Дискретне математичке структуре

Владимир Балтић

# Елементи Теорије графова

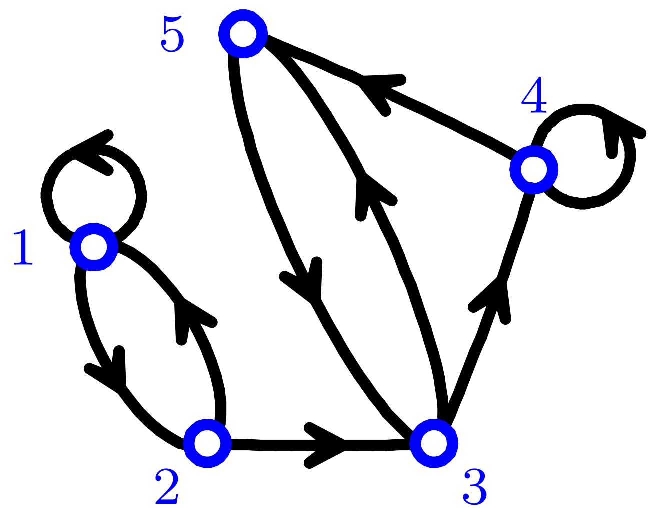
**Дефиниција 1.** *Граф* $G$ је уређен пар $(V, \varrho)$, где је $V$ непразан скуп и $\varrho$ бинарна релација на $V$.

Елементи скупа $V$ се зову *чворови*, (енг. *vertex*, мн. *vertices*), а елементи скупа $\varrho$ *гране* (енг. *edge*) графа $G$.

**Пример 1.** Граф $G = (V, \varrho)$ задат релацијом

$$\varrho = \Big\{ (1,1), (1,2), (2,1), (2,3), (3,4), (3,5), (4,4), (4,5), (5,3) \Big\}$$

на скупу $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.



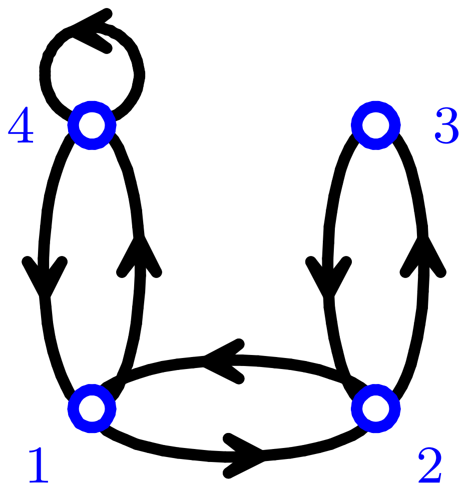
**Дефиниција 2.** *Неоријентисани граф* $G$ је уређен пар $(V, E)$, где је $V$ непразан скуп, а $E \subseteq \Big\{\{u, v\} \mid u, v \in V\Big\}$.

Елементи скупа $V$ се зову *чворови*, а елементи скупа $E$ *гране* неоријентисаног графа $G$.

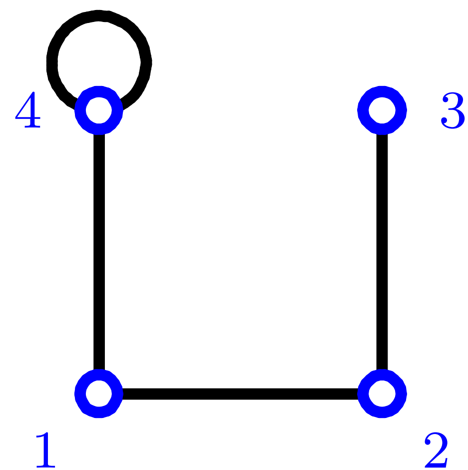
**Пример 2.** Граф $(V, \varrho)$ задат релацијом

$$\varrho = \Big\{(1,2),(1,4),(2,1),(2,3),(3,2),(4,1),(4,4)\Big\}$$

на скупу $V = \{1, 2, 3, 4\}$.




$\rightleftarrows$



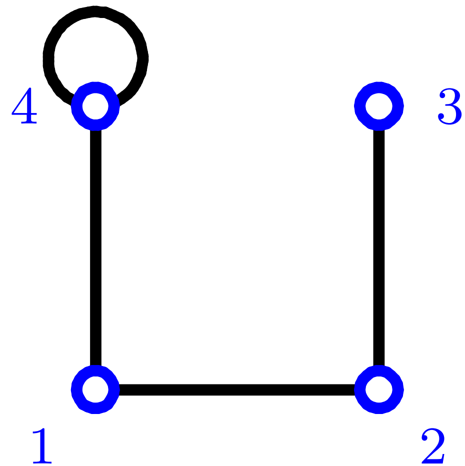
**Дефиниција 3.** Два чвора $u$ и $v$ неоријентисаног графа $(V, E)$, су *суседна* ако постоји грана $e = \{u, v\} \in E$. За чворове $u$ и $v$ кажемо да су *крајње тачке* гране $e$. За чвор $u$ и грану $e$ (односно чвор $v$ и грану $e$) кажемо да су *инцидентни* и да се грана $e$ *стиче* у чвору $u$ (односно $v$). Две гране су *суседне* ако се стичу у истом чвору.

