Домаћи задаци из ДМС, 2010.

Радите по један задатак који вам генерише програм на основу броја индекса (остали задаци могу вам послужити за вежбу при спремању колоквијума, односно писменог дела испита). Сваки задатак носи 0–2 поена. Потребно је детаљно образложити решења.

1. Исказни рачун

1. Испитати **а)** помоћу таблице; **б)** свођењем на апсурд; **в)** дискусијом по слову да ли је следећа формула таутологија

$$\big((a \veebar b) \vee c\big) \;\Rightarrow\; \Big(a \veebar \big(b \;\Rightarrow\; c \wedge d\big) \;\Rightarrow\; (c \vee \neg a)\Big).$$

2. Дате су следеће реченице:

- „Да би број n био цео није потребно да буде природан.“
- „Да би било $x^2 + 4x + 3 = 0$ није довољно да буде $x = 2$.“
- „Природан троцифрен број $m = \overline{abc}$ је дељив са 3 ако и само ако је збир цифара $a + b + c$ дељив са 3.“

Превести ове реченице на језик исказних формула, а затим за сваку одредити да ли је тачна или није.

3. Проверити исправност следећег закључивања:

Ако су цене високе, високе су и зараде.

Цене су или високе или контролисане.

Ако се контролишу цене, избегава се инфлација.

Међутим, инфлација постоји.

На основу свега претходног следи да су зараде високе.

4. Четири ученика: Аца, Бора, Васа и Горан такмичили су се у трчању. После трке (на којој није било деобе места), на питање које је ко место заузео, одговорили су следеће:

- Аца: „Ја нисам био ни први ни последњи.“
- Бора: „Ја нисам био последњи.“
- Васа: „Ја сам био први.“
- Горан: „Ја сам био последњи.“

а) Да ли су ове изјаве непротивречне?

б) Познато је да су 3 од ових одговора били истинити, а 1 неистинит. Ко је говорио неистину? За кога од њих са сигурношћу можете тврдити какав му је био поредак на циљу?

5. Перица живи у кући у Улици Вртирепа. Када је Верица требало да дође код њега питала га је за број његове куће. Перица је одговорио следеће:

- „Ако је мој број куће дељив са 3, онда је то број између 80 и 89.“
- „Ако мој број куће није дељив са 5, онда је то број између 70 и 79.“
- „Ако је мој број куће није дељив са 9, онда је то број између 90 и 99.“

Да ли су ове изјаве непротивречне? Ако јесу одредите број Перицине куће.

6. Дата је скуповна формула
$$(A\cup B)\setminus\big(B\cap(B\setminus C)\big)=A\cap(B\setminus C).$$
а) Представити леву и десну страну ове формуле преко Венових дијаграма.
б) Представити ову формулу преко исказних формула.
в) Испитати да ли је исказна формула таутологија (тј. да ли је полазна скуповна формула увек тачна).
г) У зависности од скупова A, B и C дискутовати када је полазна скуповна формула тачна.

7. Дата је скуповна формула
$$(C\cap A)\setminus\big((A\setminus C)\cap C\big)\subseteq A\cup(B\bigtriangleup C).$$
а) Представити леву и десну страну ове формуле преко Венових дијаграма.
б) Представити ову формулу преко исказних формула.
в) Испитати да ли је исказна формула таутологија (тј. да ли је полазна скуповна формула увек тачна).
г) У зависности од скупова A, B и C дискутовати када је полазна скуповна формула тачна.

8. Дата је скуповна формула
$$(A\cup D)\cap(B\cup C)\setminus(A\cap D)=(A\bigtriangleup D)\setminus\big(A\setminus(B\cup C\cup D)\big)\setminus\big(D\setminus(A\cup B\cup C)\big).$$
а) Представити леву и десну страну ове формуле преко Венових дијаграма.
б) Представити ову формулу преко исказних формула.
в) Испитати да ли је исказна формула таутологија (тј. да ли је полазна скуповна формула увек тачна).
г) У зависности од скупова A, B, C и D дискутовати када је полазна скуповна формула тачна.

9. Дата је скуповна формула
$$(A\bigtriangleup C)\cap(B\bigtriangleup D)\subseteq(B\cap C)\cup(A\cap D).$$
а) Представити леву и десну страну ове формуле преко Венових дијаграма.
б) Представити ову формулу преко исказних формула.
в) Испитати да ли је исказна формула таутологија (тј. да ли је полазна скуповна формула увек тачна).
г) У зависности од скупова A, B, C и D дискутовати када је полазна скуповна формула тачна.

