

ЗАДАЦИ ИЗ КОНАЧНИХ АУТОМАТА

Весна Којић

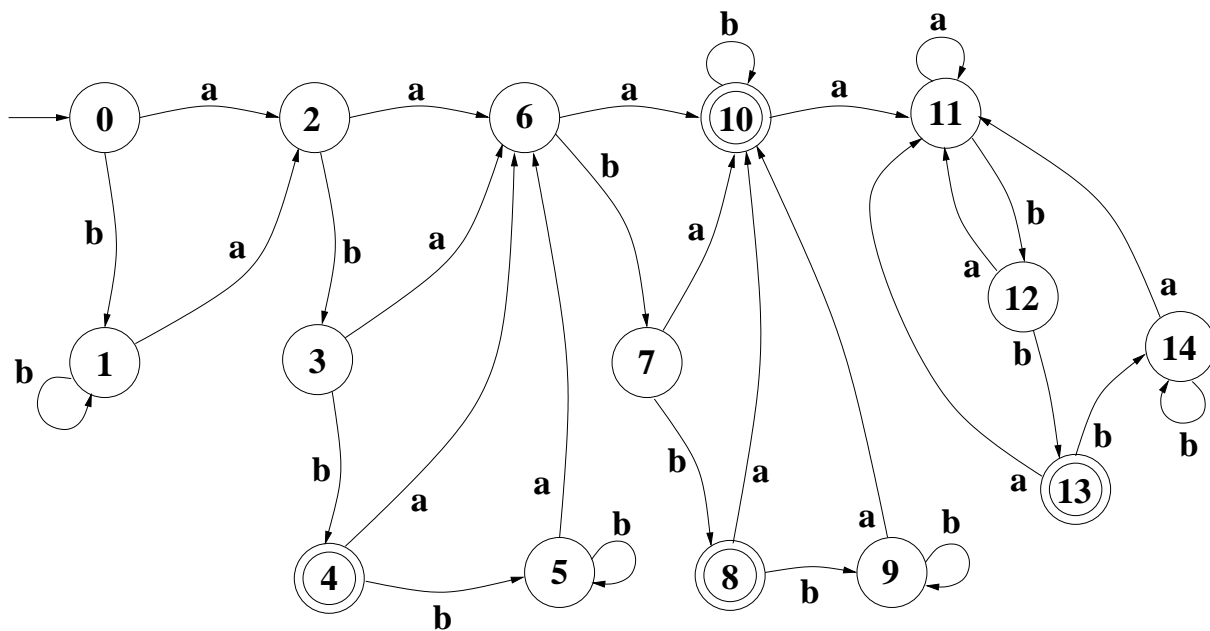
Београд 2005.

Следећи текст је заједнички почетни део текста свих наредних задатака:

Наћи коначни аутомат над азбуком $\{a, b\}$ који препознаје скуп оних речи R таквих да реч R

1. садржи тачно три a или се завршава на abb .

Решење:



У стању 0 аутомат се налази када још није прочитан ниједан знак.

У стању 1 налази се када је прочитана нека секвенца знакова b , али још није прочитано ниједно a .

У стању 2 аутомат се налази када се први пут прочита знак a . Све до следећег (евентуалног) читања знака a аутомат се налази у неком од стања 3, 4, 5, и то у стању 3 када се прочита прво b после тог a , односно у стању 4 када се прочита друго b , односно у стању 5 када се прочита b које је бар треће по реду после тог a .

У стању 6 аутомат се налази приликом другог читања слова a . Након тога, аутомат ће се све до (евентуалног) наредног читања слова b налазити у неком од стања 7, 8, 9 уз сасвим сличне напомене као малопре.

У стање 10 аутомат улази приликом читања трећег по реду слова a . Након тога, аутомат ће се све до следећег читања слова a остати у том стању. Другим речима, у стању 10 аутомат се налази у случају да су до тада прочитана тачно три слова a .

У стању 11 аутомат се налази након читања слова a које је барем четврто по реду. Након читања првог знака b после најмање четвртог по реду слова a аутомат се налази у стању 12, после читања другог b након барем четвртог a у стању 13, а након читања знака b који је барем трећи по реду после слова a које је барем четврто по реду у стању 14.