**Дефиниција 4.** Број грана које се стичу у чвору $v$ зове се *степен чвора* $v$ (енг. *degree*) и означава се са $d(v)$.

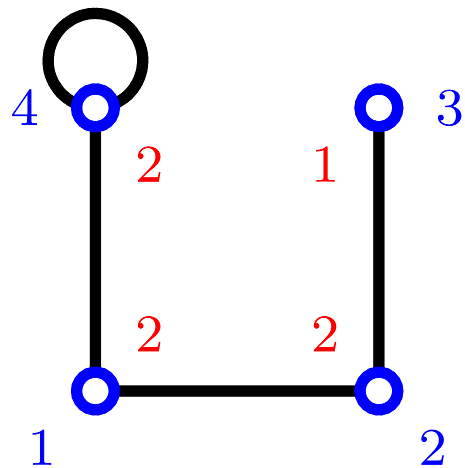
Чвор $v$ који нема суседних чворова, тј. за који је $d(v) = 0$, називамо *изолован чвор*.

Граф $G$ је *регуларан* ако су степени свих његових чворова једнаки.

**Пример 3.** Одредити степене свих чворова графа $G$. Да ли је граф $G$ регуларан?



**Пример 3.** Одредити степене свих чворова графа $G$. Да ли је граф $G$ регуларан?




$d(1) = 2$, $d(2) = 2$, $d(3) = 1$ и $d(4) = 2$.

$G$ НИЈЕ регуларан.

**Дефиниција 5.** За грану $e = (u, v)$ ориј. графа $(V, \varrho)$ кажемо да *води* из чвора $u$ у чвор $v$ ($e$ *излази* из чвора $u$, а *улази* у чвор $v$).

*Улазни степен* $d^-(v)$ *чвора* $v$ је број грана које улазе у $v$.

*Излазни степен* $d^+(v)$ *чвора* $v$ је број грана које излазе из $v$.

*Улазни скуп* $I(v)$ *чвора* $v$ је скуп чворова из којих води грана у $v$, тј. $I(v) = \{x \mid (x, v) \in \varrho\}$.

*Излазни скуп* $O(v)$ *чвора* $v$ је скуп чворова у које води грана из $v$, тј. $O(v) = \{x \mid (v, x) \in E\}$.

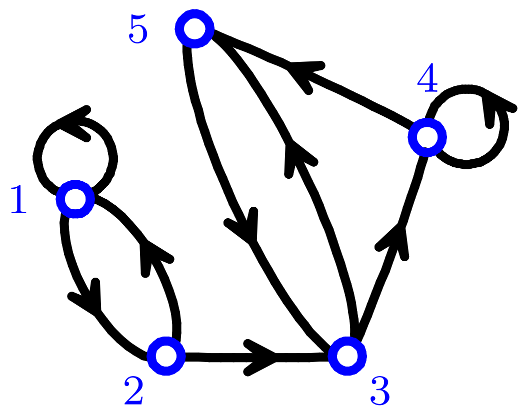
Петља је грана која и улази и излази из чвора.

**Напомена.** Важи

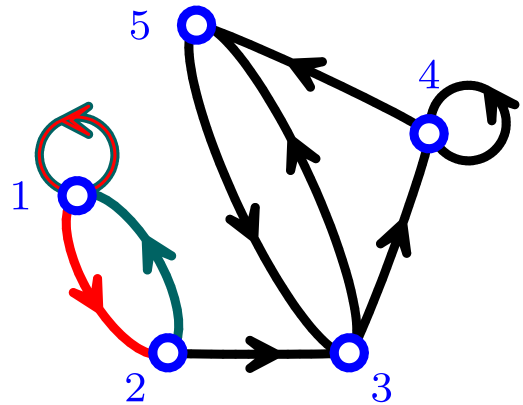
$$d^-(v) = |I(v)| \qquad \text{и} \qquad d^+(v) = |O(v)|.$$

## Пример 4.

Одредити $d^-(v)$ и $d^+(v)$, као и $I(v)$ и $O(v)$ за сваки чвор $v$ графа:



