4. Релације

Теоријски увод

Подсетимо се на неке од појмова везаних за скупове, који су нам потребни за увођење појма релације.
Декартов производ 2 скупа дефинишемо на следећи начин: $X \times Y = \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$.
За Декартов производ скупа са самим собом имамо $X^2 = X \times X = \{(x,y) \mid x, y \in X\}$.

Пример 1. Нека је $A = \{1,2,3\}$. Одредити A^2.

Решење. $A^2 = A \times A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$. ■

Дефиниција 1. *Бинарна релација* ϱ над скупом X је било који подскуп Декартовог производа $X^2 = X \times X$, тј. $\varrho \subseteq X^2$.
Ако је $(a,b) \in \varrho$ то ћемо краће писати $a\,\varrho\,b$, а ако $(a,b) \notin \varrho$ то ћемо писати $a \not\varrho\ b$.

Сада ћемо навести основне особине бинарних релација (над скупом X).

- **Р** *Рефлексивност* $(\forall x \in X)\quad x\,\varrho\,x$.
- **С** *Симетричност* $(\forall x, y \in X)\quad x\,\varrho\,y \ \Rightarrow\ y\,\varrho\,x$.
- **АС** *Антисиметричност* $(\forall x, y \in X)\quad x\,\varrho\,y,\ y\,\varrho\,x \ \Rightarrow\ x = y$.
- **Т** *Транзитивност* $(\forall x, y, z \in X)\quad x\,\varrho\,y,\ y\,\varrho\,z \ \Rightarrow\ x\,\varrho\,z$.

Нагласимо: када не важи нека од ових особина довољно је дати контрапример, а ако важи онда морамо да покажемо да важи за све елементе из X!

У зависности које од ових особина поседује релације, имамо 2 важне класе релација.

- Релација која је **Р**,**С**,**Т** назива се *релација еквиваленције*.

  Када имамо релацију еквиваленције за сваки елемент x уводимо појам *класе еквиваленције елемента* x, у ознаци C_x или $[x]$ или $x_{/\varrho}$, као скуп свих елемената који су у релацији са x, тј. $C_x = [x] = \{y \in X \mid x\,\varrho\,y\}$. Све класе еквиваленције чине једно разбијање скупа X на подскупове.

- Релација која је **Р**,**АС**,**Т** назива се *релација поретка* или *уређење* (а за скуп X кажемо да је *уређен скуп*).

  За релацију поретка кажемо да је *релација тоталног поретка* уколико за свака 2 елемента x и y важи да је $x\,\varrho\,y$ или $y\,\varrho\,x$ (тада кажемо да су свака 2 елемента упоредива). Скуп снабдевен са релацијом тоталног поретка називамо и *ланац*. Релација поретка која није релација тоталног поретка назива се *релација парцијалног поретка*.

Пример 2. $\varrho = \{(1,3),(2,2),(2,3),(3,1)\}$ је једна релација (јер је $\varrho \subseteq A^2$) на скупу A уведеном у претходном примеру. Овако задату релацију (на коначном скупу A) можемо описати на још неколико начина.

- Можемо набројати све елементе који су у релацији:
  $1\,\varrho\,3$, $2\,\varrho\,2$, $2\,\varrho\,3$ и $3\,\varrho\,1$.
  Такође можемо набројати и све елементе који нису у релацији:
  $1 \not\varrho\ 1$, $1 \not\varrho\ 2$, $2 \not\varrho\ 1$, $3 \not\varrho\ 1$ и $3 \not\varrho\ 3$.

- Таблично (за $a\varrho b$ – a тражимо са леве стране, а b горе и у пресеку одговарајуће врсте и колоне стављамо 1 ако су елементи у релацији, а 0 ако нису; понекад се уместо 1 и 0 користе $\top$ и $\bot$):

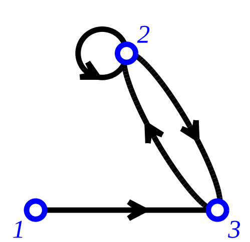
ϱ	1	2	3
1	0	0	1
2	0	1	1
3	0	1	0

(или

ϱ	1	2	3
1	$\bot$	$\bot$	$\top$
2	$\bot$	$\top$	$\top$
3	$\bot$	$\top$	$\bot$

)

- Преко графа релације (ако имамо $a\,\varrho\,b$ онда стављамо стрелицу која иде од a ка b):



■

Пример 3. Испитати основне особине релација на релацији из претходног примера.

Решење. **Р** Ова релација није рефлесивна јер $1 \not\varrho\, 1$.
Ово можемо видети и из таблице (на главној дијагонали би морали да имамо све 1) и из графа (око сваког елемента би морали да имамо петљу, а не само око 2).

С Ова релација није симетрична јер $1 \,\varrho\, 3 \;\Rightarrow\; 3 \,\varrho\, 1$, али ми имамо $3 \not\varrho\, 1$.
Ово можемо видети и из таблице (елементи симетрични у односу на главну дијагоналу морају бити међусобно једнаки) и из графа (између сваког пара различитих елемената морамо имати или 0 или 2 гране).

АС Ова релација није ни антисиметрична јер $2 \,\varrho\, 3,\; 3 \,\varrho\, 2 \;\Rightarrow\; 2 = 3$, што није тачно јер су 2 и 3 различити бројеви.
Ово можемо видети и из таблице (елементи симетрични у односу на главну дијагоналу не могу оба бити 1) и из графа (између сваког пара различитих елемената морамо имати или 0 или 1 грану).

Т Ова релација није ни транзитивна јер $1 \,\varrho\, 3,\; 3 \,\varrho\, 2 \;\Rightarrow\; 1 \,\varrho\, 2$, а ми имамо $1 \not\varrho\, 2$.
Сада ћемо дати још 1 контрапример (који се теже налази): $3 \,\varrho\, 2,\; 2 \,\varrho\, 3 \;\Rightarrow\; 3 \,\varrho\, 3$, а ми имамо $3 \not\varrho\, 3$. Видимо да у овим особинама неки од x, y, z могу бити међусобно једнаки!!!
Ово најлакше видимо из графа (како имамо гране $1 \to 3$ и $3 \to 2$, тј. $1 \to 3 \to 2$, морамо имати и $1 \to 2$). ■

Дефиниција 2. Нека је ϱ релација поретка на скупу X.
Елемент $a \in X$ је *најмањи елемент* скупа X ако важи

$$(\forall x \in X) \quad a \,\varrho\, x.$$

Елемент $a \in X$ је *највећи елемент* скупа X ако важи

$$(\forall x \in X) \quad x \,\varrho\, a.$$

Елемент $a \in X$ је *минималан елемент* скупа X ако важи

$$\neg\,(\exists x \in X) \quad x \neq a \;\wedge\; x \,\varrho\, a.$$

Елемент $a \in X$ је *максималан елемент* скупа X ако важи

$$\neg\,(\exists x \in X) \quad x \neq a \;\wedge\; a \,\varrho\, x.$$

Значи, елемент a је најмањи уколико је мањи од свих осталих, тј. важи $a \,\varrho\, x$ за све $x \in X$. Елемент a је минимални елемент уколико не постоји елемент који је мањи од њега.

Слично, елемент a је највећи уколико је већи од свих осталих, тј. важи $x \,\varrho\, a$ за све $x \in X$. Елемент a је максимални елемент уколико не постоји елемент који је већи од њега.

Код релација на коначном скупу које су представљене графом, из чвора који одговара најмањем елементу води грана ка свим осталим човоровима, док за минимални елемент из њему одговарајућег чвора само излазе гране (и ниједна не улази у њега).

