A Писмени испит из ДМС-а, 23.08.2010. A

Презиме и име студента **бр. индекса**

1. *(25 поена)* Дата је предикатска формула

$$(\exists x)\,\alpha(x) \wedge (\exists x)\,\beta(x) \;\Rightarrow\; (\exists x)\,\big(\alpha(x) \wedge \beta(x)\big),$$

где су α и β унарни релацијски знаци.

Одредити истинитосну вредност формуле при интерпретацији

а) $\mathcal{D} = \mathbb{N}$, α: „бити непаран број“, β: „бити паран број“;

б) $\mathcal{D} = \mathbb{Z}$, α: „бити број мањи од 5“, β: „бити ненегативан број“.

в) Да ли је дата формула ваљана?

2. *(25 поена)* Нека је бинарна релација ϱ дефинисана на скупу $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ са

$$\varrho = \{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(a,f),(b,b),(b,f),(c,c),(d,c),(d,d),(d,f),(e,b),(e,e),(e,f),(f,f)\}.$$

а) Представити дату релацију таблично и преко графа.

б) Да ли је дата релација рефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна?

в) Испитати да ли је то релација еквиваленције и/или релација поретка.

г) Уколико је то релација еквиваленције одредити све класе еквиваленције, а уколико је то релација поретка представити је преко Хасеовог дијаграма, испитати да ли је то релација тоталног или парцијалног поретка, као и да ли је решетка и одредити најмањи, највећи, минималне и максималне елементе скупа A у односу на релацију ϱ.

3. *(25 поена)* Дата је алгебарска формула F у својој префиксној нотацији:

$$+ - b\; c \cdot a\, d$$

а) Нацртати уређено коренско стабло T које одговара датој формули.

б) Колика је висина добијеног стабла T? Одредити ниво сваког листа у стаблу T. Да ли је стабло T бинарно? Да ли је стабло T стриктно? Да ли је стабло T балансирано? Да ли је стабло T потпуно бинарно стабло?

в) Одредити скуп чворова V и скуп грана E, као и степене чворова $d(v)$ стабла T. Да ли је стабло T бипартитан граф? Написати матрицу растојања D стабла T.

г) Одредити редослед обилазака чворова стабла T при КЛД, ЛКД и ЛДК обиласку.

д) Одредити алгебарску формулу F.

4. *(25 поена)* Наћи коначан аутомат који препознаје речи над азбуком $\{a, b\}$ које имају бар 4 слова и почињу и завршавају се истим словом.

а) Да ли је добијени аутомат оптималан? Ако није оптимизовати га.

б) Одредити регуларну граматику $G = (N, T, \Pi, \sigma^*)$ која одговара оптималном аутомату.

Задатке детаљно образложити! Срећно!

Б **Писмени испит из ДМС-а, 23.08.2010.** **Б**

Презиме и име студента **бр. индекса**

1. *(25 поена)* Дата је предикатска формула

$$(\exists x)\,\alpha(x) \;\Rightarrow\; (\exists x)\,\beta(x) \;\Leftrightarrow\; (\exists x)\big(\alpha(x) \;\Rightarrow\; \beta(x)\big),$$

где су α и β унарни релацијски знаци.

Одредити истинитосну вредност формуле при интерпретацији

а) $\mathcal{D} = \mathbb{Z}$, α: „бити паран број", β: „бити број дељив са 3";

б) $\mathcal{D} = \mathbb{N}$, α: „бити корен једначине $x^2 - 5x + 4 = 0$", β: „бити негативан број".

в) Да ли је дата формула ваљана?

2. *(25 поена)* Нека је ϱ релација дефинисана на скупу $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ тако да за све $x, y \in A$ важи

$$x\,\varrho\,y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad x \mid y$$

($x \mid y$ се чита „x дели y", а математичка дефиниција дељивости је $(\exists k \in \mathbb{Z})\ y = k \cdot x$).

а) Представити дату релацију таблично и преко графа.

б) Да ли је дата релација рефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна?

в) Испитати да ли је то релација еквиваленције и/или релација поретка.

г) Уколико је то релација еквиваленције одредити све класе еквиваленције, а уколико је то релација поретка представити је преко Хасеовог дијаграма, испитати да ли је то релација тоталног или парцијалног поретка, као и да ли је решетка и одредити најмањи, највећи, минималне и максималне елементе скупа A у односу на релацију ϱ.