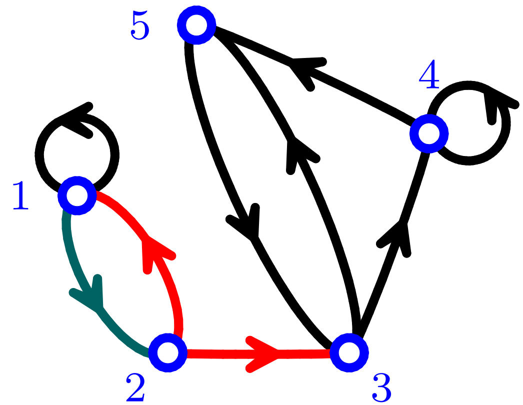
## Пример 4.




$$I(1) = \{1, 2\} \qquad \Rightarrow \qquad d^-(1) = 2,$$

$$O(1) = \{1, 2\} \qquad \Rightarrow \qquad d^+(1) = 2.$$

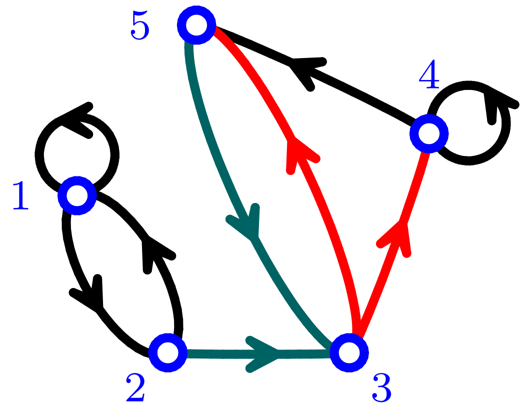
**Пример 4.**




$$I(2) = \{1\} \qquad \Rightarrow \qquad d^-(2) = 1,$$

$$O(2) = \{1, 3\} \qquad \Rightarrow \qquad d^+(2) = 2.$$

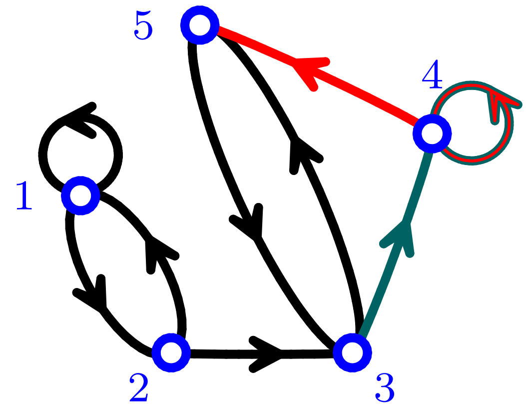
**Пример 4.**




$$I(3) = \{2, 5\} \qquad \Rightarrow \qquad d^-(3) = 2,$$

$$O(3) = \{4, 5\} \qquad \Rightarrow \qquad d^+(3) = 2.$$

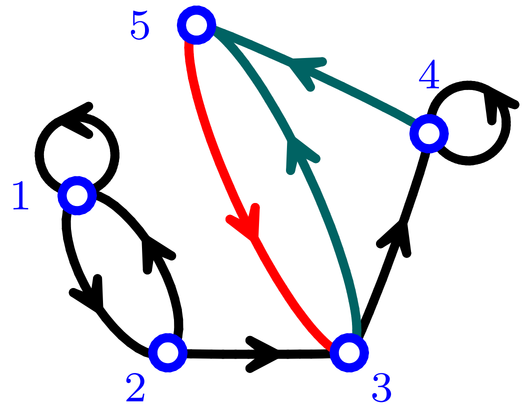
**Пример 4.**




$$I(4) = \{3, 4\} \qquad \Rightarrow \qquad d^{-}(4) = 2,$$

$$O(4) = \{4, 5\} \qquad \Rightarrow \qquad d^{+}(4) = 2.$$

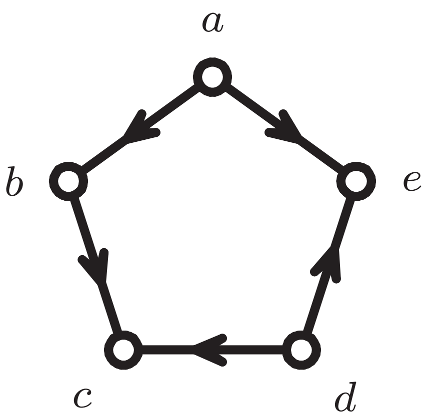