Слично, у чвора који одговара највећем елементу воде гране из свих осталих човорова, док за максимални елемент у њему одговарајући чвор само улазе гране (и ниједна не излази у њега).

Теорема 1. Ако постоји најмањи елемент скупа X (у односу на релацију ϱ), он је јединствен. Тада је то и једини минималан елемент.

Ако постоји највећи елемент скупа X (у односу на релацију ϱ), он је јединствен. Тада је то и једини максималан елемент.

Обрнуто не мора да важи (у случају бесконачних скупова), док код коначних скупова важи да ако скуп има један минималан (максималан) елемент тада је он и најмањи (највећи) елемент.

Дефиниција 3. Нека је ϱ релација поретка на скупу X и нека је $A \subseteq X$.
Елемент $a \in X$ је *доња међа* (или *доња граница* или *миноранта*) скупа A ако важи

$$(\forall x \in A) \quad a \,\varrho\, x.$$

Највећа доња међа назива се *инфимум* скупа A и означава се са $\inf A$.
Елемент $a \in X$ је *горња међа* (или *горња граница* или *мајоранта*) скупа A ако важи

$$(\forall x \in A) \quad x \,\varrho\, a.$$

Најмања горња међа назива се *супремум* скупа A и означава се са $\sup A$.
Уређен скуп у коме свака два елемента имају супремум и инфимум назива се *решетка* (или *мрежа*).

Теорема 2. Сваки ланац је и решетка.

Обрнуто тврђење не важи.

За графичко представљање уређених коначних скупова, осим уобичајеног графовског приказа, користе се и *Хасеови дијаграми.*

Дефиниција 4. Нека је (X, ϱ) уређен скуп. Елемент $x \in X$ је *непосредни претходник* елемента $y \in X$ ако

$$(\forall z \in A) \quad x \, \varrho \, z \ \wedge \ z \, \varrho \, y \quad \Rightarrow \quad z = x \ \vee \ z = y.$$

Другим речима, x је непосредни претходник од y ако ниједан други елемент скупа A не може да се „смести“ између x и y.

Преко непосредног претходника у уређеном скупу (X, ϱ) можемо за сваки елемент скупа X да одредимо његов *ниво* у односу на релацију ϱ.

Елемент $x \in X$ је на нивоу 0 ако нема непосредних претходника (елементи на нивоу 0 се називају *атоми*). У супротном, елемент x је на нивоу k, $k > 0$, ако има бар једног непосредног претходника на нивоу $k-1$, док сви остали његови непосредни претходници имају ниво не већи од $k-1$.

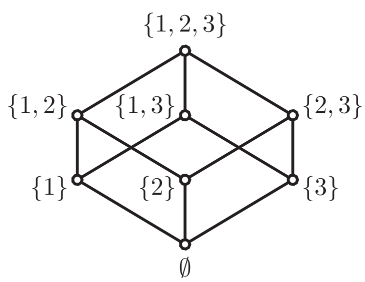
Сада се *Хасеов дијаграм* скупа (X, ϱ) добија на следећи начин.

Сваком елементу из X придружује се један чвор дијаграма. Сви ови чворови се поређају према њиховим нивоима, почевши од нивоа 0 на дну до највећег нивоа на врху, и сваки чвор се спаја линијама са свим својим непосредним претходницима.

Ове линије могу бити неоријентисане или се оне оријентишу, од чвора мањег нивоа ка чвору већег нивоа, да би се нагласило који је елемент са којим у релацији. Чешће се користи оријентисан Хасеов дијаграм.

Пример 4. Одредити (неоријентисан) Хасеов дијаграм за парцијално уређен скуп $\big(\mathcal{P}(\{1,2,3\}), \subseteq\big)$.

Решење.

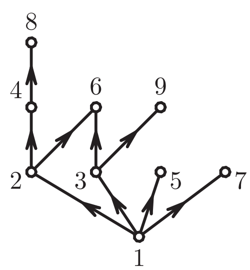


У овом Хасеовом дијаграму је празан скуп $\emptyset$ на нивоу 0, на нивоу 1 су $\{1\}$, $\{2\}$ и $\{3\}$, на нивоу 2 су $\{1,2\}$, $\{1,3\}$ и $\{2,3\}$, док је на нивоу 3 цео скуп $\{1,2,3\}$.

■

Пример 5. Одредити (оријентисан) Хасеов дијаграм парцијално уређеног скупа $\big(\{1, 2, \ldots, 9\}, \mid\big)$. Подсетимо се да је $\mid$ релација дељивости.

Решење.

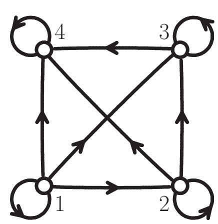


Како број 1 дели све остале, он је на нивоу 0, на нивоу 1 су прости бројеви 2, 3, 5 и 7, на нивоу 2 су 4, 6 и 9, док је на нивоу 3 само 8.

■

Пример 6. Оријентисани Хасеов дијаграм тотално уређеног скупа $\big(\{1,2,3,4\}, \leqslant\big)$.

Решење.



На слици лево је дат Хасеов дијаграм тотално уређеног скупа (из његовог изгледа је јасније зашто се назива ланац!).

У њему је број 1 на нивоу 0, 2 је на нивоу 1, 3 на нивоу 2, док је 4 на нивоу 3. ■

Из начина конструкције Хасеовог дијаграма можемо да видимо да су елементи на истом нивоу неупоредиви. Из овога закључујемо да код тотално уређеног скупа (или ланца), код кога су свака два елемента упоредива, на сваком нивоу постоји тачно један елемент. Стога је Хасеов дијаграм ланца $\big(\{1,2,3,4\}, \leqslant\big)$, приказан на претходној слици лево, много једноставнији и прегледнији него одговарајући графовски приказ истог овог скупа $\big(\{1,2,3,4\}, \leqslant\big)$ који је дат на слици десно.

Задаци

1. Дат је скуп $S = \{1, 2, 3\}$.

а) Одредити колико има различитих релација ϱ дефинасаних на скупу S.

б) Колико има различитих рефлексивних релација на скупу S.

Решење. **а)** Урадићемо задатак у општем случају, када коначан скуп S има n елемената, тј. $|S| = n$. Релација ϱ на скупу S је било који подскуп скупа $S^2 = S \times S$. Како је $|S^2| = n^2$, то је укупан број релација на скупу S једнак 2^{n^2} (за сваки елемент из S^2 имамо 2 могућности или да је у ϱ или да није у ϱ).

Укупан број релација на скупу $S = \{1, 2, 3\}$ једнак је $2^{3^2} = 2^9 = 512$.

Напомена. До овог резултата смо могли доћи и сличним резоновањем преко таблице, као што ћемо радити у делу под б).

б) Посматрајмо таблицу ове релације. Тада имамо да је

ϱ	1	2	3
1	1		
2		1	
3			1

јер је дата релација рефлексивна. У сва остала поља (којих има 6), можемо уписати или 0 или 1 (што су 2 могућности). Стога је укупан број рефлексивних релација у скупу $S = \{1, 2, 3\}$ једнак $2^6 = 64$. ■

2. 21. домаћи 2009. **а)** Одредити све могуће релације еквиваленције над скупом $Q = \{1, 2, 3, 4\}$. Колико их укупно има?

б) Одредити колико има релација поретка над скупом $P = \{1, 2, 3\}$.