10. У зависности од скупова A, B и C одредити које од следећих скуповних формула су тачне:
а) $(A\bigtriangleup C)\setminus(B\bigtriangleup C\subseteq(A\setminus B)\bigtriangleup C$;
б) $A\bigtriangleup(B\cap C)=\emptyset\ \Rightarrow\ A\bigtriangleup B=C$;
в) $(A\setminus\emptyset)\cap(B\bigtriangleup C)=(A\cap B)\bigtriangleup(A\cap C)$;
г) $(A\bigtriangleup B)\cup C\subseteq(A\setminus B)\cup(B\bigtriangleup C)\cup(C\setminus A)$.

---

2. Предикатски рачун

11. Одредити истинитосну вредност предикатских формула:
а) $(\forall a\in\mathbb{R})(\exists x\in\mathbb{Z})\ x^2-7x+a=0$; **б)** $(\forall b\in\mathbb{R})(\exists x\in\mathbb{R})\ x^2+bx-2=0$; **в)** $(\exists a\in\mathbb{R})(\forall x\in\mathbb{Z})\ x^2-6x+a\geqslant 25$;
г) $\big(\forall x,y\in\mathcal{P}(A)\big)\big(\exists z\in\mathcal{P}(A)\big)(x\subseteq z\wedge z\subseteq y)$; **д)** $\big(\forall x,y\in\mathcal{P}(A)\big)\big(\exists z\in\mathcal{P}(A)\big)(x\subseteq z\wedge y\subseteq z)$.

12. Шеферова (енглески Sheffer) логичка операција $\uparrow$, која се понегде назива и *ни функција*, дефинисана је са
$$a\uparrow b=\neg(a\wedge b).$$
Показати да скуп $B=\{\uparrow\}$ представља базу Булових функција.
Одредити трочлану базу B_T Булових функција, код које су све 3 операције бинарне. Показати да је B_T база.

13. Одредити СДНФ за логичку функцију $\big(\neg(b\ \Rightarrow\ a)\vee(c\wedge\neg d)\big)\wedge(a\vee c)\wedge(b\uparrow d)$.
Одредити минималну ДНФ за ову функцију.

14. Одредити СКНФ за логичку функцију $\big(b \wedge (a \uparrow d)\big) \Rightarrow \big(b \wedge d \wedge \neg(c \Rightarrow a)$.
Одредити минималну КНФ за ову функцију.

15. Одредити истинитосну вредност формуле

$$F(x,y)\colon (\forall z)\, \alpha\big(a, f(z,x)\big) \Rightarrow \beta(x,y),$$

где је a симбол константе, α, β бинарни релацијски знаци, f бинаран функцијски (операцијски) знак, при интерпретацији $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, $a\colon 0$, $\alpha\colon =$, $\beta\colon \leqslant$, f је множење реалних бројева, у зависности од валуације слободних промењливих.

16. Одредити истинитосну вредност формуле

$$F(x,y)\colon (\forall z)\, (\alpha(a, f(z,x)) \wedge \alpha(b, g(y,z))) \Rightarrow \beta(x,y),$$

где су a, b симболи константи, α, β бинарни релацијски знаци, f, g бинарни функцијски (операцијски) знаци, при интерпретацији $\mathcal{D} = \mathcal{P}(A)$, $a\colon \emptyset$, $b\colon A$, $\alpha\colon =$, $\beta\colon \subseteq$, $f\colon \cap$, $g\colon \cup$, у зависности од валуације слободних промењливих.

17. Одредити истинитосну вредност формуле

$$F(x,y)\colon (\exists\, z) \Big(\alpha\big(f(x,z), f(y,z)\big)\Big) \Rightarrow \neg\, \alpha(x,y),$$

где је f бинарни функцијски (операцијски) знак, α бинарни релацијски знак, при интерпретацији $\mathcal{D} = \mathcal{P}(A)$, $\alpha\colon =$, $f\colon \cap$, у зависности од валуације слободних промењливих.

18. Одредити истинитосну вредност формуле

$$F(x,y)\colon (\forall z)\, \alpha\big(f(x,z), g(y,z)\big) \Leftrightarrow \alpha(x,y),$$

где су α, β бинарни релацијски знаци, f, g бинарни функцијски (операцијски) знаци, при интерпретацији $\mathcal{D} = \mathcal{P}(A)$, $f\colon \cup$, $g\colon \cap$, $\alpha\colon \supseteq$, у зависности од валуације слободних промењливих.