Сада се поставља логично питање како ове тврдње формално математички доказати. Означимо са A_i скуп свих оних речи за које тврдимо да након њиховог читања (почев од почетка улазног низа) аутомат доспева у стање i . Најпре треба проверити две ствари: да су сви ти скупови дисјунктни и да празна реч припада скупу који одговара почетном стању (у нашем случају то је скуп A_0).

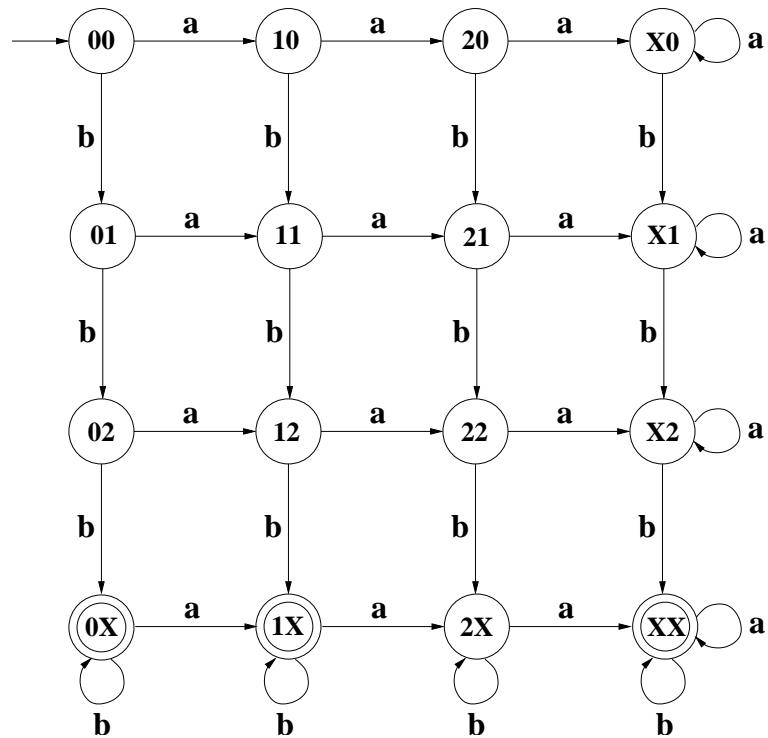
Затим треба проверити да ако аутомат приликом читања знака z прелази из стања i у стање j , да се дописивањем знака z на крај било које речи из скупа A_i добија реч из скупа A_j . Уколико је и овај услов испуњен за сваки знак z , свако стање i и одговарајуће стање j , онда унија свих скупова A_i мора бити једнака скупу свих речи, што се једноставно доказује индукцијом по дужини речи.

Штавише, тада се индукцијом по дужини речи може доказати да се након читања било које речи из скупа A_i (почев од почетка улазног низа) аутомат заиста налази у стању A_i , односно да су наше тврдње биле тачне.

На крају остаје да се докаже да свака реч која припада скупу који одговара прихватљивом стању припада граматички, као и да ма која реч која припада скупу који одговара неприхватљивом стању не припада граматички. Тиме ће доказ бити окончан. Све ове чињенице се лако проверавају, како у овом, тако и у наредним задацима, па ће убудуће у решењима бити дати само коначан аутомат и описи скупова речи који одговарају његовим стањима.

2. не садржи тачно два a и садржи више од два b .

Решење:

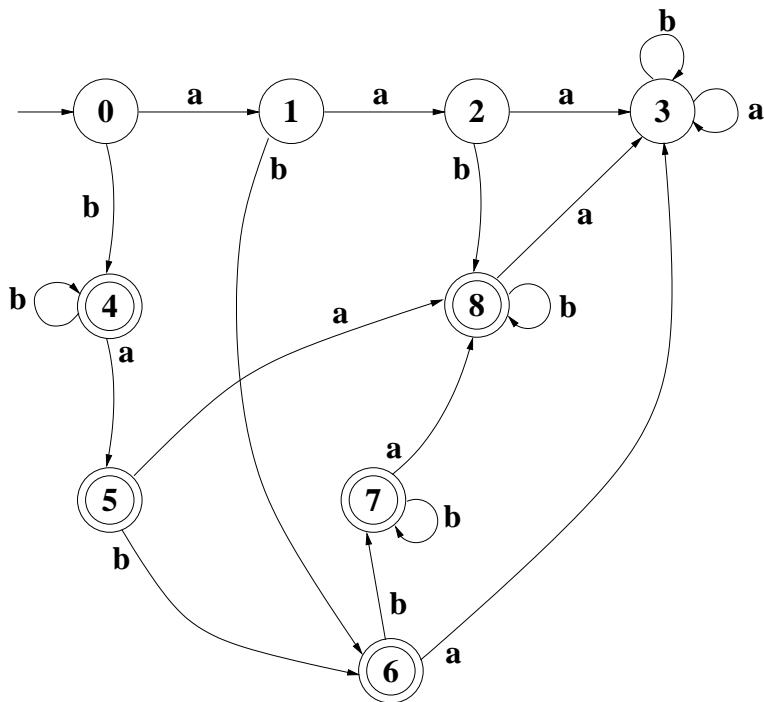


Аутомат се налази у стању ij ако је прочитано тачно i слова a и тачно j слова b , у стању iX ако је прочитано тачно i слова a и најмање три слова b , у стању Xj ако је прочитано барем три слова a и тачно j слова b , односно у стању XX ако је прочитано најмање три слова a , као и најмање три слова b .

3. садржи најмање једно b , највише два a и не садржи aba .

Решење:

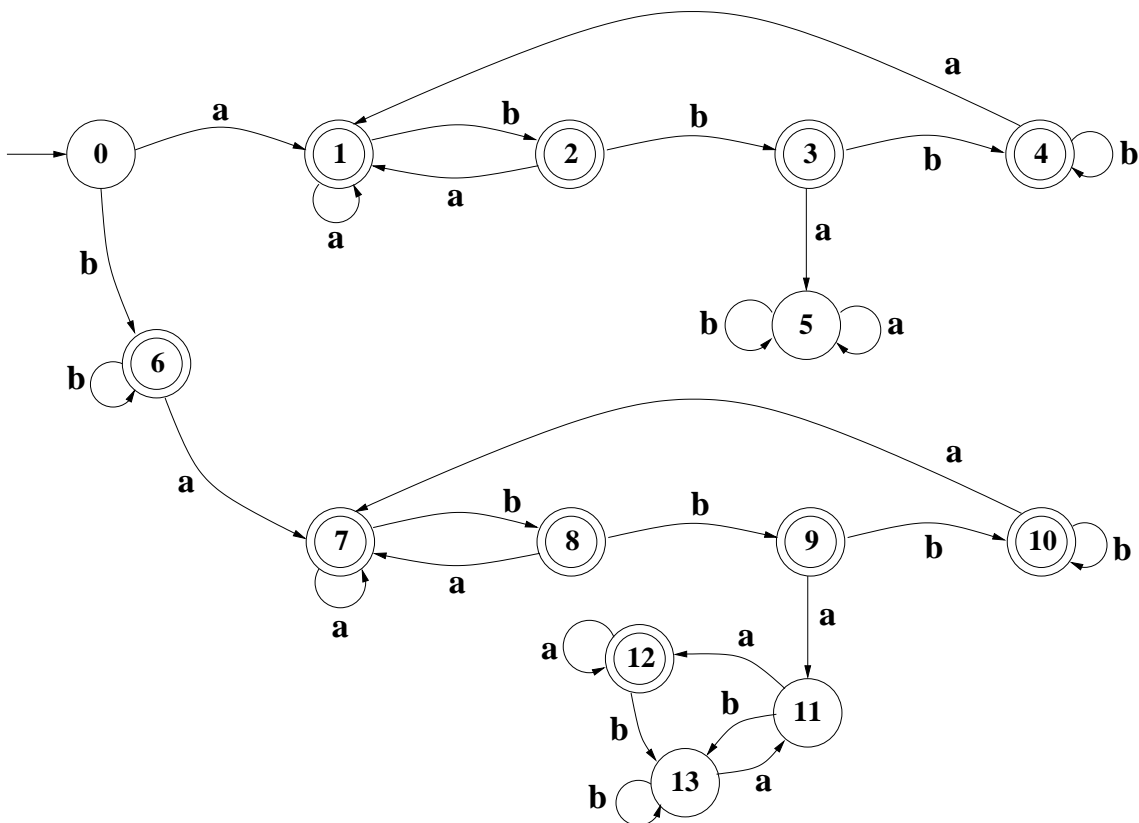
Аутомат s у стању 0 налази на почетку. У стању 1 налази се ако је прочитано једно a и ниједно b , а у стању 2 ако је прочитано два a и ниједно b . У стању 3 се налази ако је прочитано најмање три слова a или ако је дотле барем једном прочитана секвенца aba . У стању 4 аутомат се налази ако је прочитано најмање једно b и није прочитано нити једно a , а у стању 5 приликом читања првог слова a под условом да је пре тога прочитано најмање једно b . У стању 6 аутомат се налази након читања знака b који је непосредно после првог слова a у улазном низу. У стању 7 се налази након читања секвенце од најмање два знака b који се налазе одмах након првог појављивања слова a . У стању 8 аутомат се налази када је прочитано најмање једно слово b , тачно два знака a и притом није прочитана секвенца aba .