Решење. **а)** Свака релација еквиваленције на скупу Q одговара једном разбијању скупа Q на подскупове (то ће бити класе еквиваленције).

Скуп $Q = \{1, 2, 3, 4\}$ можемо разбити на подскупове на следеће начине (поред сваког разбијања је написана одговарајућа релација еквиваленције):

$$\begin{array}{ll}
\{1,2,3,4\} & \varrho_1 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\} \\
\{1,2,3\} \cup \{4\} & \varrho_2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3);(4,4)\} \\
\{1,2,4\} \cup \{3\} & \varrho_3 = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(4,1),(4,2),(4,4);(3,3)\} \\
\{1,3,4\} \cup \{2\} & \varrho_4 = \{(1,1),(1,3),(1,4),(3,1),(3,3),(3,4),(4,1),(4,3),(4,4);(2,2)\} \\
\{2,3,4\} \cup \{1\} & \varrho_5 = \{(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4),(4,2),(4,3),(4,4);(1,1)\} \\
\{1,2\} \cup \{3,4\} & \varrho_6 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2);(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\} \\
\{1,3\} \cup \{2,4\} & \varrho_7 = \{(1,1),(1,3),(3,1),(3,3);(2,2),(2,4),(4,2),(4,4)\} \\
\{1,4\} \cup \{2,3\} & \varrho_8 = \{(1,1),(1,4),(4,1),(4,4);(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\} \\
\{1,2\} \cup \{3\} \cup \{4\} & \varrho_9 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2);(3,3);(4,4)\} \\
\{1,3\} \cup \{2\} \cup \{4\} & \varrho_{10} = \{(1,1),(1,3),(3,1),(3,3);(2,2);(4,4)\} \\
\{1,4\} \cup \{2\} \cup \{3\} & \varrho_{11} = \{(1,1),(1,4),(4,1),(4,4);(2,2);(3,3)\} \\
\{2,3\} \cup \{1\} \cup \{4\} & \varrho_{12} = \{(2,2),(2,3),(3,2),(3,3);(1,1);(4,4)\} \\
\{2,4\} \cup \{1\} \cup \{3\} & \varrho_{13} = \{(2,2),(2,4),(4,2),(4,4);(1,1);(3,3)\} \\
\{3,4\} \cup \{1\} \cup \{2\} & \varrho_{14} = \{(3,3),(3,4),(4,3),(4,4);(1,1);(2,2)\} \\
\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} & \varrho_{15} = \{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4)\}.
\end{array}$$

Свака од ових релација одговара једном од следећих типова.

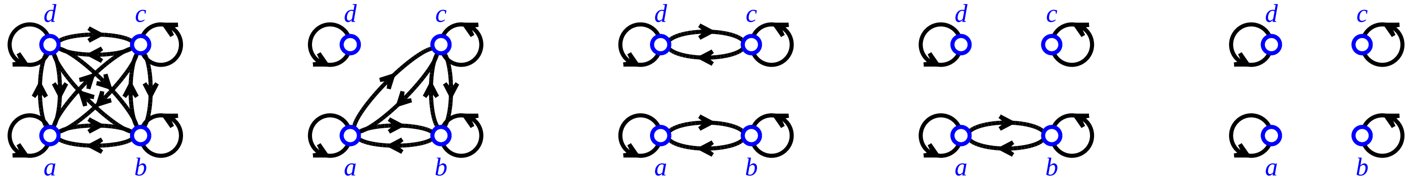
Типа T_1 је само релација ϱ_1 и ту имамо само једну класу $\{a, b, c, d\}$.

Типу T_2 припадају релације ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4 и ϱ_5 и ту имамо класе $\{a, b, c\}$ и $\{d\}$.

Типу T_3 припадају релације ϱ_6, ϱ_7 и ϱ_8 и ту имамо класе $\{a, b\}$ и $\{c, d\}$.

Типу T_4 припадају релације ϱ_9, ϱ_{10}, ϱ_{11}, ϱ_{12}, ϱ_{13} и ϱ_{14} и ту имамо класе $\{a, b\}$, $\{c\}$ и $\{d\}$.

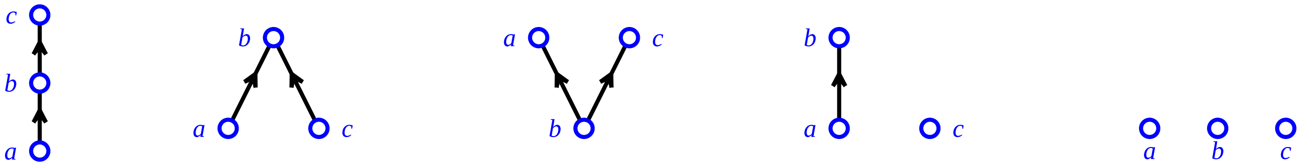
Типа T_5 је само релација ϱ_{15} и ту имамо 4 класе $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$ и $\{d\}$.



T_1 T_2 T_3 T_4 T_5

Дакле, укупно има 15 релација еквиваленције на скупу $Q = \{1, 2, 3, 4\}$.

б) Сваку од тих релација поретка можемо представити Хасеовим дијаграмом. И овде имамо 5 различитих типова релација поретка.



T_1 T_2 T_3 T_4 T_5

Релација поретка типа T_1 има $3! = 6$ (јер свакој пермутацији бројева 1,2,3 одговара једна релација поретка). Ово су једине релације тоталног поретка (ланци).

Релација поретка типа T_2 има $\binom{3}{1} = 3$ (јер елемент b можемо одабрати од 3 броја 1,2,3 на 3 различита начина; избором b смо одредили и a и c).

Релација поретка типа T_3 има $\binom{3}{1} = 3$ (јер елемент b можемо одабрати од 3 броја 1,2,3 на 3 различита начина; избором b смо одредили и a и c).

Релација поретка типа T_4 има $\binom{3}{1} \cdot 2! = 6$ (јер елемент c можемо одабрати од 3 броја 1,2,3 на 3 различита начина, а затим елементе a и b можемо уредити на 2 начина).

Релација поретка типа T_5 има $\binom{3}{3} = 1$.

Дакле, укупно има 19 релација поретка на скупу $\{1, 2, 3\}$. ■

3. 2. март 2009. Нека је ρ бинарна релација дефинисана на $S \subseteq \mathbb{R}^+$ тако да за све $x, y \in S$ важи

$$x\,\varrho\,y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{x+5y}{3y} \geqslant 2.$$

а) Доказати да је (S, ϱ) парцијално уређен скуп.

б) Представити релацију графом и таблично, ако је $S = \left\{\frac{1}{2}, 1, \sqrt{3}, \pi, 5\right\}$.

в) Наћи супремум и инфимум подскупа $T = \{1, \sqrt{3}, 5\}$.

г) Да ли је (S, ϱ) решетка, где је $S = \left\{\frac{1}{2}, 1, \sqrt{3}, \pi, 5\right\}$?

Решење. На основу чињенице да је $S \subseteq \mathbb{R}^+$ следи да су сви $x, y > 0$, па неједнакост којом је задата релација можемо да помножимо са $3y > 0$ (и неће се мењати знак!). Одатле добијамо да је $x\,\varrho\,y \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} x + 5y \geqslant 6y$, тј.

$$x\,\varrho\,y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad x \geqslant y.$$

а) За релацију $\geqslant$ знамо да је релација поретка (а то можемо и показати – аналогно као и за релацију $\leqslant$ из Задатка 7.), па је и релација ϱ релација поретка, тј. (S, ϱ) је парцијално уређен скуп.