19. Одредити истинитосну вредност формуле

$$F(y)\colon (\forall x) \Big(\big(\neg\, \alpha(x,y) \Rightarrow \beta(x,y)\big) \Rightarrow \alpha(x,a)\Big),$$

где су α, β бинарни релацијски симболи, a симбол константе, при интерпретацији $\mathcal{D} = \mathbb{Z}$, $\alpha\colon =$, $\beta\colon >$, $a\colon 4$, у зависности од валуације слободних промењливих.

20. Одредити истинитосну вредност формуле

$$F(z)\colon (\forall y) \Big((\exists x)\, \alpha\big(x, f(y,z)\big) \vee \neg\, \alpha(y,a) \Leftrightarrow (\exists x)\, \alpha\big(y, f(x,z)\big)\Big)$$

где је α бинарни релацијски симбол, a симбол константе, при интерпретацији $\mathcal{D} = \mathbb{N}_0$, $\alpha\colon =$, $f\colon +$, $a\colon 0$, у зависности од валуације слободних промењливих.

---

3. Релацијске структуре

21. Конструисати бинарну релацију која је:
а) нерефлексивна, симетрична и транзитивна; **б)** нерефлексивна, антисиметрична и транзитивна;
в) рефлексивна, симетрична и нетранзитивна; **г)** рефлексивна, антисиметрична и нетранзитивна.

22. Дат је скуп $S = \{1,2,3,4\}$.

а) Написати релацију ϱ дефинисану на скупу S која није ни симетрична ни антисиметрична.

б) Колико има различитих симетричних релација на скупу S.

в) Колико има различитих антисиметричних релација на скупу S.

г) Колико има различитих релација на скупу S које су истовремено и симетричне и антисиметричне. Написати једну такву релацију σ.

23. Нека су бинарне релације ϱ и σ задате таблично:

$$\begin{array}{c|cccc} \varrho & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 & 1 \\ d & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} \sigma & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 1 & 1 & 0 \\ b & 1 & 1 & 1 & 0 \\ c & 1 & 1 & 1 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}.$$

За сваку од следећих релација:

а) ϱ; **б)** σ; **в)** $\varrho \cup \sigma$; **г)** $\varrho \cap \sigma$

урадити наредне захтеве.

а) Набројати све елементе који су у релацији ϱ и који нису у релацији ϱ.

б) Представити дату релацију преко графа.

в) Да ли је та релација рефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна?

г) Испитати да ли је то релација еквиваленције и/или релација поретка.

д) Уколико је то релација еквиваленције одредити све класе еквиваленције, а уколико је то релација поретка представити је преко Хасеовог дијаграма и испитати да ли је то релација тоталног или парцијалног поретка.

24. На скупу $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ дефинисане су релације:

$$\varrho_1 = \{(1, 2), (3, 5), (4, 2), (1, 5), (3, 2), (1, 3), (4, 3)\},$$
$$\varrho_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4),$$
$$\varrho_3 = \{(1, 1), (1, 5), (2, 2), (3, 4), (3, 3), (4, 3), (4, 4), (5, 1), (5, 5)\},$$
$$\varrho_4 = \{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (4, 4), (5, 3), (5, 4), (5, 5)\},$$
$$\varrho_5 = \{(1, 2), (3, 5), (4, 2), (1, 5), (3, 2), (1, 3), (4, 3)\},$$

За сваку од релација ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4 и ϱ_5 испитати која од следећих својстава она поседује (**P** – рефлексивност, **C** – симетричност, **AC** – антисиметричност, **T** – транзитивност), као и да ли је релација еквиваленције и/или релација поретка.

25. На скупу $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ дефинисане су релације:

$$\varrho_1 = \{(|x|, x) \mid x \in A\}, \qquad \varrho_2 = \{(1, 2), (3, 5), (4, 5), (1, 5), (3, 2), (1, 3), (4, 3)\}, \qquad \varrho_3 = \{(x, y) \in A^2 \mid x \leqslant y\},$$

$$\varrho_4 = \{(x^2, x) \mid x \in A\} \cap A^2, \qquad \varrho_5 = \{(x, y) \in A^2 \mid 2x = y\}, \qquad \varrho_6 = \{(x, 1) \mid x \in A\} \quad \text{и} \quad \varrho_7 = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3)\}.$$

За сваку од релација ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4, ϱ_5, ϱ_6 и ϱ_7 испитати која од основних својстава она поседује (**P** – рефлексивност, **C** – симетричност, **AC** – антисиметричност, **T** – транзитивност), као и да ли је релација еквиваленције и/или релација поретка.