**Пример 4.**

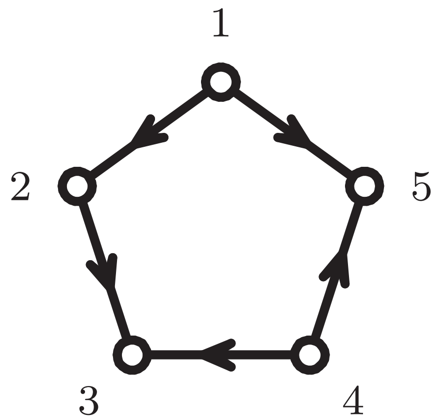


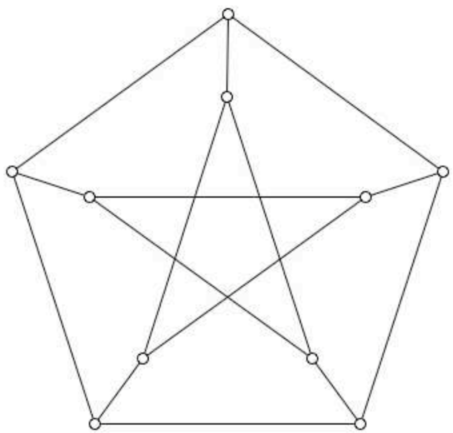

$$I(5) = \{3, 4\} \qquad \Rightarrow \qquad d^-(5) = 2,$$

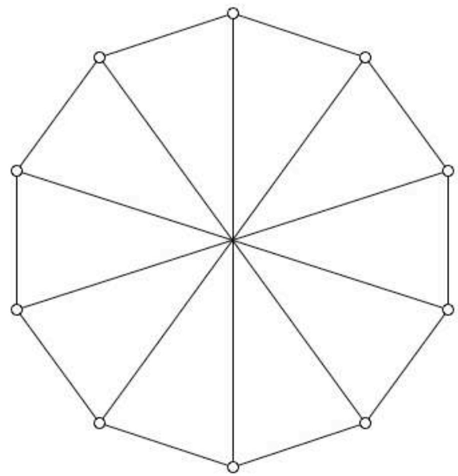
$$O(5) = \{3\} \qquad \Rightarrow \qquad d^+(5) = 1.$$

# Да ли су следећи графови исти?





**Дефиниција 6.** Два графа $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ су *изоморфна*, $G_1 \cong G_2$, ако постоји бијекција $f\colon V_1 \to V_2$ за коју је

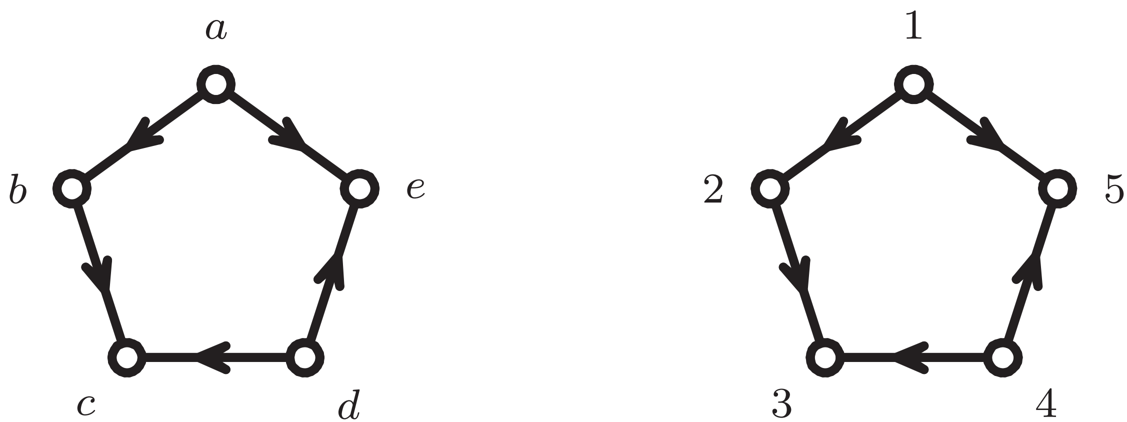
- $(u, v) \in E_1 \quad \Leftrightarrow \quad \big(f(u), f(v)\big) \in E_2$

  (код оријентисаних графова);

- $\{u, v\} \in E_1 \quad \Leftrightarrow \quad \big\{f(u), f(v)\big\} \in E_2$

  (код неоријентисаних графова).