Иако је претходно довољно да кажемо, сада ћемо строго формално и показати да је ϱ релација поретка.

Р Како је $x \geqslant x$ за свако $x \in \mathbb{R}^+$, то је ова релација рефлексивна.

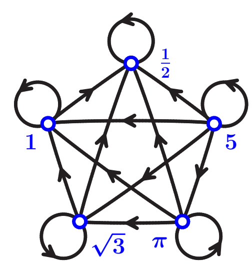
АС Ако је $x \geqslant y$ и $y \geqslant x$ онда је $x \geqslant y \geqslant x$, па како је $x = x$, то и у претходним неједнакостима мора да важи знак једнакости, тј. добијамо да је $x = y$, односно релација ϱ је антисиметрична.

Т Ако је $x \geqslant y$ и $y \geqslant z$ онда је $x \geqslant y \geqslant z$, тј. $x \geqslant z$, односно релација ϱ је транзитивна.

Како је ова релација Р,АС,Т она је релација поретка.

б)

ϱ	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{3}$	π	5
$\frac{1}{2}$	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0
$\sqrt{3}$	1	1	1	0	0
π	1	1	1	1	0
5	1	1	1	1	1



в) Горње међе скупа T су сви бројеви a, такви да је $x\,\varrho\,a$ (тј. $x \geqslant a$) за све $x \in T$. Супремум је најмања (у односу на ϱ) горња међа, тј. $\sup T = 1$.

Доње међе скупа T су сви бројеви a, такви да је $a\,\varrho\,x$ (тј. $a \geqslant x$) за све $x \in T$. Инфимум је највећа (у односу на ϱ) доња међа, тј. $\inf T = 5$.

г) Како је релација $\geqslant$ релација тоталног поретка (ланац) на сваком скупу S, то је она и решетка. ■

4. 2. јун 2009. Дата је релација

$$\varrho:\ x\,\varrho\,y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{l}\text{разлика збира цифара броја } x \text{ и збира цифара} \\ \text{броја } y \text{ је дељива са 5}\end{array}$$

на скупу $\{11, 27, 38, 46, 58\}$.

а) Набројати све елементе који су у релацији ϱ и који нису у релацији ϱ.

б) Представити дату релацију таблично и преко графа.

в) Да ли је дата релација рефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна?

г) Испитати да ли је то релација еквиваленције и/или релација поретка.

д) Уколико је то релација еквиваленције одредити све класе еквиваленције, а уколико је то релација поретка представити је преко Хасеовог дијаграма и испитати да ли је то релација тоталног или парцијалног поретка.

Решење. Збирови цифара датих бројева 11, 27, 38, 46 и 58 су једнаки:

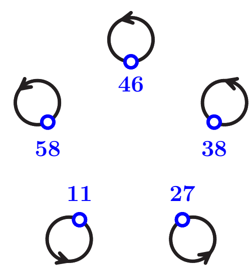
$$1+1=2, \qquad 2+7=9, \qquad 3+8=11, \qquad 4+6=10, \qquad 5+8=13.$$

На основу овога добијамо који су елементи у релацији (одузмемо њихове збирове цифара и посматрамо који од тих бројева су дељиви са 5).

а) У релацији су: $11\,\varrho\,11$, $27\,\varrho\,27$, $38\,\varrho\,38$, $46\,\varrho\,46$, $58\,\varrho\,58$.
У релацији нису: $11 \not\varrho\ 27$, $11 \not\varrho\ 38$, $11 \not\varrho\ 46$, $11 \not\varrho\ 58$, $27 \not\varrho\ 11$, $27 \not\varrho\ 38$, $27 \not\varrho\ 46$, $27 \not\varrho\ 58$, $38 \not\varrho\ 11$, $38 \not\varrho\ 27$, $38 \not\varrho\ 46$, $38 \not\varrho\ 57$, $46 \not\varrho\ 11$, $46 \not\varrho\ 27$, $46 \not\varrho\ 38$, $46 \not\varrho\ 58$, $58 \not\varrho\ 11$, $58 \not\varrho\ 27$, $58 \not\varrho\ 38$, $58 \not\varrho\ 46$.

б)

ϱ	11	27	38	46	58
11	1	0	0	0	0
27	0	1	0	0	0
38	0	0	1	0	0
46	0	0	0	1	0
58	0	0	0	0	1

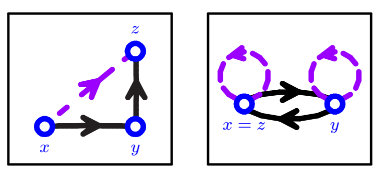


в) Ова је релација **Р** (у таблици су елементи на главној дијагонали једнаки 1; у графу видимо да око сваког чвора имамо петљу).

Ова је релација **С** (у таблици су елементи који су симетрични у односу на главну дијагоналу међусобно једнаки и то 0; у графу видимо да између 2 различита чвора имамо или 0 или 2 гране – тачније 0 грана).

Ова је релација **АС** (у таблици међу елементима који су симетрични у односу на главну дијагоналу не налазимо две 1; у графу видимо да између 2 различита чвора имамо или 0 или 1 грану – тачније 0 грана).

Ова је релација **Т** (видимо са графа, јер нигде нема ниједне од следеће 2 ситуације које кваре Т:



јер у графу не постоји ниједна грана између 2 различита чвора!)

г) Ова релација је **Р**, **С** и **Т**, па је релација еквиваленције.
Ова релација је **Р**, **АС** и **Т**, па је релација поретка.

д) Класе еквиваленције су:

$$[11]=\{11\}, \qquad [27]=\{27\}, \qquad [22]=\{38\}, \qquad [46]=\{46\}, \qquad [58]=\{58\}.$$

Релација није релација тоталног поретка јер $11 \not\varrho\ 27$ и $27 \not\varrho\ 11$, тј. то је релација парцијалног поретка.

Хасеов дијаграм ове релације је представљен на следећој слици (сви чворови су на истом нивоу јер никоја 2 нису упоредива у односу на релацију ϱ):

5. 2. задатак, фебруарски рок 2010.[1] Нека је дат скуп $A = \{a, abbc, bab, daabcb, dacdb, dc\}$ и на њему релације $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 \subseteq A^2$ су дате са

$$x\ \varrho_1\ y \quad \overset{\text{деф}}{\iff} \quad \text{речи} \quad x \text{ и } y \quad \text{су исте дужине},$$

$$x\ \varrho_2\ y \quad \overset{\text{деф}}{\iff} \quad \text{речи} \quad x \text{ и } y \quad \text{почињу истим словом},$$

$$x\ \varrho_3\ y \quad \overset{\text{деф}}{\iff} \quad \text{речи} \quad x \quad \text{нема мање слова од} \quad y.$$

а) Представити све 3 релације таблично и преко графа.

б) Да ли су дате релације рефлексивне, симетричне, антисиметричне, транзитивне?

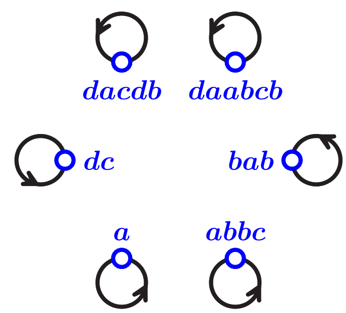
в) Испитати да ли су оне релације еквиваленције и/или релације поретка.

г) Уколико је нека од њих релација еквиваленције одредити све класе еквиваленције, а уколико релација поретка представити је преко Хасеовог дијаграма и испитати да ли је то релација тоталног или парцијалног поретка.