Да ли је $\varrho = \varrho_1 \cup \varrho_2$ релација поретка?

Да ли је $\sigma = \varrho_1 \cup \varrho_6$ релација поретка?

26. Нека је S скуп свих равни у простору и $\pi \, \varrho \, \tau$ акко постоји права p у простору таква да је $p \perp \pi$ и $p \perp \tau$. Доказати да је ϱ релација еквиваленције. Наћи класу еквиваленције за раван $x + y + z = 1$.

27. Наћи минималне и максималне елементе, као и најмањи и највећи елемент, уколико постоје, у скуповима $A = \{1, 2, 3, 6, 9\}$, $B = \{2, 3, 5, 6, 15\}$, $C = \{3^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $D = \{3^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{6\}$, у односу на релацију поретка дели $|$.

	минимални	максимални	најмањи	највећи
A				
B				
C				
D				

Одредити доње и горње међе, као и инфимум и супремум скупова A и B у односу на релацију $|$ у скупу $\mathbb{N}$.

28. Наћи минималне и максималне елементе, као и најмањи и највећи елемент, уколико постоје, у скуповима $\mathcal{P}(S)$, $\mathcal{P}(S)\setminus\{\emptyset\}$, $\mathcal{P}(S)\setminus\{S\}$, $\mathcal{P}(S)\setminus\{\emptyset,S\}$, у односу на релацију поретка $\subseteq$ („подскуп скупа“), где је скуп $S=\{1,2,3\}$.

	минимални	максимални	најмањи	највећи
$\mathcal{P}(S)$				
$\mathcal{P}(S)\setminus\{\emptyset\}$				
$\mathcal{P}(S)\setminus\{S\}$				
$\mathcal{P}(S)\setminus\{\emptyset,S\}$				

29. Нека је $\mathcal{M}_{2\times 2}$ скуп свих квадратних матрица облика 2×2 са реалним елементима. На скупу $\mathcal{M}_{2\times 2}$ су задате следеће 4 релације:

$$A\,\varrho\,B \quad \overset{\text{деф}}{\iff} \quad \det(AB)=\det(A)+\det(B),$$

$$A\,\sigma\,B \quad \overset{\text{деф}}{\iff} \quad \det(AB)=\det(A)\cdot\det(B),$$

$$A\,\pi\,B \quad \overset{\text{деф}}{\iff} \quad \det(A)\leqslant\det(B),$$

$$A\,\tau\,B \quad \overset{\text{деф}}{\iff} \quad A=B\ \vee\ \det(A)<\det(B),$$

а) За сваку од ових релација релација испитати која од следећих својстава она поседује (**Р** – рефлексивност, **С** – симетричност, **АС** – антисиметричност, **Т** – транзитивност), као и да ли је релација еквиваленције и/или релација поретка.

б) Уколико је то релација еквиваленције одредити све класе еквиваленције јединичне матрице, а уколико је то релација поретка испитати да ли је то релација тоталног или парцијалног поретка, да ли је решетка и наћи минималне и максималне елементе, као и најмањи и највећи елемент у $\mathcal{M}_{2\times 2}$ (уколико постоје).

30. На скупу $\mathbb{N}$ дате су релације:

$$\varrho_1=\{(x,x+1)\mid x\in\mathbb{N}\},\quad \varrho_2=\{(7,7)\},\quad \varrho_3=\{(x,y)\mid x+y=2002,\ x,y\in\mathbb{N}\},\quad \varrho_4=\{(x,x)\mid x\in\mathbb{N}\},$$

$$\varrho_5=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{N},\ y>1\},\qquad \varrho_6=\big\{(x,y)\mid xy=2002,\ x,y\in\mathbb{N}\big\},\qquad \varrho_7=\{(2x,2x)\mid x\in\mathbb{N}\}\quad \text{и}\quad \varrho_8=\mathbb{N}\times\mathbb{N}.$$

За сваку од релација ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4, ϱ_5, ϱ_6, ϱ_7 и ϱ_8 испитати која од следећих основних својстава она поседује (**Р** – рефлексивност, **С** – симетричност, **АС** – антисиметричност, **Т** – транзитивност), као и да ли је релација еквиваленције и/или релација поретка.