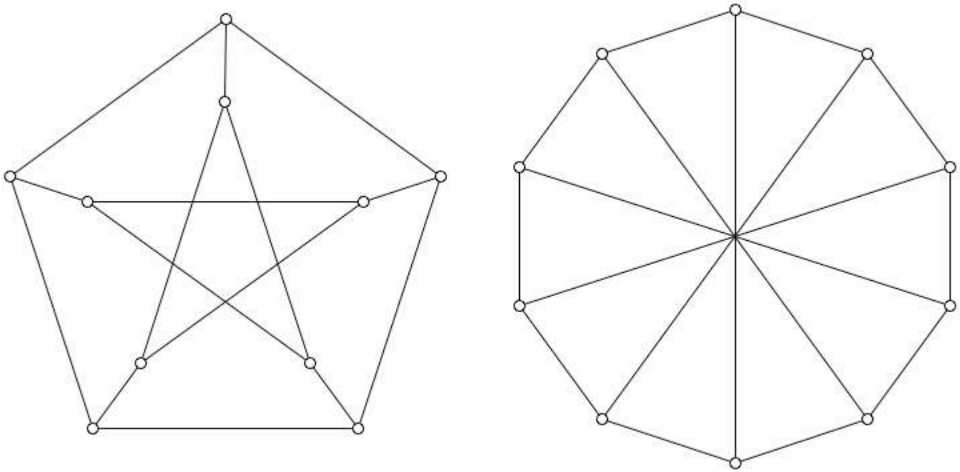
**Пример 5.** Изоморфизам $f$ графова




дат је бијекцијом

$$f = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

**Пример 6.** Графови

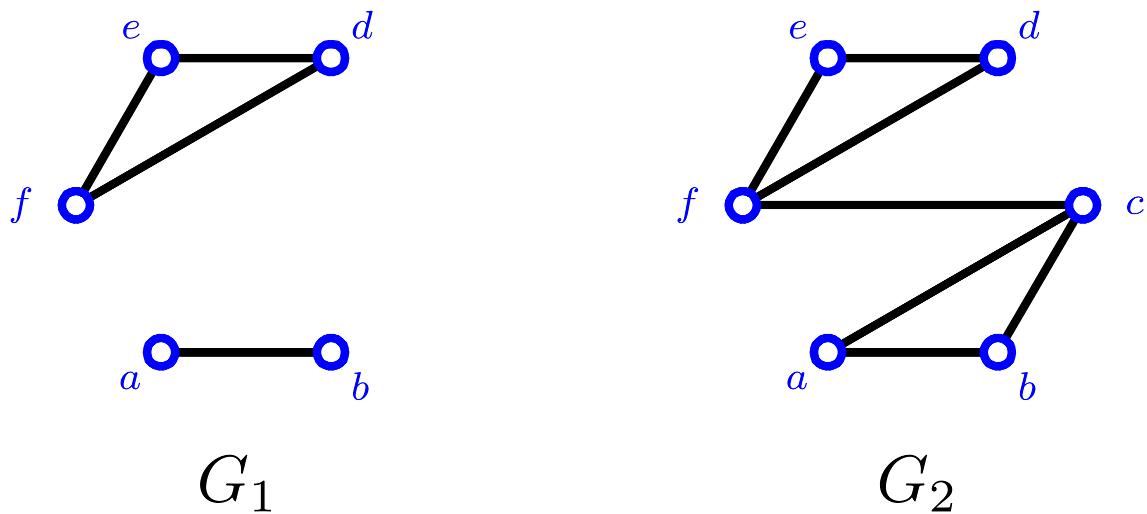


нису изоморфни. Зашто?

**Дефиниција 7.** Граф $G' = (V', E')$ је *подграф* графа $G = (V, E)$ ако важи $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$.

Граф $G$ је *надграф* графа $G'$ ако је $G'$ подграф графа $G$.

**Пример 7.** Граф $G_1 = (V_1, E_1)$ је подграф графа $G_2 = (V_2, E_2)$




јер је $V_1 = \{a, b, d, e, f\} \subseteq V_2 = \{a, b, c, d, e, f\}$

$E_1 = \{ab, de, df, ef\} \subseteq E_2 = \{ab, ac, bc, cf, de, df, ef\}$.

**Дефиниција 8.** *Пут дужине* $k$, $k \geqslant 1$, у графу $(V, E)$ је низ грана из $E$ облика

- $(v_0, v_1),\ (v_1, v_2),\ \ldots\ ,\ (v_{k-1}, v_k)$

  (код оријентисаних графова);

- $\{v_0, v_1\},\ \{v_1, v_2\},\ \ldots\ ,\ \{v_{k-1}, v_k\}$

  (код неоријентисаних графова).

За овај пут кажемо да *почиње* у чвору $v_0$, а да се *завршава* у чвору $v_k$. Чворове $v_0$ и $v_k$ се зову *крајњи чворови пута*.

Пут се може задати и као низ узастопних чворова спојених гранама:

$$v_0 - v_1 - v_2 - \ldots - v_{k-1} - v_k.$$

За пут кажемо да *пролази* кроз чворове

$v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k$.

**Дефиниција 9.** *Елементарни* (*прост*) *пут* је пут који кроз сваки свој чвор $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$ пролази тачно једанпут.

*Кружни* (*затворен*) *пут* је пут који се завршава у истом чвору у којем и почиње, тј. $v_0 = v_k$.

*Контура* (*циклус*) је елементарни кружни пут.