3. *(25 поена)* Дата је алгебарска формула F у својој постфиксној нотацији:

$$a\ c + b : d -$$

а) Нацртати уређено коренско стабло T које одговара датој формули.

б) Колика је висина добијеног стабла T? Одредити ниво сваког листа у стаблу T. Да ли је стабло T бинарно? Да ли је стабло T стриктно? Да ли је стабло T балансирано? Да ли је стабло T потпуно бинарно стабло?

в) Одредити скуп чворова V и скуп грана E, као и степене чворова $d(v)$ стабла T. Да ли је стабло T бипартитан граф? Написати матрицу растојања D стабла T.

г) Одредити редослед обилазака чворова стабла T при КЛД, ЛКД и ЛДК обиласку.

д) Одредити алгебарску формулу F.

4. *(25 поена)* Наћи коначан аутомат који препознаје речи над азбуком $\{a, b\}$ које имају бар 3 слова и почињу и завршавају се различитим словима.

а) Да ли је добијени аутомат оптималан? Ако није оптимизовати га.

б) Одредити регуларну граматику $G = (N, T, \Pi, \sigma^*)$ која одговара оптималном аутомату.

Задатке детаљно образложити! Срећно!

Решења групе А

1. Дата предикатска формула F је $p \wedge q \Rightarrow r$.

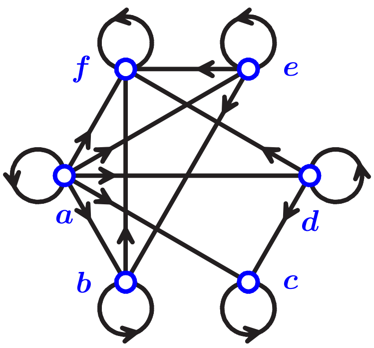
а) Овде је $p =$„Постоји непаран природан број“, $q =$„Постоји паран природан број“ и $r =$„Постоји природан број који је и паран и непаран“. Имамо да је $v(p) = 1$ (постоји, нпр. $x = 3$), $v(q) = 1$ (постоји, нпр. $x = 8$), $v(r) = 0$ (не постоји број x који је и паран и непаран). Како је $1 \wedge 1 \Rightarrow 0$ нетачно, то је истинитосна вредност формуле F при овој интерпретацији $v(F) = 0$.

б) Овде је $p =$„Постоји природан број мањи од 5“, $q =$„Постоји природан број који је ненегативан“ и $r =$„Постоји природан број који је мањи од 5 и ненегативан“. Имамо да је $v(p) = 1$ (постоји, нпр. $x = 3$), $v(q) = 1$ (постоји, било који природан број, нпр. $x = 8$), $v(r) = 1$ (постоји, нпр. $x = 3$). Како је $1 \wedge 1 \Rightarrow 1$ тачно, то је истинитосна вредност формуле F при овој интерпретацији $v(F) = 1$.

в) Дата формула није ваљана јер није истинита за све интерпретације и све валуације (у делу под а смо добили да F није тачна).

2. а)

ϱ	a	b	c	d	e	f
a	1	1	1	1	1	1
b	0	1	0	0	0	1
c	0	0	1	0	1	0
d	0	0	1	1	0	1
e	0	1	0	0	1	1
f	0	0	0	0	0	1



б) Ова је релација **P** (у таблици су елементи на главној дијагонали једнаки 1; у графу око сваког чвора има петљу).

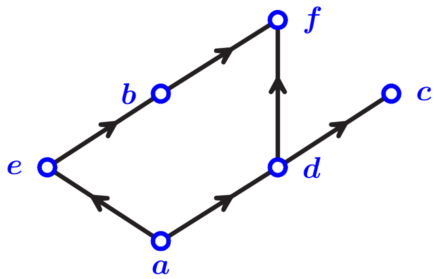
Ова релација није **C** (нпр. $a\,\varrho\,b$, а $b \not\varrho\, a$).

Ова је релација **AC** (у таблици су елементи који су симетрични у односу на главну дијагоналу нису једнаки 1 и 1; у графу видимо да између 2 различита чвора имамо или 0 или 1 грану).

Ова је релација **T** (видимо са графа: кад год имамо 2 гране које се надовезују имамо и „пречицу“, тј. не јављају се она 2 карактеристична случаја).

в) Ова релација није **C**, па није релација еквиваленције.
Ова релација је **P**, **AC** и **T**, па је и релација поретка.