Решење. Прво ћемо испитати особине релације ϱ_1 код које су 2 речи у релацији ако и само ако су исте дужине.

а)

	a	$abbc$	bab	$daabcb$	$dacdb$	dc
a	1	0	0	0	0	0
$abbc$	0	1	0	0	0	0
bab	0	0	1	0	0	0
$daabcb$	0	0	0	1	0	0
$dacdb$	0	0	0	0	1	0
dc	0	0	0	0	0	1



б) Ова је релација **Р** (у таблици су елементи на главној дијагонали једнаки 1; у графу видимо да око сваког чвора имамо петљу).

Ова је релација **С** (у таблици су елементи који су симетрични у односу на главну дијагоналу међусобно једнаки — то су по две 0; у графу видимо да између 2 различита чвора имамо 0 грана).

Ова је релација **АС** (у таблици су елементи који су симетрични у односу на главну дијагоналу нису једнаки 1 и 1; у графу видимо да између 2 различита чвора имамо 0 грана).

Ова је релација **Т** (видимо са графа – не постоје 2 гране које се надовезују).

в) Ова релација је **Р**, **С** и **Т**, па је релација еквиваленције.
Ова релација је **Р**, **АС** и **Т**, па је и релација поретка.

г) Класе еквиваленције су:

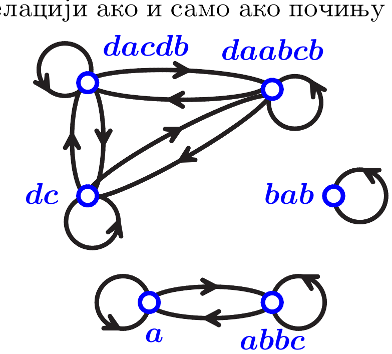
$$[a] = \{a\}, \qquad [abbc] = \{abbc\}, \qquad [bab] = \{bab\}, \qquad [daabcb] = \{daabcb\}, \qquad [dacdb] = \{dacdb\}, \qquad [dc] = \{dc\}.$$

Ово је релација парцијалног поретка (није тоталног поретка јер нису свака 2 елемента упоредива, нпр. $a \not\varrho\ dc$ и $dc \not\varrho\ a$). Хасеов дијаграм ове релације је:

Сада ћемо испитати особине релације ϱ_2 код које су 2 речи у релацији ако и само ако почињу истим словом.

а)

	a	$abbc$	bab	$daabcb$	$dacdb$	dc
a	1	1	0	0	0	0
$abbc$	1	1	0	0	0	0
bab	0	0	1	0	0	0
$daabcb$	0	0	0	1	1	1
$dacdb$	0	0	0	1	1	1
dc	0	0	0	1	1	1



[1]На испиту није била дата релација ϱ_3 него само ϱ_1 и ϱ_2.

б) Ова је релација **P** (у таблици су елементи на главној дијагонали једнаки 1; у графу видимо да око сваког чвора имамо петљу).

Ова је релација **C** (у таблици су елементи који су симетрични у односу на главну дијагоналу међусобно једнаки; у графу видимо да између 2 различита чвора имамо или 0 или 2 гране).

Ова релација није **AC** (не важи $a\,\varrho\,abbc, abbc\,\varrho\,a \;\Rightarrow\; a = abbc$).

Ова је релација **T** (видимо са графа јер кад год имамо 2 гране које се надовезују имамо и „пречицу“).

в) Ова релација је **P**, **C** и **T**, па је релација еквиваленције.
Како није **AC** она није релација поретка.

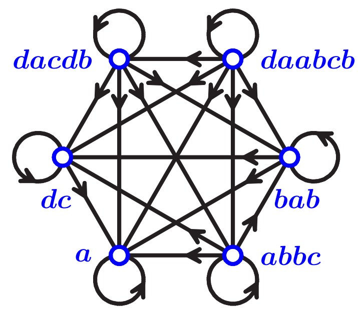
г) Класе еквиваленције су:

$$[a] = [abbc] = \{a, abbc\}, \qquad [bab] = \{bab\}, \qquad [daabcb] = [dacdb] = [dc] = \{daabcb, dacdb, dc\}.$$

Сада ћемо испитати особине релације ϱ_3 код које је реч x у релацији са речи y ако и само ако су исте дужине или је x дужа од y.

а)

	a	$abbc$	bab	$daabcb$	$dacdb$	dc
a	1	0	0	0	0	0
$abbc$	1	1	1	0	0	1
bab	1	0	1	0	0	1
$daabcb$	1	1	1	1	1	1
$dacdb$	1	1	1	0	1	1
dc	1	0	0	0	0	1



б) Ова је релација **P** (у таблици су елементи на главној дијагонали једнаки 1; у графу видимо да око сваког чвора имамо петљу).

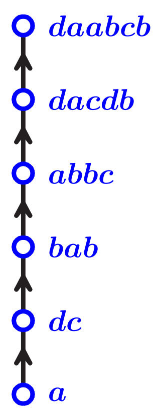
Ова релација није **C** (нпр. $dc\,\varrho_3\,a$, а $a\,\not\varrho_3\,dc$).

Ова је релација **AC** (у таблици су елементи који су симетрични у односу на главну дијагоналу нису једнаки 1 и 1; у графу видимо да између 2 различита чвора имамо тачно 1 грану).

Ова је релација **T** (видимо са графа јер кад год имамо 2 гране које се надовезују имамо и „пречицу“).

в) Ова релација није **C**, па није релација еквиваленције.
Ова релација је **P**, **AC** и **T**, па је и релација поретка.

г) Ово је релација тоталног поретка (свака 2 елемента су упоредива – видимо из графа да између свака 2 различита чвора постоји тачно једна грана). Хасеов дијаграм ове релације је:



■

6. 2. задатак, јануарски рок 2009. Испитати да ли је релација ϱ дефинисана као

$$x \,\varrho\, y \quad \Leftrightarrow \quad xy \leqslant y^2$$

релација поретка на скупу: **а)** $\mathbb{N}$ природних бројева; **б)** $\mathbb{Z}$ целих бројева.

Решење. **а)** Релација ϱ је дефинисана на скупу $\mathbb{N}$, па су сви бројеви позитивни. Стога услов када су два елемента у релацији, $x \,\varrho\, y \overset{\text{деф}}{\iff} xy \leqslant y^2$, можемо да поделимо са $y > 0$ (због $y > 0$ неће се мењати знак!), па добијамо да је

$$x \,\varrho\, y \overset{\text{деф}}{\iff} x \leqslant y,$$

а за релацију $\leqslant$ познато је да је релација поретка, али ћемо то овде и показати.

Како је $x \leqslant x \Rightarrow x \,\varrho\, x$, тј. ова је релација **P**.

Ова је релација **AC**: $x \leqslant y,\ y \leqslant x \Rightarrow x \leqslant y \leqslant x$, а како важи $x = x$ то и претходној неједнакости свуда мора да важи знак једнакости, па је $x = y$.

Ова је релација **T**: $x \leqslant y,\ y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$.

Ова релација је **P**, **AC** и **T**, па је и релација поретка.

б) Важи $1 \,\varrho\, {-1}$ јер је $1 \cdot (-1) = -1 \leqslant 1 = (-1)^2$ и $-1 \,\varrho\, 1$ јер је $-1 \cdot 1 = -1 \leqslant 1 = 1^2$. Ако би важила антисиметричност, тада би имали да је $1 = -1$, што није тачно. Тиме смо показали да релација ϱ на скупу $\mathbb{Z}$ није **AC**, па она није релација поретка. ■

Напомена. Ова релација није **C** (нпр. $1 \leqslant 2 \Rightarrow 2 \leqslant 1$ ↯), па није релација еквиваленције.

