 0.625 & 0.25 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \|B\|_{\infty} = \max\{0.8333, 0.75, 0.875\} = 0.875$$

$$(\|B\|_1 = 0.875)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.8333 \\ -1.75 \\ 0.625 \end{bmatrix} \Rightarrow \|C\|_{\infty} = \max\{0.8333, 1.75, 0.625\} = 1.75 = \|x^{(0)}\|_{\infty}$$

НАПОМЕНА: Да би добили матрицу  $B$  са мањом нормом, систем (\*) смо могли трансформисати нбр. на следећи начин:

$$(*) \quad \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5 & \text{I} \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 7 & \text{II} \\ 5x_1 + 2x_2 - 8x_3 = -5 & \text{III} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{I} + \text{II}: 7x_1 - x_2 + 4x_3 = 12 \\ \text{II}: x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 7 \\ \text{I} - \text{III}: x_1 + x_2 + 10x_3 = 10 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{7}x_2 - \frac{4}{7}x_3 + \frac{12}{7} \\ x_2 = \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{7}{4} \\ x_3 = -\frac{1}{10}x_1 - \frac{1}{10}x_2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \|B\|_{\infty} = 0.75$$

$\Rightarrow$  процес брже конвертира!



Потребан број итерација (ако је задата грешка):

Нека је  $K \in \mathbb{N}$  потребан број итерација. Тада је  

$$\underbrace{\|X - X^{(K)}\|_{\infty}}_{\text{грешка}} \leq \underbrace{\frac{\|B\|_{\infty}}{1 - \|B\|_{\infty}} \cdot \|X^{(0)}\|_{\infty}}_{\text{оцена грешке}} \leq 10^{-3} \Rightarrow \frac{0.875^{K+1}}{0.125} \cdot 1.75 \leq 0.001 \Rightarrow 0.875^{K+1} \leq 0.0000714...$$
  
 Лако се (унутар калкулатора) проверава да је најмање  $K \in \mathbb{N}$ , које задовољава последњу неједнакост, једнако 71, тј.  $K \geq 71$ . ( $0.875^{72} < 0.0000714... < 0.875^{71}$ ).  
 Значи, потребно је извршити најмање 71 итерацију.  
 Напомена: У случају трансформисаног система и матрице  $B$  за коју је  $\|B\|_{\infty} = 0.75$ , добија се да је довољно извршити 30 итерација!

Решење система:

За унете параметре: 

6	3	2	5	0.8333
1	-4	2	7	-1.75
5	2	-8	-5	0.625

 (коэффициенти система (\*) и почетно решење  $X^{(0)}$ )  
 добијано:

$K$	$X_1^{(K)}$	$X_2^{(K)}$	$X_3^{(K)}$
0	0.8333	-1.75	0.625
1	1.5000	-1.2292	0.7083
⋮	⋮	⋮	⋮
70	1.0000	-1.0000	1.0000
71	1.0000	-1.0000	1.0000

Оцена грешке (ако је дат број итерација):

Значи, крајње решење је:  $X_1^{(71)} = 1.0000$ ,  $X_2^{(71)} = -1.0000$ ,  $X_3^{(71)} = 1.0000$