---

4. Теорија графова

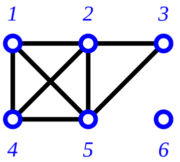
31. а) На шаховском турниру сваки играч је одиграо са сваким другим играчем највише једну партију. Доказати да у сваком тренутку на турниру постоје бар два играча који су до тог тренутка одиграли исти број партија.

б) Може ли на на неком скупу присуствовати 135 учесника (рачунајући и госте), ако сваки од њих има тачно 3 пријатеља међу учесницима? (Релација пријатељства је симетрична.)

32. а) Испитати да ли постоји неоријентисан граф без петљи са степенима чворова 6,6,5,4,3,3,1?
Да ли постоји такав граф ако се дозволи да има петље?

б) Испитати да ли постоји неоријентисан граф без петљи који има улазне степене чворова 0,1,1,2,2,3 и излазне степене чворова 1,1,1,2,2,2. Ако постоје нацртати 2 неизоморфна таква графа.

33. На слици је приказан неоријентисан граф $G = (V, E)$



а) Написати матрицу суседства A и матрицу растојања D. Одредити скуп чворова V и скуп грана графа E.

б) Нацртати граф G и одредити број чворова у графу n, број грана m, као и степене $d(v)$ свих чворова.

в) Да ли је граф G повезан? Уколико није колико има компоненти повезаности? Да ли је граф бипартитан?

г) Да ли граф G садржи Ојлерову контуру, Ојлеров пут, Хамилтонову контуру, Хамилтонов пут?

д) Израчунати матрице A^2, A^3 и A^4. Колико има путева дужина 2, 3 или 4 између чворова 2 и 5, као и између чворова 4 и 4? Навести све те путеве?

34. Дат је неоријентисан граф $G = (V, E)$ без петљи својом матрицом растојања:

$$D = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & \infty & 1 & 2 & 1 & 1 \\ \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & \infty & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & \infty & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & \infty & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & \infty & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right\| \end{array}$$

а) Написати матрицу суседства A и матрицу растојања D. Одредити скуп чворова V и скуп грана графа E.

б) Нацртати граф G и одредити број чворова у графу n, број грана m, као и степене $d(v)$ свих чворова.

в) Да ли је граф G повезан? Уколико није колико има компоненти повезаности? Да ли је граф бипартитан?

г) Да ли граф G садржи Ојлерову контуру, Ојлеров пут, Хамилтонову контуру, Хамилтонов пут?

д) Израчунати матрице A^2, A^3 и A^4. Колико има путева дужина 2, 3 или 4 између чворова a и a, као и између чворова d и e? Навести све те путеве?

35. Дат је оријентисан граф $G = (V, E)$ својим листама суседства:

$$l_1 = \{6\}, \quad l_2 = \{1, 3\}, \quad l_3 = \{4\}, \quad l_4 = \emptyset, \quad l_5 = \{2\}, \quad l_6 = \{5\}.$$

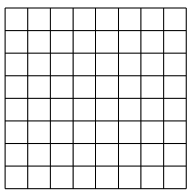
а) Одредити скуп чворова V и скуп грана графа E. Одредити колико има чворова n, колико има грана m, као и улазне степене свих чворова $d^-(v)$ и излазне степене свих чворова $d^+(v)$.

б) Написати матрицу суседства A, матрицу инциденције чворова и грана S и матрицу растојања D.

в) Да ли граф G садржи Ојлерову контуру, Ојлеров пут, Хамилтонову контуру, Хамилтонов пут?

г) Израчунати матрице A^2, A^3 и A^4. Колико има путева дужина 2, 3 или 4 између чворова 1 и 3, као и између чворова 5 и 4? Навести све те путеве?

36. Град има квадратну мрежу са m „хоризонталних“ и n „вертикалних“ улица (видети наредну слику). Колика је најмања дужина дела мреже који треба асфалтирати тако да се од сваке раскрснице до било које друге може доћи асфалтом?



37. Краљица Амазонки Гоба је имала 5 ћерки, 6 од њених женских потомака су имале по 4 ћерке свака, 11 од њених женских потомака су имале по 2 ћерке свака, док су све остале умрле без деце. Ако је познато да краљица Гоба није имала мушких потомака, колико је укупно женских потомака имала ова краљица?