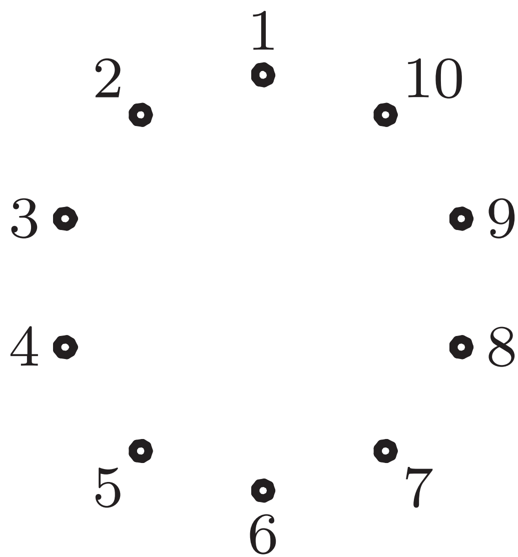
**Дефиниција 10.** $G = (V, E)$ неор. граф. Чворови $u, v \in V$ су *повезани* ако у $G$ постоји пут чији су крајњи чворови $u$ и $v$. Граф $G$ је *повезан* ако су свака два његова чвора повезана, а у супротном кажемо да је *неповезан*.

*Компонента повезаности* графа $G$ је неки његов максимални повезани подграф. *Број компоненети повезаности* графа $G$ означавамо са $c(G)$.

Чвор $v$ је *везивни* (*артикулациони*) *чвор* уколико се његовим уклањањем повећава број компоненти повезаности овога графа, тј. ако важи $c(G) < c(G - v)$.

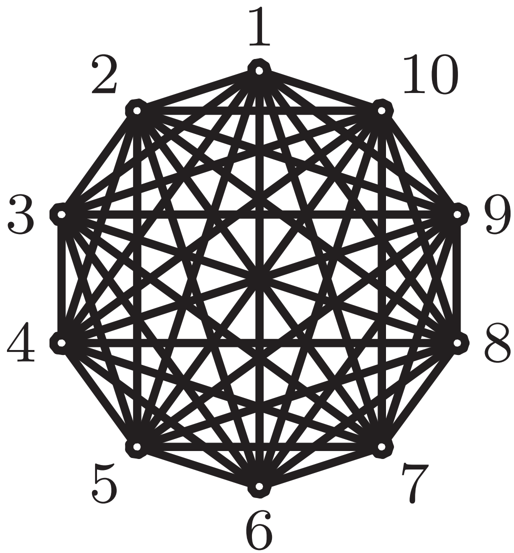
Грана $e$ је *мост* у графу $G$ ако се њеним уклањањем повећава број компоненти повезаности овог графа, тј. ако важи $c(G) < c(G - e)$.

**Дефиницициja 11.** *Празан граф* $N_n$ (негде $\overline{K_n}$) je граф који нема ниједну грану.



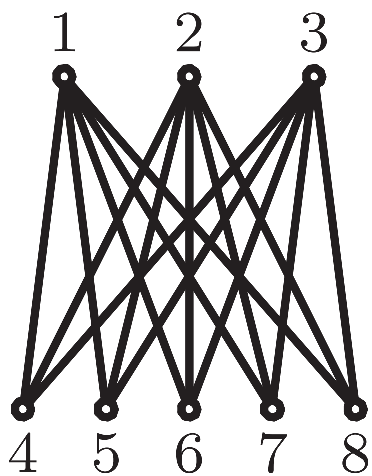

$N_{10}$

*Комплетан* (*потпун*) *граф* $K_n$ је граф код кога је сваки чвор суседан са свим осталим.




$K_{10}$

*Комплетан бипартитан граф* $K_{m,n}$ је граф код кога је скуп чворова разбијен на 2 *класе* (са $m$ и $n$ чворова), тако да не постоји грана између чворова исте класе, док су свака 2 чвора из различитих класа спојена граном.



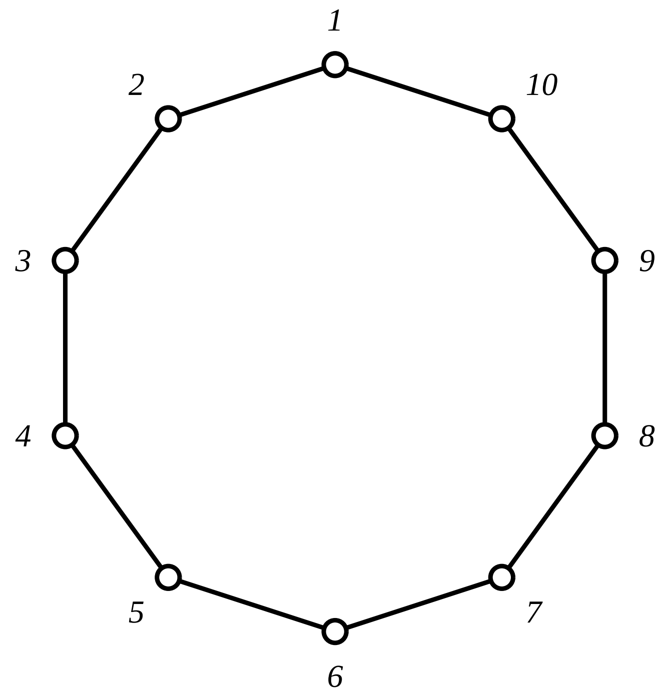

$K_{3,5}$

*Бипартитан граф* је било који подграф комплетног бипартитног графа.