4. испуњава барем један од следећих услова:

- a) Низ почиње са b и завршава се на aa .
- b) Између два a (ако постоје) не постоје тачно два b .

Решење:

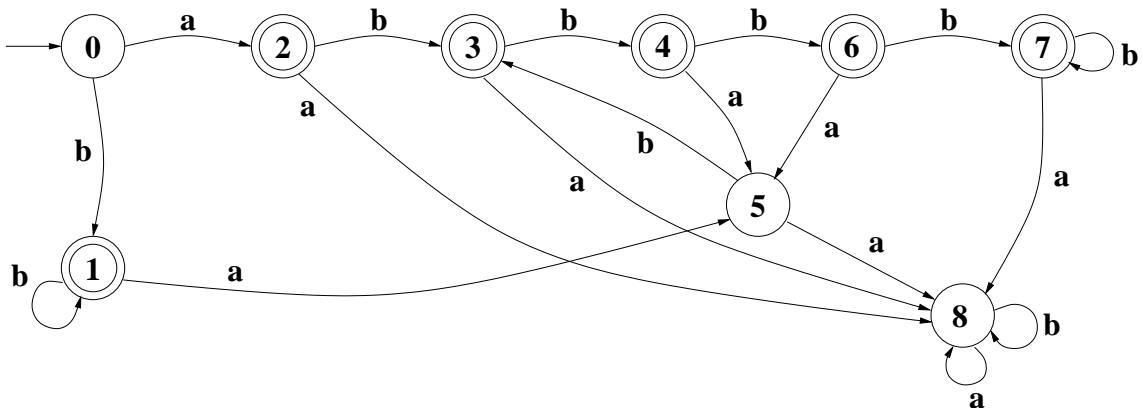


У стању 0 аутомат се налази на почетку. У стању 1 аутомат се налази након читања слова a под условом да до тада није прочитана секвенца $abba$ (рачунајући ту и тај знак a који је управо прочитан) и да је први прочитан знак био a . У стању 2 односно 3, односно 4 аутомат се налази након читања првог, односно другог знака b , односно знака b који је бар трећи по реду након слова a тим редом, под условом да је први прочитан знак био a и да до тада није прочитана секвенца $abba$. У стању 5 аутомат се налази ако је до тада (укључијући и управо прочитани знак) прочитана секвенца $abba$ и ако је први прочитани знак био a . Описи стања 7, 8, 9 и 10 су сасвим слични описима стања 1, 2, 3 и 4 тим редом, уз једину разлику што се односе на случај када реч са улаза почиње знаком b . У стању 6 аутомат се налази када је прочитано барем једно b и ниједно a . У стањима 11, 12 и 13 аутомат се налази ако је до тада (укључујући и последњи прочитани знак) прочитана секвенца $abba$, и то у стању 11 ако је знак a коме је претходило слово b , у стању 12 када је прочитан знак a коме је претходило такође знак a , односно у стању 13 ако је управо прочитан знак b .

5. испуњава оба наредна услова:

- Реч се не завршава са ba .
- Између два a (ако постоје) постоје два или три b .