г) Ово није релација тоталног поретка, јер $b \not\varrho\, c$ и $c \not\varrho\, b$, па је то релација парцијалног поретка. То можемо видети и са Хасеовог дијаграма (јер он није ланац):



Са графа релације видимо да је елемент a најмањи елемент (јер из њега воде гране у све остале елементе), па је стога то и једини минимални елемент.

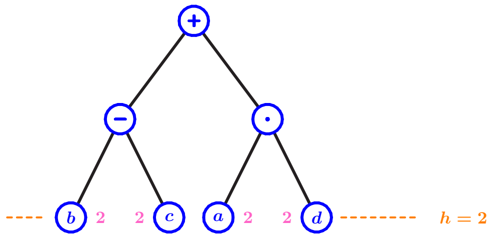
Највећег елемента нема, јер не постоји елемент у који улазе гране из свих осталих елемената.

Максимални елементи су: c и f јер у њих само улазе гране из осталих елемената. Како имамо више од 1 максималног елемента и на основу тога следи да не постоји највећи елемент.

Ова релација није решетка, јер нпр. за скуп $\{c, f\}$ не постоји супремум.

Напомена. Честа грешка је да се уставнови да је ово релација парцијалног поретка и да због тога то није решетка. Ако је ланац онда је то решетка, али обратно не мора да важи, јер постоје и релације парцијалног поретка које су решетке!

3. **а)** Стабло које одговара формули F је приказано на следећој слици:

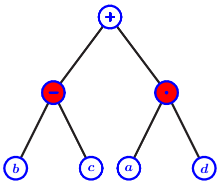


б) Ниво сваког листа је означен на стаблу. Висина овог стабла је $h = 2$ ($n(b) = 2$). Ово стабло је бинарно јер сваки чвор има највише 2 детета. Ово стабло је стриктно бинарно јер сваки унутрашњи чвор има тачно 2 детета. Ово стабло је балансирано (сви листови су на нивоу $h = 2$) и јесте потпуно бинарно стабло (стриктно и сви листови на истом нивоу).

в) Скуп чворова V и скуп грана E су:

$$V = \{+, -, \cdot, a, b, c, d\}, \qquad E = \Big\{\{+,-\}, \{+,\cdot\}, \{-,b\}, \{-,c\}, \{\cdot,a\}, \{\cdot,d\}\Big\}.$$

Граф је бипартитан јер не поседује ниједну контуру непарне дужине (свако стабло нема контура), а то се може показати и одговарајућим бојењем (на наредној слици лево) у 2 боје, црвену и белу, где су суседни чворови обојени различитим бојама:



$$D = \begin{array}{c} \\ + \\ - \\ \cdot \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} + & - & \cdot & a & b & c & d \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 4 & 4 & 0 \end{array} \right\| \end{array}$$

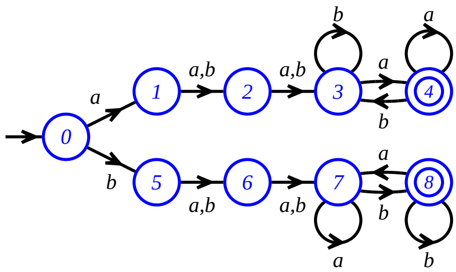
г) КЛД: $+ - b\, c \cdot a\, d$ ЛКД: $b - c + a \cdot d$ ЛДК: $b\, c - a\, d \cdot +$.

д) Тражена формула је $b - c + a \cdot d$, или ако баш хоћемо да нагласимо редослед извршавања операција $(b - c) + (a \cdot d)$.

4. Иако су многи прво одређивали коначан аутомат A_1 који има бар 4 слова, затим га спојити са аутоматом A_2 који препознаје речи које почињу и завршавају се истим словом (то је аутомат из јунског рока!) у аутомат $A_1 \wedge A_2$. Понеки од тих су били недетерминистички па би их прво требало пребацити на детерминистичке што нико није стигао да одради за време испита!

Ми ћемо дати одмах тражени аутомат A јер се он може добити и директно (мањом модификацијом аутомата A_2):

A:



а) Аутомат A је оптималан јер се свако стање представља бројач колико слова је прошло у сваком од 2 одвојена случаја – да ли почиње на слово a или на b.