38. а) Нацртати бинарно уређено стабла ако елементи долазе следећим редом:

$$11, 23, 8, 14, 10, 26, 18, 4, 20, 2, 1, 6, 30, 27, 28, 25, 5, 7, 9.$$

б) Колика је висина добијеног стабла T? Одредити ниво сваког листа у стаблу T. Да ли је стабло T балансирано? Да ли је ово стабло стриктно бинарно? Да ли је стабло T потпуно бинарно стабло?

в) Одредити редослед обилазака чворова стабла T при КЛД, ЛКД и ЛДК обиласку.

39. Дат је израз $\big(a + (b - c : d) - 5 \cdot (c - a \cdot b)\big) : (c + 2)$ у инфиксној нотацији.

а) Одредити бинарно стабло које одговара овом изразу. Колика је висина овог стабла? Одредити ниво сваког листа у том стаблу. Да ли је ово стабло балансирано? Да ли је ово стабло стриктно бинарно? Да ли је ово стабло потпуно бинарно стабло?

б) Написати у префиксној и постфиксној (пољској и инверзној пољској) нотацији дати израз.

40. Нека су фреквенције појављивања неких симбола дате у следећој таблици

симбол	а	б	е	и	к	л	п	с	т	ћ
фреквенција	15	1	10	12	1	2	2	2	3	1

Одредити одговарајуће Хафманово стабло T (тј. бинарно стабло минималне средње дужине пута код кога су дати симболи листови), као и одговарајући Хафманов кôд.

а) Колико различитих Хафманових стабала се може добити?

б) Колика је висина добијеног стабла T? Одредити ниво сваког листа у стаблу T. Да ли је стабло T балансирано? Да ли је стабло T стриктно бинарно стабло? Да ли је стабло T потпуно бинарно стабло?

в) Одредити редослед обилазака чворова стабла T при КЛД, ЛКД и ЛДК обиласку.

г) Кодирати реч „пистаћи“.

д) Да ли је неки од следећих кодова исправан (тј. представља неку од речи горње азбуке):

101, 11101, 101001, 011101, 0101, 1001, 11111, 000, 110111?

---

5. Коначни аутомати и формалне граматике

41. Одредити језик $L(G)$ генерисан граматиком $G = (N, T, \Pi, \sigma^*)$, где је

$$N = \{\sigma^*, A, B\}, \quad T = \{a, b, c\} \quad \text{и} \quad \Pi = \{\sigma^* \to a\sigma^* bb,\ \sigma^* \to aAbb,\ \sigma^* \to \varepsilon,\ A \to acBcbb,\ A \to c,\ B \to \varepsilon\}$$

(ε је празна реч).

42. Дат је језик $L = \{xabay \mid x,\ y$ су произвољни низови симбола$\}$ (x и y могу бити и празни!).

а) Одредити граматику $G = (N, T, \Pi, \sigma^*)$ која генерише језик L.

б) Одредити недетерминистички аутомат који NA који препознаје језик L, а затим свести тај аутомат на детерминистички аутомат A који препознаје језик L.

43. Одредити недетерминистички аутомат који NA који препознаје речи које садрже baa, а затим свести тај аутомат на детерминистички аутомат A који препознаје речи које садрже baa.

а) Да ли је добијени аутомат A оптималан? Ако није оптимизовати га.

б) Одредити регуларну граматику $G = (N, T, \Pi, \sigma^*)$ која одговара оптималном аутомату.

44. Конструисати коначан аутомат над азбуком $\{0, 1\}$ који препознаје бинарне записе природних бројева који су дељиви са 7.

а) Да ли је добијени аутомат оптималан? Ако није оптимизовати га.

б) Одредити регуларну граматику $G = (N, T, \Pi, \sigma^*)$ која одговара оптималном аутомату.

45. Конструисати коначан аутомат над азбуком $\{a, b\}$ који препознаје тачно оне непразне речи над том азбуком код којих између свака два узастопна слова a (ако постоје) има тачно 2 слова b.

а) Да ли је добијени аутомат оптималан? Ако није оптимизовати га.

б) Одредити регуларну граматику $G = (N, T, \Pi, \sigma^*)$ која одговара оптималном аутомату.