*Пут* $P_n$, $n \geqslant 2$, је повезан граф коме су сви чворови степена 2, сем два крајња који су степена 1.

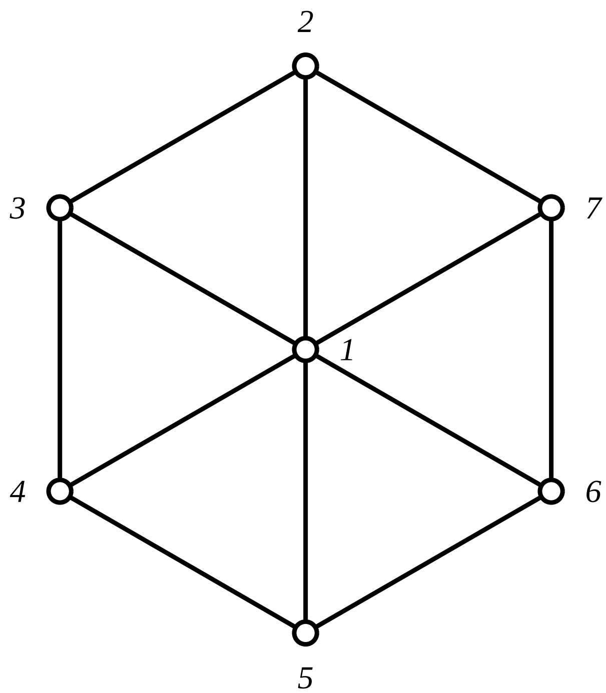

$P_{10}$

*Контура* $C_n$, $n \geqslant 3$, је повезан граф који има све чворове степена 2.



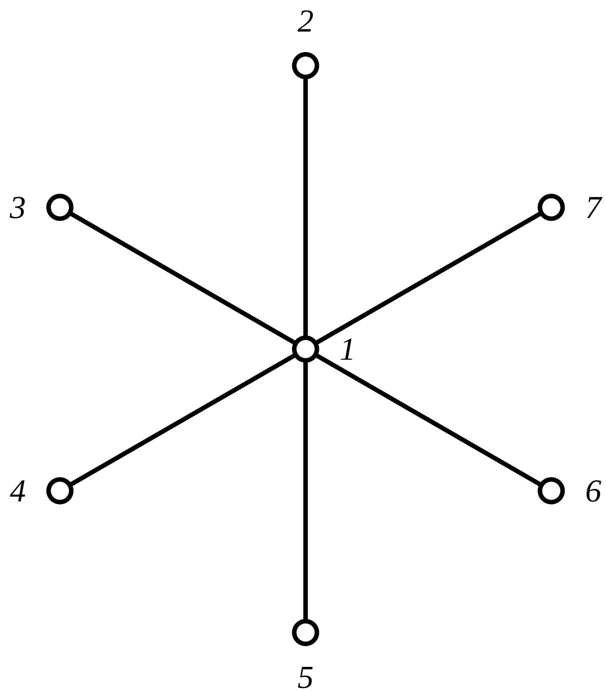

$C_{10}$

*Точак* $W_n$, $n \geqslant 4$, је граф који се састоји од контуре $C_{n-1}$ и једног чвора који је повезан са свим чворовима контуре




$W_7$

*Звезда* $S_n$ је комплетни бипартитни граф где се једна класа састоји само од једног чвора, а друга од свих осталих, тј. $S_n = K_{1,n-1}$.