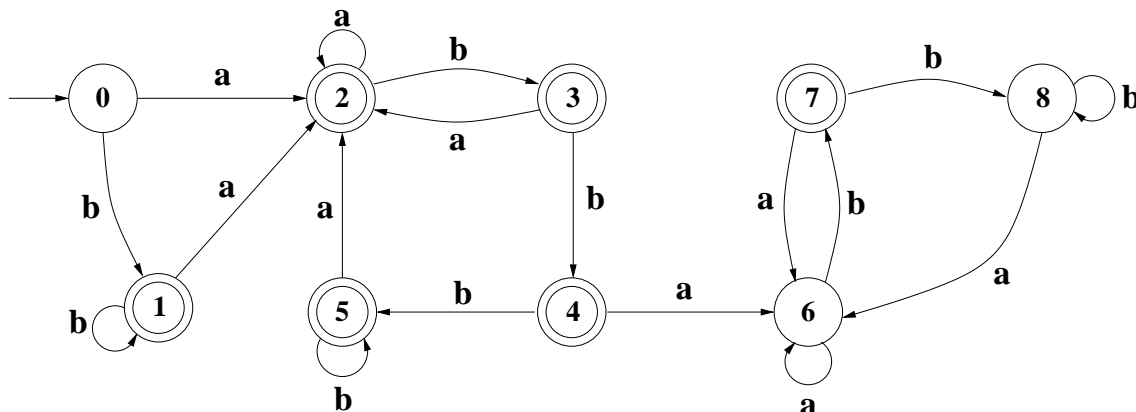
Решење:



У стању 0 аутомат се налази на почетку. У стању 1 налази се ако је прочитано барем једно b и ниједно a . У стању 2 аутомат се налази ако је прочитано једно a и ниједно b . У стању 8 аутомат се налази ако су до тада (укључујући и последњи прочитани знак) прочитана два знака a између којих нису нити тачно два нити тачно три знака b . У осталим случајевима се аутомат налази у неком од преосталих стања, и то у стању 3 након читања ниске ab , у стању 4 након читања ниске abb , у стању 5 након читај ниске ba , у стању 6 након читања ниске $abbb$, а у стању 7 након читања ниске од најмање четири слова b под условом да је раније прочитано најмање једно a .

6. између два a (ако постоје) не садржи тачно два b или се завршава на ab .

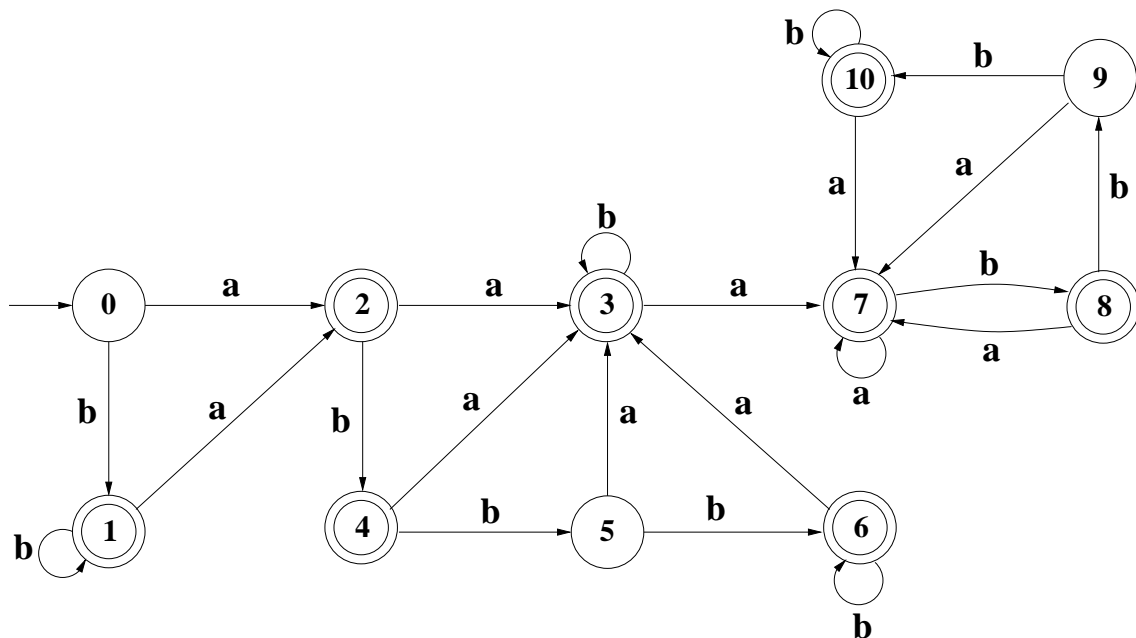
Решење:



У стању 0 аутомат се налази на почетку. У стању 1 налази се ако је прочитано барем једно b и ниједно a . Уколико је прочитан барем један знак a , али још није прочитана секвенца $abba$, онда се аутомат налази у неком од стања 2, 3, 4 или 5, и то у стању a ако је последњи прочитан знак био a , у стању 3 након читања секвенце ab , у стању 4 након читања секвенце abb , односно у стању 5 након читања секвенце од најмање три слова b . Уколико је пак аутомат већ прочитао секвенцу $abba$ (речунајући последњи прочитани знак), и то у стању 6 ако је последњи прочитани знак био a , у стању 7 након читања ниске ab , а у стању 8 након читања секвенце bb .

7. садржи тачно два a или се не завршава на abb .

Решење:

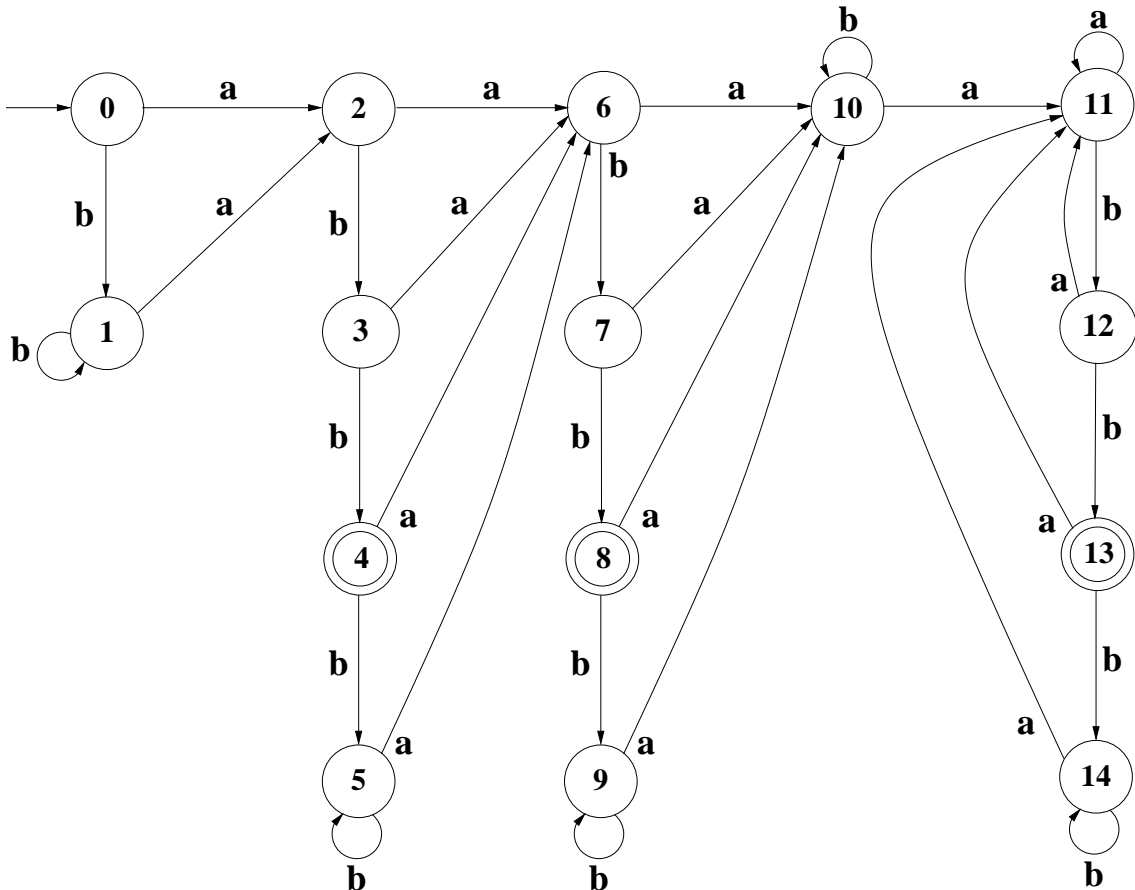


У стању 0 аутомат се налази на почетку. У стању 1 налази се ако је прочитано барем једно b и ниједно a . У стању 2 налази се када је прочитано прво a , а у стању 3 ако су до тада прочитана тачно два a (укључујући ту и последњи прочитани знак који може да буде и b). Аутомат се налази у стању 4 приликом читања секвенце ab , при чему је то једино прочитано a до тада. У стању 5 налази се када се прочита ниска abb , при чему је прочитано тачно једно слово a , а у стању 6 након читања секвенце bbb , при чему је до тада прочитано тачно једно a . У стањима 7, 8, 9 и 10 аутомат се налази када је прочитано више од два слова a , и то у стању 7 када се прочита слово a , у стању 8

када се прочита секвенца ab , у стању 9 након читања ниске abb , односно у стању 10 када се прочита ниска bbb .

8. не садржи тачно три a и завршава се на abb .

Решење:



У стању 0 аутомат се налази на почетку. У стању 1 налази се ако је прочитано барем једно b и ниједно a . Уколико је прочитано тачно једно a , аутомат се налази у једном од стања 2, 3, 4 или 5, и то у стању 2 након читања слова a , у стању 3 након читања секвенце ab , у стању 4 након читања секвенце abb , а у стању 5 након читања барем три узастопна b . Уколико су прочитана тачно два слова a , аутомат се налази у неком од стања 6, 7, 8 или 9, у сасвим сличне напомене као малопре. Уз сличне напомене се аутомат налази у неком од стања 11, 12, 13 или 14 када је прочитано више од три a , док се у стању 10 налази онда када су прочитана три a .

9. има бар једну од следећих особина:

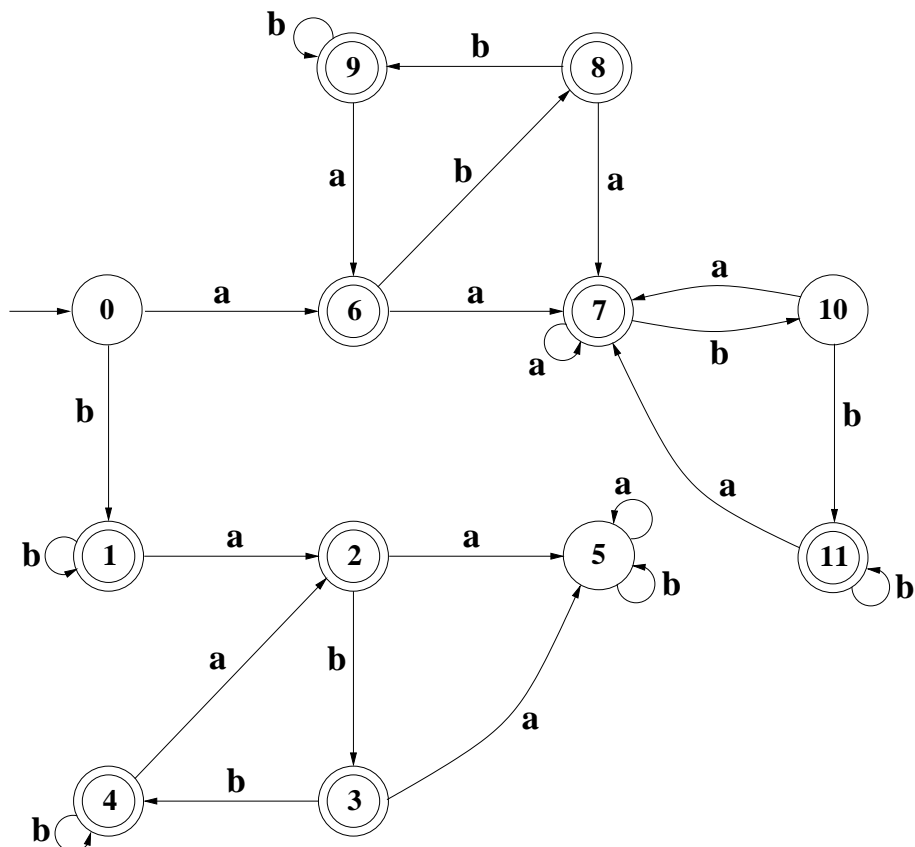
- Почиње са a и не завршава се са ab .
- Између два a (ако постоје) постоје најмање два b .