46. Конструисати коначан аутомат над азбуком $\{a, b\}$ који препознаје тачно оне непразне речи над том азбуком које садрже највише 2 слова b и не почињу на ab.

а) Да ли је добијени аутомат оптималан? Ако није оптимизовати га.

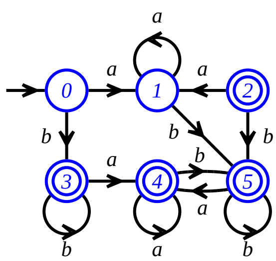
б) Одредити регуларну граматику $G = (N, T, \Pi, \sigma^*)$ која одговара оптималном аутомату.

47. Конструисати коначан аутомат над азбуком $\{a, b\}$ који препознаје тачно оне речи над том азбуком које не садрже реч aaa или се завршавају на bb.

а) Да ли је добијени аутомат оптималан? Ако није оптимизовати га.

б) Одредити регуларну граматику $G = (N, T, \Pi, \sigma^*)$ која одговара оптималном аутомату.

48. а) Које речи препознаје аутомат A са слике?



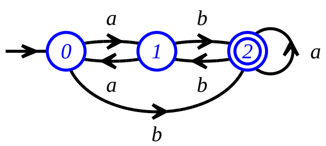
б) Одредити регуларну граматику која одговара датом аутомату.

в) Да ли аутомат A садржи недостижива стања? Да ли је аутомат A оптималан? Ако није оптимизовати га.

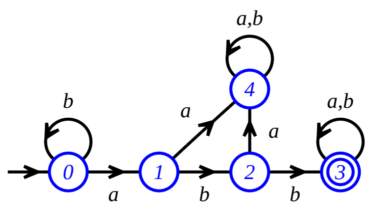
г) Спајањем која два једноставнија аутомата је настао овај аутомат?

49. На следећим сликама су представљена 2 коначна аутомата A_1 и A_2.

A_1:



A_2:



а) Испитати које од наредних речи

$$\varepsilon, \quad a, \quad b, \quad abba, \quad baba, \quad aaab, \quad abb, \quad baaab, \quad aabaabb, \quad bbabbb$$

препознаје аутомат A_1, а које аутомат A_2.

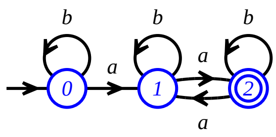
б) Испитати које све речи препознаје аутомат A_1, а које аутомат A_2.

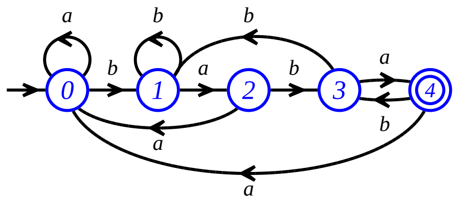
в) Одредити регуларну граматику $G_1 = (N_1, T_1, \Pi_1, \sigma_1^*)$ која одговара коначном аутомату A_1, као и регуларну граматику $G_2 = (N_2, T_2, \Pi_2, \sigma_2^*)$ која одговара коначном аутомату A_2.

г) Одредити аутомат A_3 који препознаје све непразне речи које не препознаје аутомат A_1.

д) Одредити аутомат који препознаје све непразне речи које препознају и аутомат A_1 и аутомат A_2. Да ли је такав аутомат оптималан?

50. На следећим сликама су представљена 2 коначна аутомата A_1 и A_2.

A_1: 

A_2: 

а) Испитати које од наредних речи

$$\varepsilon, \quad a, \quad b, \quad abba, \quad baba, \quad aaab, \quad abb, \quad baaab, \quad aabaabb, \quad bbabbb$$

препознаје аутомат A_1, а које аутомат A_2.

б) Испитати које све речи препознаје аутомат A_1, а које аутомат A_2.

в) Одредити регуларну граматику $G_1 = (N_1, T_1, \Pi_1, \sigma_1^*)$ која одговара коначном аутомату A_1, као и регуларну граматику $G_2 = (N_2, T_2, \Pi_2, \sigma_2^*)$ која одговара коначном аутомату A_2.

г) Одредити аутомат A_3 који препознаје све непразне речи које не препознаје аутомат A_2.

д) Одредити аутомат који препознаје све речи које препознаје аутомат A_1 или аутомат A_2. Да ли је такав аутомат оптималан?

Рок за предају 5. домаћег је понедељак, 21.06.2010. у 14:00!