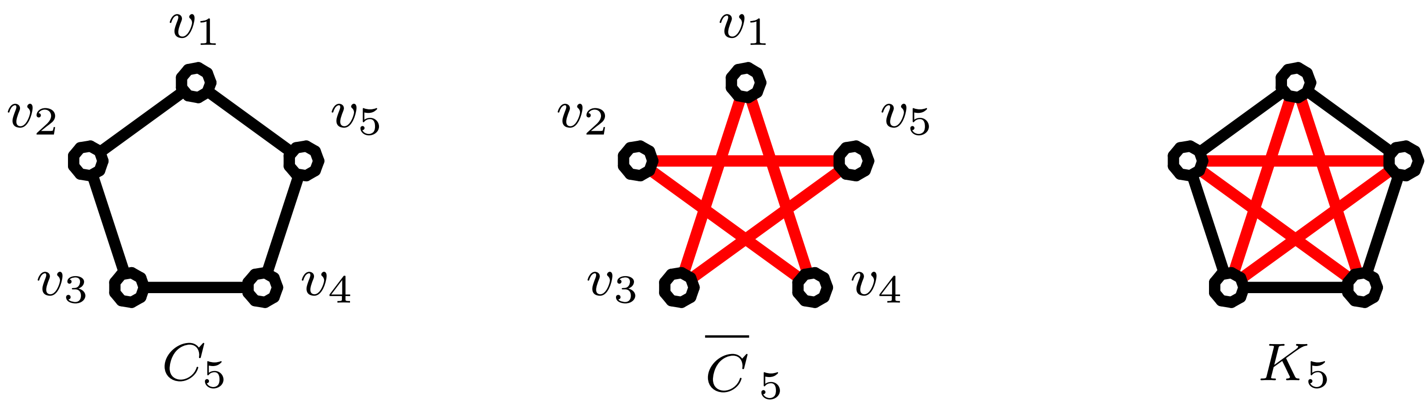



$S_7$

**Дефиниција 12.** Неор. граф $\overline{G} = (V', E')$ је *комплемент* неор. графа $G = (V, E)$ ако важи да је $V' = V$ и да су 2 чвора суседна у $\overline{G}$ акко нису суседна у $G$.

Граф је *самокомплементаран* ако је изоморфан са својим комплементом.

**Пример 8.** $C_5$ је самокомплементаран граф.




Изоморфизам $f : V(C_5) \to V(\overline{C}_5)$ између $C_5$ и $\overline{C}_5$ је:

$$f = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ v_1 & v_3 & v_5 & v_2 & v_4 \end{pmatrix}.$$

**Теорема 1.** У неор. графу $G = (V, E)$ без петљи са $n \geqslant 2$ чворова постоје бар 2 чвора истог степена.

**Теорема 2.** У неор. графу $G = (V, E)$ без петљи је збир степена свих чворова једнак двоструком броју грана, тј. важи

$$d(v_1) + d(v_2) + \ldots + d(v_n) = 2m.$$

**Теорема 3.** У неор. графу $G = (V, E)$ без петљи број чворова непарног степена је паран.

**Теорема 4.** У орij. графу $G = (V, E)$ важи

$$d^-(v_1)+d^-(v_2)+\ldots+d^-(v_n)=m=d^+(v_1)+d^+(v_2)+\ldots+d^+(v_n).$$

**Дефиниција 13.** *Ојлерова контура* графа $G$ је контура која садржи све гране из $G$. Граф који има Ојлерову контуру је *Ојлеров граф*.

*Ојлеров пут* у графу $G$ је пут који садржи све гране из $G$. Граф који има Ојлеров пут је *полуојлеров граф*.

**Теорема 5. Ојлерова теорема.** Повезан граф са бар једном граном је Ојлеров ако и само ако садржи све чворове парног степена.

**Теорема 6.** Повезан граф са бар једном граном је полуојлеров ако и само ако садржи 0 или 2 чвора непарног степена.

**Дефиниција 14.** *Хамилтонова контура* графа $G$ је контура која садржи све чворове из $G$. Граф који има Хамилтонову контуру је *Хамилтонов граф*.

*Хамилтонов пут* у графу $G$ је елементаран пут који садржи све чворове из $G$. Граф који има Хамилтонов пут је *полухамилтонов граф*.

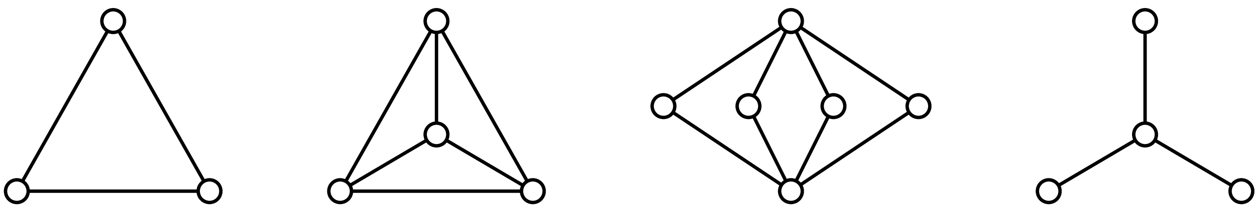
## Пример 9.

$C_n$ је и Ојлеров и Хамилтонов граф.

$K_4$ није Ојлеров, а јесте Хамилтонов.

$K_{2,4}$ јесте Ојлеров, а није Хамилтонов.

$S_4$ није ни Ојлеров ни Хамилтонов граф.



$C_3$ $K_4$ $K_{2,4}$ $S_4$

# Представљање графова

- Матрица суседства
- Листа суседства
- Матрица инциденције
- Матрица растојања

**KRAJ**