Решење:

У стању 0 аутомат се налази на почетку. Уколико је први прочитан знак био b , аутомат ће се налазити у неком од стања 1, 2, 3, 4 или 5, а иначе у неком од преосталих стања. Размотримо најпре случај да је први прочитани знак био b . Аутомат се налази у стању 5 ако је дотле бар једанпут прочитана нека од секвенци aa или aba , а иначе у неком од стања 1, 2, 3 или 4, и то у

стању 1 ако није прочитано нити једно a , у стању 2 ако је последњи прочитан знак био a , у стању 3 након читања секвенце ab , односно у стању 4 након читања секвенце bb .

Уколико је пак први прочитани знак био a аутомат ће се налазити у једном од стања 6, 8 или 9 ако дотле ни једанпут није прочитана нити секвенца aa нити секвенца aba , и то у стању 6 након читања знака a , у стању 8 након читања секвенце ab , односно у стању 9 након читања секвенце bb . Најзад, ако је први прочитани знак био a , и притом је до тада бар једанпут прочитана секвенца aa или секвенца aba , аутомат ће се налазити у неком од стања 7, 10 или 11, и то у стању 7 након читања знака a , у стању 10 након читања секвенце ab , односно у стању 11 након читања секвенце bb .



Наведимо сада нека општа правила за конструкцију коначних аутомата који одговарају заданој граматици уз напомену да таква решења по правилу неће бити оптимална у смислу да се број стања аутомата може смањити.

Нека су G_1 и G_2 два скупа речи над истом азбуком \mathcal{A} и нека су A_1 и A_2 коначни аутомати над истом том азбуком такви да аутомат A_i прихвата тачно речи из скупа G_i . Означимо скуп стања аутомата A_i са S_i , његово почетно стање са I_i , његову функцију преласка са f_i , а скуп његових прихватљивих стања ознаком F_i .

Дефинишимо два коначна аутомата A и A' са истим скупом стања $S = S_1 \times S_2$, истим почетним стањем (I_1, I_2) и истом функцијом преласка $f((a, b), c) = (f_1(a, c), f_2(b, c))$, где су $a \in S_1$, $b \in S_2$ и $c \in \mathcal{A}$ произвољни. Нека скуп прихватљивих стања аутомата A буде $F = \{(a, b) \in S_1 \times S_2 : a \in F_1 \wedge b \in F_2\}$, а $F' = \{(a, b) \in S_1 \times S_2 : a \in F_1 \vee b \in F_2\}$ нека буде скуп прихватљивих стања аутомата A' . Индукцијом по дужини речи се може показати да аутомат A прихвата тачно речи из скупа $G_1 \cap G_2$, а аутомат A' тачно речи из скупа $G_1 \cup G_2$.

Са друге стране, ако неки аутомат A над азбуком \mathcal{A} препознаје тачно речи из скупа G , онда аутомат A^* над истом азбуком и са истим скупом стања који се од аутомата A разликује само по томе што су код аутомата A^* прихватљива тачно она стања која су код аутомата A неприхватљива, онда ће аутомат A^* прихватати тачно оне речи над азбуком \mathcal{A} које аутомат A не прихвата. Коришћењем ових правила се могу урадити многи задаци слични претходним. Наредни задаци су остављени читаоцу за вежбу.

Наћи коначни аутомат над азбуком $\{a, b\}$ који препознаје скуп оних речи R таквих да реч R

- a) садржи најмање три a и између два b (ако постоје) постоји најмање једно a .
- б) садржи најмање три b или између два a (ако постоје) садржи тачно једно b .
- в) не садржи више од три b или се завршава на aba .
- г) садржи најмање три a и између два b (ако постоје) садржи најмање једно a ,
- д) садржи највише два a и не садржи тачно једно b .
- ђ) садржи највише три a или се не завршава на bab .