7. Показати да је релација $\mid$ („дели“) релација поретка на скупу $S \subseteq \mathbb{N}$, а да није релација поретка на $\mathbb{Z}$. Математичка дефиниција да број a дели број b је:

$$a \mid b \overset{\text{деф}}{\iff} (\exists k \in \mathbb{Z})\ b = k \cdot a.$$

Да ли је ово релација тоталног или парцијалног поретка?

Да ли је структура $(\mathbb{N}, |)$ решетка?

Решење. Како $x \mid x$ (јер постоји $k \in \mathbb{Z}$ такво да је $x = k \cdot x$ – то је $k = 1$), ова је релација **P**.

Ова је релација **AC** у $x \in \mathbb{N}$: $x \mid y,\ y \mid x \Rightarrow y = k \cdot x,\ x = \ell \cdot y \Rightarrow x = k \cdot \ell \cdot x$ (ова једнакост важи за свако $x \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow k \cdot \ell = 1 \Rightarrow k = 1,\ \ell = 1$ (јер су $k, \ell \in \mathbb{N}$) и коначно, из $\ell = 1 \Rightarrow x = y$.

У скупу $\mathbb{Z}$ једначина $k \cdot \ell = 1$ има и решење $k = \ell = -1$, на основу које конструишемо контрапример за **AC**: $2 \mid -2,\ -2 \mid 2 \Rightarrow 2 = -2$ ↯. Овим смо показали да релација дељивости није релација поретка на скупу $\mathbb{Z}$.

Ова је релација **T**: $x \mid y,\ y \mid z \Rightarrow y = k \cdot x,\ z = m \cdot y \Rightarrow z = m \cdot k \cdot x$ (а $k, m \in \mathbb{N} \Rightarrow k \cdot m \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow x \mid z$.

Особине **P**, **AC** и **T** важе у $\mathbb{N}$, па и у сваком његовом подскупу, $S \subseteq \mathbb{N}$, те смо показали да је $\mid$ релација поретка у $S \subseteq \mathbb{N}$.

Да ли је ово релација тоталног или парцијалног поретка је трик питање! Зависи од тога шта је скуп S!

Нпр. ако S има само 1 елемент или 2 елемента од којих један дели други онда је то релација тоталног поретка. S може бити и бесконачан: за $S = \{2^k : k \in \mathbb{N}_0\}$ то је такође релација тоталног поретка.

У наредном задатку дајемо примере скупа S код којих је ово релација парцијалног поретка.

У скупу $\mathbb{N}$ постоји инфимум за било која 2 броја (то је НЗД – највећи заједнички делилац), а супремум за било која 2 броја је НЗС (најмањи заједнички садржалац). Стога је структура $(\mathbb{N}, |)$ решетка. ■

Напомена. Честа грешка је да је „k једино слово које знате“! Ако $x \mid y$ онда ставимо да је $y = k \cdot x$, а за $y \mid x$ у испитивању **AC** треба узети неко ново слово, нпр. ℓ и онда имамо да је $x = \ell \cdot y$. Слично уместо 2 пута k, узели смо k и m при испитивању **T**.

8. Нека је релација „дели“, $|$, (из претходног задатка) задата на скупу

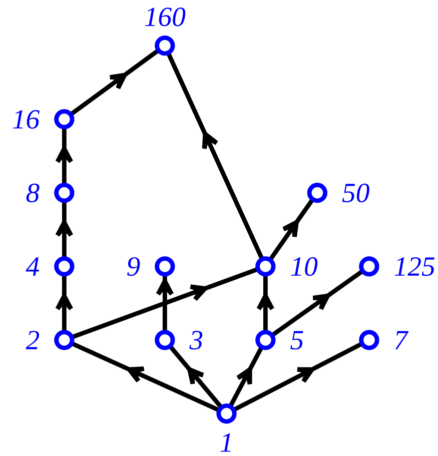
а) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 16, 50, 125, 160\}$; **б)** $S = \mathbb{N}$; **в)** $S = \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$; **г)** $S = \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Уколико је S коначан нацртати Хасеов дијаграм ове релације.

Шта су највећи, најмањи, максимални и минимални елементи (уколико постоје)?

Да ли је ова релацијска структура решетка?

Решење. **а)** Хасеов дијаграм за релацију дељивости на скупу $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 16, 50, 125, 160\}$ (то је једини коначан скуп) је приказан на следећој слици:



Одавде видимо да је 1 најмањи елемент, а самим тим то је и једини минимални елемент.

Ова структура има више максималних елемената: 7,9, 25, 160. Како има више максималних елемената она нема највећи елемент.

Инфимум за било која 2 броја, a и b постоји (али то није НЗД – нпр. $\inf\{50, 125\} = 5$, а НЗД$(50, 125) = 25$!!!) јер се по Хасеовом дијаграму можемо спуштати полазећи од a до највећег заједничог делиоца бројева a и b који се налази у скупу S (он сигурно постоји јер је $1 \in S$).

Супремум не постоји увек! Нпр. $\sup\{7, 9\}$ не постоји! Стога ова структура није решетка.

б),в),г) Шта су највећи, најмањи, максимални и минимални елементи (уколико постоје), као и да ли је та релацијска структура решетка даћемо у следећој таблици:

S	најмањи ел.	највећи ел.	минимални ел.	максимални ел.	решетка
б) $\mathbb{N}$	1	нема	1	нема	јесте
в) $\mathbb{N}_0$	1	0	1	0	јесте
г) $\mathbb{N} \setminus \{1\}$	нема	нема	прости бројеви	нема	није

Из ове таблице видимо колико мала промена скупа S утиче на промену основних особина релацијске структуре.

Покажимо неке од ових особина из претходне таблице.

Како 1 дели све природне бројеве (и 0), имамо да $1 \mid n$, тј. $1 \,\varrho\, n$, па је 1 најмањи елемент, што повлачи да је 1 и једини минималан елемент (ово важи и у $\mathbb{N}$ и у $\mathbb{N}_0$).

И у $\mathbb{N}$ и у $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ не постоји ниједан максимални елемент (претпоставимо супротно да постоји – нека је то M, али тада $M \mid 2M$, па самим тим M није максималан!), што повлачи да не постоји ни највећи елемент.

У $\mathbb{N}_0$ је 0 највећи елемент јер 0 деле сви природни бројеви[2]: $n \mid 0$, тј. $n \,\varrho\, 0$, тј. 0 највећи елемент, што повлачи да је 0 и једини максималан елемент.

И у $\mathbb{N}$ и у $\mathbb{N}_0$ ова структура је решетка (иако је то релација парцијалног поретка), јер постоје и инфимум и супремум за било која 2 елемента (посебно наводимо ако је ту 0 и ако није):

$$\inf\{a, b\} = \text{НЗД}(a, b), \qquad \sup\{a, b\} = \text{НЗС}(a, b); \qquad \inf\{a, 0\} = a, \qquad \sup\{a, 0\} = 0.$$

Докажимо да у $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ не постоји најмањи елемент.