б) Одредимо регуларну граматику $G = (N, T, \Pi, \sigma^*)$ која одговара коначном аутомату A. Имамо да је $N = \Big\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\Big\}$, $T = \{a, b\}$, $\Pi = \Big\{0 \to a1, 0 \to b5, 1 \to a2, 1 \to b2, 2 \to a3, 2 \to b3, 3 \to a4,$ $3 \to b3, 4 \to a4, 4 \to b3, 4 \to \varepsilon, 5 \to a6, 5 \to b6, 6 \to a7, 6 \to b7, 7 \to a7,\ 7 \to b8, 8 \to a7, 8 \to b8, 8 \to \varepsilon\Big\}$ и $\sigma^* = 0$.

Решења групе Б

1. Дата предикатска формула F је $p \wedge q \Rightarrow r$.

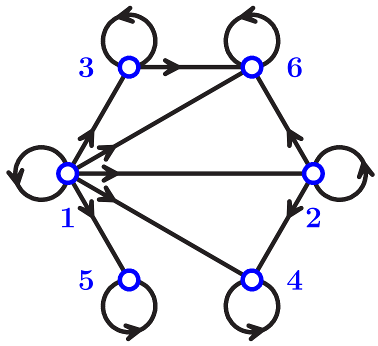
а) Овде је $p =$„Постоји паран природан број“, $q =$„Постоји природан број дељив са 3“ и $r =$„Постоји природан број који ако је паран онда је и дељив са 3“. Имамо да је $v(p) = 1$ (постоји, нпр. $x = 2$), $v(q) = 1$ (постоји, нпр. $x = 3$), $v(r) = 1$ (постоји нпр. $x = 6$ и онда имамо $1 \Rightarrow 1$ што је тачно или нпр. $x = 5$ за шта имао $0 \Rightarrow 0$ што је опет тачно). Како је $1 \wedge 1 \Rightarrow 1$ тачно, то је истинитосна вредност формуле F при овој интерпретацији $v(F) = 1$.

б) Овде је $p =$„Постоји природан број који је корен једначине $x^2 - 5x + 4 = 0$“ (тј. $p =$„Постоји природан број који је једнак 1 или 4“), $q =$„Постоји природан број који је негативан“ и $r =$„Постоји природан број који ако је корен једначине $x^2 - 5x + 4 = 0$ онда је и ненегативан“. Имамо да је $v(p) = 1$ (постоји, нпр. $x = 4$), $v(q) = 0$ (сви природни бројеви су позитивни), $v(r) = 1$ (постоји, нпр. $x = 3$: тада је десна страна $0 \Rightarrow 0$ што је тачно). Како је $1 \Rightarrow 0 \Leftrightarrow 1 = 0 \Leftrightarrow 1$ нетачно, то је истинитосна вредност формуле F при овој интерпретацији $v(F) = 0$.

в) Дата формула није ваљана јер није истинита за све интерпретације и све валуације (у делу под б смо добили да F није тачна).

2. а)

$\mid$	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	0	0	1
4	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	1



б) Ова је релација **P** (у таблици су елементи на главној дијагонали једнаки 1; у графу око сваког чвора има петљу).

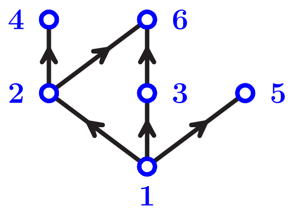
Ова релација није **C** (нпр. $1 \mid 2$, а $2 \nmid 1$).

Ова је релација **AC** (у таблици су елементи који су симетрични у односу на главну дијагоналу нису једнаки 1 и 1; у графу видимо да између 2 различита чвора имамо или 0 или 1 грану).

Ова је релација **T** (видимо са графа: кад год имамо 2 гране које се надовезују имамо и „пречицу“, тј. не јављају се она 2 карактеристична случаја).

в) Ова релација није **C**, па није релација еквиваленције.
Ова релација је **P**, **AC** и **T**, па је и релација поретка.

г) Ово није релација тоталног поретка, јер $2 \nmid 3$ и $3 \nmid 2$, па је то релација парцијалног поретка. То можемо видети и са Хасеовог дијаграма (јер он није ланац):



Са графа релације видимо да је елемент 1 најмањи елемент (јер из њега воде гране у све остале елементе, тј. 1 дели све остале бројеве), па је стога то и једини минимални елемент.

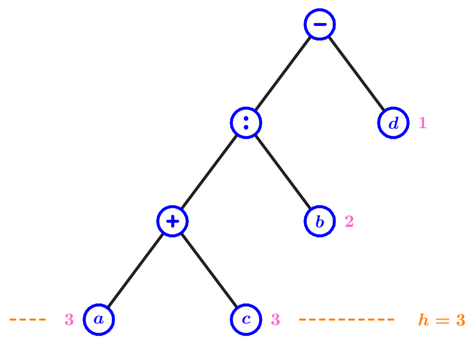
Највећег елемента нема, јер не постоји елемент у који улазе гране из свих осталих елемената.

Максимални елементи су: 4, 5 и 6 јер у њих само улазе гране из осталих елемената. Како имамо више од 1 максималног елемента и на основу тога следи да не постоји највећи елемент.

Ова релација није решетка, јер нпр. за скуп $\{4, 5\}$ не постоји супремум.

Напомена. Честа грешка је да се установи да је ово релација парцијалног поретка и да због тога то није решетка. Ако је ланац онда је то решетка, али обратно не мора да важи, јер постоје и релације парцијалног поретка које су решетке!

3. а) Стабло које одговара формули F је приказано на следећој слици:

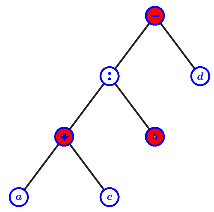


б) Ниво сваког листа је означен на стаблу. Висина овог стабла је $h=3$ ($n(a)=3$). Ово стабло је бинарно јер сваки чвор има највише 2 детета. Ово стабло је стриктно бинарно јер сваки унутрашњи чвор има тачно 2 детета. Ово стабло није балансирано ($n(a)=3$, $n(d)=1$) и стога није потпуно бинарно стабло.

в) Скуп чворова V и скуп грана E су:

$$V=\{+,:,-,a,b,c,d\},\qquad E=\Big\{\{-,:\},\{:,+\},\{-,d\},\{:,b\},\{+,a\},\{+,c\}\Big\}.$$

Граф је бипартитан јер не поседује ниједну контуру непарне дужине (свако стабло нема контура), а то се може показати и одговарајућим бојењем (на наредној слици лево) у 2 боје, црвену и белу, где су суседни чворови обојени различитим бојама:



$$D=\begin{array}{c|ccccccc|}
 & + & : & - & a & b & c & d\\
+ & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 3\\
: & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2\\
- & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 3 & 1\\
a & 1 & 2 & 3 & 0 & 3 & 2 & 4\\
b & 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 3 & 3\\
c & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 0 & 4\\
d & 3 & 2 & 1 & 4 & 3 & 4 & 0
\end{array}$$

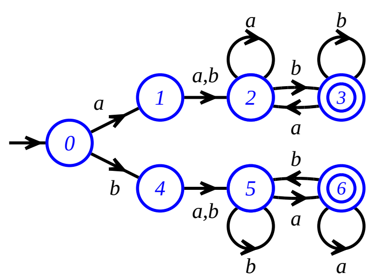
г) КЛД: $-:+a\ c\ b\ d$ ЛКД: $a+c:b+d$ ЛДК: $a\ c+b:d-$.

д) Тражена формула је $(a+c):b-d$, или ако баш хоћемо да нагласимо редослед извршавања операција $\big((a+c):b\big)-d$.

4. Иако су многи прво одређивали коначан аутомат A_1 који има бар 3 слова, затим га спојити са аутоматом A_2 који препознаје речи које почињу и завршавају се различитим словима (то је аутомат из јунског рока!) у аутомат $A_1 \wedge A_2$. Понеки од тих су били недетерминистички па би их прво требало пребацити на детерминистичке што нико није стигао да одради за време испита!

Ми ћемо дати одмах тражени аутомат A јер се он може добити и директно (мањом модификацијом аутомата A_2):

A:



а) Аутомат A је оптималан јер се свако стање представља бројач колико слова је прошло у сваком од 2 одвојена случаја – да ли почиње на слово a или на b.

б) Одредимо регуларну граматику $G=(N,T,\Pi,\sigma^*)$ која одговара коначном аутомату A. Имамо да је $N=\Big\{0,1,2,3,4,5,6\Big\}$, $T=\{a,b\}$, $\Pi=\Big\{0\to a1, 0\to b5, 1\to a2, 1\to b2, 2\to a2, 2\to b3, 3\to a2, 3\to b3, 3\to\varepsilon,$ $4\to a5, 4\to b5, 5\to a6, 5\to b5, 6\to a6, 6\to b5, 6\to\varepsilon\Big\}$ и $\sigma^*=0$.