Претпоставимо да постоји – нека је то m, тада $m \mid n$ за свако $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, па и за $n = 2$ важи да $m \mid 2 \Rightarrow m = 2$ (јер је то једини број у $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ који дели 2). Али тада би морало да важи $2 \mid n$ за свако $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, што није тачно (нпр. $2 \nmid 3$), па смо добили контрадикцију. Стога не постоји најмањи елемент у $\mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Из канонске факторизације природних бројева следи да су прости бројеви (то су бројеви који већи од 1, који су дељиви само са 1и са самим собом: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,...) минимални елементи у $\mathbb{N} \setminus \{1\}$.

У $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ постоји супремум било која 2 броја (то је НЗС), али не постоји инфимум за свака 2 броја: нпр. $\inf\{2, 3\}$ не постоји (јер НЗД$(2, 3) = 1 \notin \mathbb{N} \setminus \{1\}$), па самим тим ова структура није решетка. ■

[2] Чак и 0 дели 0! Зато смо релацију дељивости уводили са оним да постоји $k \in \mathbb{Z}$ – овде за k можемо узети било који број.

9. 1. задатак, Пробни II колоквијум 2008. Дата је релација ϱ условом

$$x \,\varrho\, y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad x(y^2+1) \leqslant y(x^2+1)$$

на скупу $S \subseteq R$.

а) Доказати да релација ϱ не задовољава особину антисиметричности на целом скупу $\mathbb{R}$.

б) Доказати да релација ϱ представља релацију поретка на скупу $S = [1, +\infty)$.

в) Да ли је то релација тоталног или релација парцијалног поретка? Да ли је то решетка?

г) Показати да је 1 највећи елемент скупа $S = [1, +\infty)$.

д) Одредити (ако постоје) најмањи, највећи, минималан и максималан елемент скупа $T = \{-2, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 3\}$.

Решење. Обе стране неједнакости којом је задата релација ϱ можемо поделити са $(x^2+1)(y^2+1) > 0$ и тада добијамо да је

$$x \,\varrho\, y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad f(x) \leqslant f(y), \qquad \text{где је} \quad f(x) = \frac{x}{x^2+1}\,.$$

а) На целом скупу $\mathbb{R}$ имамо да је $f(2) = f(\frac{1}{2}) = \frac{2}{5}$, па важи и $f(2) \leqslant f(\frac{1}{2})$ и $f(\frac{1}{2}) \leqslant f(2)$, тј. $2 \,\varrho\, \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2} \,\varrho\, 2$, а како је $2 \neq \frac{1}{2}$ следи да ова релација није **AC**.

б) Како је $f(x) \leqslant f(x)$, тј. $x \,\varrho\, x$, релација ϱ је **P** на сваком подскупу $S \subseteq \mathbb{R}$.

Ако је $x \,\varrho\, y$ и $y \,\varrho\, x$ имамо да важи $f(x) \leqslant f(y)$ и $f(y) \leqslant f(x)$, тј. важи $f(x) \leqslant f(y) \leqslant f(x)$, одакле добијамо да је $f(x) = f(y)$. Одредимо када може да важи ова једнакост.
Из $f(x) = f(y)$, тј. $x(y^2+1) = y(x^2+1)$ што кад средимо добијамо квадратну једначину $y \cdot x^2 - (y^2+1) \cdot x + y = 0$. Њена решења су

$$x_{1,2} = \frac{y^2+1 \pm \sqrt{(y^2+1)^2 - 4y \cdot y}}{2y} = \frac{y^2+1 \pm (y^2-1)}{2y},$$

односно $x_1 = y$ и $x_2 = \frac{1}{y}$.
Дакле важи $x \varrho y$ и $y \varrho x$ ако и само ако је $x = y$ или $x = \frac{1}{y}$. Међутим, како су $x, y \in [1, +\infty)$, тј. $x \geqslant 1$ и $y \geqslant 1 \Rightarrow \frac{1}{y} \leqslant 1$, па $\frac{1}{y} \notin [1, +\infty)$ (сем уколико је $y = 1$, али тада је и $y = \frac{1}{y} = 1$). Тако смо показали да може важити $x \,\varrho\, y$ и $y \,\varrho\, x$ само уколико је $x = y$, тј. релација ϱ је **AC** на скупу $S = [1, +\infty)$.

T: $\quad x \,\varrho\, y,\ y \,\varrho\, z \Rightarrow f(x) \leqslant f(y),\ f(y) \leqslant f(z) \ \Rightarrow f(x) \leqslant f(y),\ f(y) \leqslant f(z) \Rightarrow f(x) \leqslant f(z) \Rightarrow x \,\varrho\, z.$

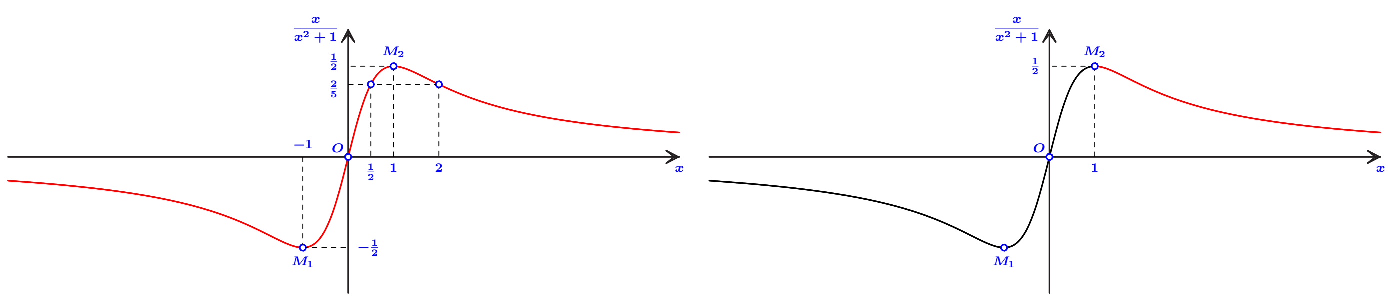
Како за ϱ важи **P**, **AC** и **T** то је она релација поретка на $S = [1, +\infty)$.

в) Како за свака 2 елемента x и y имамо да су „упоредива“, тј. или је $f(x) \leqslant f(y)$ или $f(y) \leqslant f(x)$, добијамо да је то релација тоталног поретка (ланац), а одатле следи и да је решетка.

г) Покажимо да за свако $x \in S$ важи $f(x) \leqslant f(1)$, тј. $\frac{x}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{2}$. Када претходну неједнакост помножимо са $2(x^2+1)$ добијамо $2x \leqslant x^2+1$, тј. $0 \leqslant x^2 - 2x + 1$, односно $0 \leqslant (x-1)^2$, што увек важи. Тиме смо показали да за свако $x \in S$ важи $f(x) \leqslant f(1)$, тј. $x \,\varrho\, 1$, па је 1 највећи елемент скупа S.

д) Како је $f(-2) = -\frac{2}{5}$, $f(0) = 0$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{2}{5}$, $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(\frac{3}{2}) = \frac{6}{13}$, $f(3) = \frac{3}{10}$. Важи $f(-2) \leqslant f(0) \leqslant f(3) \leqslant f(\frac{1}{2}) \leqslant f(\frac{3}{2}) \leqslant f(1)$, тј. $-2 \,\varrho\, 0 \,\varrho\, 3 \,\varrho\, \frac{1}{2} \,\varrho\, \frac{3}{2} \,\varrho\, 1$, одакле видимо да је -2 најмањи (самим тим и једини минимални елемент), а 1 највећи (самим тим и једини максимални) елемент. ■

Напомена. **AC** смо могли да покажемо и тако што би испитали[3] и скицирали график функције $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. Када би то урадили добили би график као на следећој слици лево:



Антисиметричност се своди на то да је функција $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ „1-1“, а то најлакше показујемо преко монотости.
У случају $\mathbb{R}$ видимо да $f(x)$ није монотона, па можемо пронаћи контрапример за „1-1“: $f(\frac{1}{2}) = f(2)$, а $\frac{1}{2} \neq 2$. То нам даје контрапример за **AC**: $\frac{1}{2} \,\varrho\, 2$, а $\frac{1}{2} \neq 2$.

График функције $f\colon [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ дате са $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ је представљен црвеном бојом на слици десно. Он је монотоно опадајући (од тачке M_2 функција опада), па је $f(x)$ и „1-1“, тј. релација ϱ је **AC**.

[3] Не би морали да испитамо целу функцију, него само да одредимо област дефинисаности, граничне вредности на крајевима домена и монотонст!

10. 1. задатак, Г група, II колоквијум 2008. Нека је релација ϱ дата на следећи начин:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})\ x\,\varrho\,y \quad \stackrel{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad x^2y - x = y^2x - y.$$

а) Испитати да ли је ϱ релација еквиваленције на скупу $\mathbb{R}$.
Ако јесте, одредити класе еквиваленције елемената 0, 1, -3, 2 и $\frac{1}{2}$.

б) Испитати да ли је ϱ релација поретка (као и тоталног или парцијалног поретка) на скупу $\mathbb{R}$.
Ако јесте одредити најмањи, највећи, минималан и максималан елемент скупа $(\mathbb{R}, \varrho)$.

Решење. **а)** Услов којим је дефинисана релација можемо трансформисати у

$$x\,\varrho\,y \quad \stackrel{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad x^2y - x = y^2x - y \;\Leftrightarrow\; \frac{x}{x^2+1} = \frac{y}{y^2+1} \;\Leftrightarrow\; f(x) = f(y),$$

где је $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

Може се показати (решавањем одговарајуће квадратне једначине) да је $x\,\varrho\,y \;\Leftrightarrow\; (x = y) \vee (x = \frac{1}{y})$.

Испитајмо основне особине релације ϱ на скупу $\mathbb{R}$:

P $\quad f(x) = f(x) \;\Rightarrow\; x\,\varrho\,x;\quad \checkmark$

C $\quad x\,\varrho\,y \;\Rightarrow\; f(x) = f(y) \;\Rightarrow\; f(y) = f(x) \;\Rightarrow\; y\,\varrho\,x; \quad \checkmark$

AC $\quad x\,\varrho\,y, y\,\varrho\,x \;\Rightarrow\; x = y$ не важи јер је $2\,\varrho\,\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}\,\varrho\,2$, а $2 \neq \frac{1}{2}$; ↯ (до овог контрапримера долазимо тако што потпуно исто као и у претходном примеру добијамо да је $x\,\varrho\,y \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = y \\ x = \frac{1}{y} \end{cases}$).

T $\quad x\,\varrho\,y, y\,\varrho\,z \;\Rightarrow\; f(x) = f(y), f(y) = f(z) \;\Rightarrow\; f(x) = f(z) \;\Rightarrow\; x\,\varrho\,z. \quad \checkmark$

а) Како је релација ϱ рефлексивна, симетрична и транзитивна (P,C,T) она је релација еквиваленције.

Сада опет користимо да је $x\,\varrho\,y \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = y \\ x = \frac{1}{y} \end{cases}$, па су класе еквиваленције:

$[0] = \{0\}$, $[1] = \{1\}$, $[-3] = \{-3, -\frac{1}{3}\}$, $[2] = [\frac{1}{2}] = \{2, \frac{1}{2}\}$.

б) Релација ϱ није релација поретка јер није антисиметрична (AC). ■

11. 2. задатак, фебруарски рок 2009. Испитати да ли је релација ϱ дефинисана као

$$x\,\varrho\,y \quad \stackrel{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad (x^2 - y^2)(x^2y^2 - 1) = 0$$

једна релација еквиваленције на скупу реалних бројева. Уколико јесте, одредити класе еквиваленције [0], [1] и [2].

Решење. $x\,\varrho\,y \Leftrightarrow (x^2 - y^2)(x^2y^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 = y^2$ или $x^2y^2 = 1 \Leftrightarrow x = y$ или $x = -y$ или $x = \frac{1}{y}$ или $x = \frac{-1}{y}$.

P $\quad x = x$ па је $x\,\varrho\,x$. $\checkmark$

C $\quad$ Ако је $x\,\varrho\,y$ онда имамо 4 случаја: 1° $x = y$, 2° $x = -y$, 3° $x = \frac{1}{y}$ и 4° $x = \frac{-1}{y}$.
1° $x = y \;\Rightarrow\; y = x \;\Rightarrow\; y\,\varrho\,x;$
2° $x = -y \;\Rightarrow\; y = -x \;\Rightarrow\; y\,\varrho\,x.$
3° $x = \frac{1}{y} \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{x} \;\Rightarrow\; y\,\varrho\,x;$
4° $x = \frac{-1}{y} \;\Rightarrow\; y = \frac{-1}{x} \;\Rightarrow\; y\,\varrho\,x.$
Како смо у сва 4 случаја добили $x\,\varrho\,y \;\Rightarrow\; y\,\varrho\,x$ то је ова релација симетрична.

T $\quad$ Ако је $x\,\varrho\,y$ онда имамо 4 случаја и ако је $y\,\varrho\,z$ онда имамо 4 случаја, што даје укупно $4 \cdot 4 = 16$ случаја (што је већ много за испитивати иако је за оцену :) те ћемо прибећи редукцији случајева.
Ако је $x\,\varrho\,y$ онда имамо 2 случаја 1° $x^2 = y^2$ и 2° $x^2 = \frac{1}{y^2}$.
Ако је $y\,\varrho\,z$ онда имамо 2 случаја a° $y^2 = z^2$ и b° $y^2 = \frac{1}{z^2}$. То даје укупно $2 \cdot 2 = 4$ случаја:
$1a^\circ$ $x^2 = y^2$, $y^2 = z^2 \;\Rightarrow\; x^2 = z^2 \;\Rightarrow\; x\,\varrho\,z;$
$1b^\circ$ $x^2 = y^2$, $y^2 = \frac{1}{z^2} \;\Rightarrow\; x^2 = \frac{1}{z^2} \;\Rightarrow\; x\,\varrho\,z;$
$2a^\circ$ $x^2 = \frac{1}{y^2}$, $y^2 = z^2 \;\Rightarrow\; x^2 = \frac{1}{z^2} \;\Rightarrow\; x\,\varrho\,z;$
$2b^\circ$ $x^2 = \frac{1}{y^2}$, $y^2 = \frac{1}{z^2} \;\Rightarrow\; x^2 = \dfrac{1}{\frac{1}{z^2}} = z^2 \;\Rightarrow\; x\,\varrho\,z.$
Како смо у сва 4 случаја добили $x\,\varrho\,y,\ y\,\varrho\,z \;\Rightarrow\; x\,\varrho\,z$ то је ова релација транзитивна.

Како је P,C,T дата релација је једна релација еквиваленције на скупу реалних бројева.

Одредимо тражене класе еквиваленције:
$[0] = \{y \in \mathbb{R} \mid 0\,\varrho\,y\} = \{0\}$, $[1] = \{y \in \mathbb{R} \mid 1\,\varrho\,y\} = \{1, -1\}$, $[2] = \{y \in \mathbb{R} \mid 2\,\varrho\,y\} = \{2, -2, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\}$. ■